

Г. И. Атабеков

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ





ЛАНЬ®  
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ  
МОСКВА  
КРАСНОДАР  
2009



Г. И. АТАБЕКОВ

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

---

ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

*Издание седьмое,  
стереотипное*



ЛАНЬ®  
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ · МОСКВА · КРАСНОДАР  
2009

ЭЛЕКТРОННАЯ БИБЛИОТЕКА

Издательство «Лань»



ББК 31.21  
А 92

**Атабеков Г. И.**

**А 92** Теоретические основы электротехники. Линейные электрические цепи: Учебное пособие. 7-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2009. — 592 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

**ISBN 978-5-8114-0800-9**

В учебном пособии рассмотрены основные свойства линейных электрических цепей, электромагнитные процессы в них и инженерные методы расчета. Рассмотрены цепи однофазного, трехфазного и несинусоидального тока, четырехполюсники и электрические фильтры, цепи с распределенными параметрами, переходные процессы и синтез электрических цепей. Каждая глава снабжена задачами и вопросами для самопроверки. Рассмотрен машинный метод расчета электрических цепей.

Учебное пособие предназначено для студентов университетов и технических вузов, обучающихся по электротехническим и радиотехническим специальностям.

**ББК 31.21**

---

ЛР № 065466 от 21.10.97  
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.004173.04.07  
от 26.04.2007 г., выдан ЦГСЭН в СПб

**Издательство «ЛАНЬ»**  
lan@lpbl.spb.ru; www.lanbook.com  
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.  
Тел./факс: (812)412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.  
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 28.04.09.  
Бумага офсетная. Гарнитура Литературная. Формат 84×108<sup>1/32</sup>.  
Печать офсетная. Усл. п. л. 31,08. Тираж 1500 экз.

Заказ № 1331.

Отпечатано в полном соответствии  
с качеством предоставленных диапозитивов  
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».  
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.  
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.ippps.ru

**Обложка**  
**А. Ю. ЛАПШИН**

© Издательство «Лань», 2009  
© Г. И. Атабеков, наследники, 2009  
© Издательство «Лань»,  
художественное оформление, 2009



---

## ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Автор настоящей книги — доктор технических наук, профессор Григорий Иосифович Атабеков (1908–1966), крупный специалист в области электротехники. Преподавал в Закавказском индустриальном институте (1930–1935), в Московском институте механизации и электрификации сельского хозяйства (1935–1942), в Ленинградском институте инженерной связи (1942–1945), в Московском авиационном институте им. С. Орджоникидзе (1946–1966). Г. И. Атабековым написано ряд учебников и пособий для студентов высших учебных заведений, обучающихся по электротехническим и радиотехническим специальностям. Эти работы, в том числе данное издание, не потеряли своей актуальности и широко востребованы в настоящее время.

Учебное пособие «Теоретические основы электротехники. Линейные электрические цепи» печатается по пятому изданию книги, в которое были внесены некоторые изменения. Книга рецензировалась чл.-кор. АН СССР, проф. К. С. Демирчаном, доцентами В. И. Демиденко и М. А. Шакировым (ЛПИ им. М. И. Калинина).



## ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Настоящий учебник по курсу «Теоретические основы электротехники» (ТОЭ) предназначен для студентов электромеханических и радиотехнических специальностей, изучающих этот курс с отрывом или без отрыва от производства. Он может также служить руководством для инженерно-технических работников, повышающих уровень теоретических знаний.

Действующая в настоящее время программа курса ТОЭ, утвержденная учебно-методическим управлением по вузам Минвуза СССР в 1964 г. для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений, определяет совокупность вопросов, составляющих содержание курса. Курс ТОЭ должен читаться в соответствии с методикой, принятой кафедрой ТОЭ данного вуза, причем в зависимости от имеющихся специальностей и учебных планов института отдельные разделы программы могут излагаться более расширенно или более сжато; очередность разделов курса может варьироваться. Требуемая степень детализации изложения тех или иных вопросов устанавливается кафедрой ТОЭ по согласованию со специальными кафедрами данного вуза.

Теоретические основы электротехники представляют собой непрерывно развивающуюся и обогащающуюся новыми сведениями дисциплину. По своему содержанию курс ТОЭ разделяется на три явно выраженные части. Первая часть охватывает теорию линейных электрических цепей, вторая — теорию нелинейных цепей и третья — теорию электромагнитного поля. В связи с этим и учебник выпускается в трех частях, каждая из которых содержит соответствующую часть курса.

Деление теории цепей по принципу линейности и нелинейности — естественный результат развития современной электротехники и смежных с нею отраслей знаний; оно продиктовано спецификой нелинейных задач и возросшим значением нелинейной электротехники в науке



и технике. В программе курса ТОЭ специально отмечено, что теория нелинейных цепей выделена в самостоятельную часть в связи с исключительно большим значением нелинейных цепей во всех областях современной электротехники и в первую очередь в автоматике, вычислительной технике, радиотехнике, электронике и измерительной технике.

Вместе с тем изучение нелинейных цепей после прохождения теории линейных электрических цепей согласуется и с принципом перехода от простого к сложному: нелинейные задачи, как правило, сложнее линейных и требуют предварительного знания теории линейных электрических цепей.

При решении вопроса о содержании и методике изложения отдельных разделов курса ТОЭ необходимо учитывать современный уровень физико-математической подготовки в средней и высшей школе.

Первоначальные сведения по электричеству, магнетизму и их практическому применению учащиеся средней школы черпают из курсов физики и электротехники. В последующем в высшей школе эти сведения углубляются и расширяются в курсе физики, действующая программа которого для высших технических учебных заведений предусматривает достаточно подробное изучение разделов электростатики, постоянного тока и электромагнетизма. Поэтому при написании настоящего учебника учитывалось, что комплекс знаний в области электричества и магнетизма, приобретенный учащимися до прохождения ТОЭ, вполне достаточен для усвоения первой части ТОЭ — теории линейных электрических цепей.

Устранение излишнего параллелизма и непроизводительной затраты времени на повторение некоторых вопросов, пройденных в средней школе и по курсу физики в институте, дает возможность освободить часть времени в курсе ТОЭ для изучения новых важных вопросов современной теоретической электротехники.

С другой стороны, постановка математического образования в технических вузах с каждым годом все полнее учитывает необходимость усиления математической подготовки учащихся по соответствующим разделам математического анализа (специальные функции, матрицы, преобразования Фурье и Лапласа, функции комплексного переменного и др.). Это обстоятельство позволяет излагать и изучать курс ТОЭ на должном научно-техническом



уровне с привлечением математического аппарата, который ранее в курсе ТОЭ либо вовсе не использовался, либо давался в дополнительных главах курса ТОЭ, значительно увеличивая его объем (например, теория комплексных чисел, теория вычетов, основы векторного анализа и др.).

Настоящая, первая, часть курса ТОЭ, посвященная линейным электрическим цепям, начинается с краткого напоминания основных физических явлений и законов электрических цепей и основных понятий, относящихся к электрическим и магнитным полям. В начале курса рассматриваются такие основные вопросы, как положительные направления тока и напряжения; элементы и параметры электрической цепи; представление электротехнических устройств идеализированными схемами замещения и т. п.

Читатель постепенно вводится в круг вопросов, относящихся к анализу линейных электрических цепей. В начале поясняются основные свойства простейших электрических цепей синусоидального тока, векторные диаграммы и комплексная форма расчета. Методика расчета простейших электрических цепей постоянного тока, уже известная учащимся, в учебнике не повторяется.

Последовательно накапливая сведения о преобразованиях электрических схем, резонансных цепях и геометрических местах на комплексной плоскости, учащиеся подготавливаются к сознательному выполнению лабораторных работ и усвоению общих теорем и методов расчета сложных электрических цепей. Последние даются в общей форме, применимой для цепей постоянного и переменного тока.

Вслед за теорией четырехполюсника приводится теория электрических фильтров, рассматриваемых как частные случаи четырехполюсника. Трехфазной цепью завершается изучение синусоидальных режимов в линейных цепях.

Периодические несинусоидальные процессы исследуются с помощью рядов Фурье, а после изучения переходных процессов решения даются и в замкнутой форме.

В главе, посвященной применению преобразования Лапласа, напоминаются основные теоремы и свойства преобразования Лапласа. Главное внимание уделяется не доказательствам формул, которые должны быть известны учащимся из курса высшей математики, а практическому приложению этих формул к расчету переход-

ных процессов в линейных электрических цепях. Рассмотрение преобразования Фурье как частного случая преобразования Лапласа облегчает исследование спектральных характеристик и использование их для расчета переходных процессов.

Первая часть курса завершается ознакомлением с синтезом линейных электрических цепей.

В книге приняты термины, рекомендованные Комитетом технической терминологии АН СССР. Для ознакомления учащихся с определениями терминов, приведенными в сборнике «Терминология теоретической электротехники» (Изд-во АН СССР, 1958, отв. редактор член-корр. АН СССР Л. Р. Нейман), в сносках даны определения основных понятий, заимствованные из этого сборника (сокращенно именуемого ТТЭ)<sup>1</sup>.

Буквенные обозначения в книге приведены в соответствии с ГОСТ 1494-61, а условные графические обозначения для электрических схем — в соответствии с ГОСТ 7624-62<sup>2</sup>.

В курсе применена Международная система единиц (СИ) по ГОСТ 9867-61, включающая в себя электрические и магнитные единицы абсолютной практической системы МКСА.

Уделено внимание сочетанию математических выводов с физическими представлениями; изучение методов расчета сопровождается рассмотрением физической стороны явлений, причем содержание материала и порядок его изложения таковы, что учащийся лишь постепенно переходит от более простых вопросов к более сложным.

Для облегчения усвоения курса при заочном обучении основные положения теории иллюстрированы примерами, объем и содержание которых рассчитаны на то, чтобы охватить принципиально важные разделы курса. Кроме того, каждая глава учебника снабжена вопросами для самопроверки и задачами (с ответами), которые учащимся предлагается выполнить самостоятельно.

Студентам, в особенности занимающимся заочно, не всегда удастся отличить все принципиальное и наиболее существенное в предмете от менее важного. В связи с этим

---

<sup>1</sup> В пятом издании терминология была уточнена в соответствии с ГОСТ 19880-74. Электротехника. Основные понятия. Термины и определения. (Прим. ред.)

<sup>2</sup> В настоящее время ГОСТ 7624-62 заменен системой ГОСТ Единая система конструкторской документации. (Прим. ред.)

при изложении материала в учебнике по мере необходимости отненены курсивным шрифтом или словесными указаниями принципиальные положения как данного курса, так и последующих дисциплин.

Параграфы и отдельные места, имеющие подчиненное или прикладное значение, набраны петитом.

В третьем издании в книгу внесен ряд исправлений и добавлений (§ 1-5, 1-6, 3-4, 4-3, 5-2, 7-1, 7-10, 8-9—8-11 и др.).

Автор глубоко признателен коллективу кафедры теоретической электротехники Московского ордена Ленина авиационного института имени Серго Орджоникидзе и рецензентам проф. В. Ю. Ломоносову и доц. Л. И. Столову за множество ценных замечаний и советов, способствовавших улучшению книги.

*Г. И. АТАБЕКОВ*



## УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- $A$  — параметр четырехполюсника; обозначение фазы трехфазной цепи;
- $a$  — собственное затухание четырехполюсника; фазовый оператор  $e^{j120^\circ}$ ;
- $B$  — параметр четырехполюсника; обозначение фазы трехфазной цепи; магнитная индукция;
- $b$  — реактивная проводимость; коэффициент фазы четырехполюсника;
- $b_C$  — емкостная проводимость;
- $b_L$  — индуктивная проводимость;
- $C$  — емкость; обозначение фазы трехфазной цепи;
- $c$  — скорость света в пустоте (примерно  $3 \times 10^8$  м/с); действительная часть комплексной частоты;
- $E$  — постоянная э. д. с.; действующее значение переменной э. д. с.;
- $\dot{E}$  — комплексная э. д. с.;
- $e$  — мгновенное значение э. д. с.; основание натуральных логарифмов (примерно 2,718);
- $F(j\omega)$  — спектральная функция;
- $F(p)$  — изображение функции по Лапласу; функция комплексной частоты;
- $f$  — частота периодической функции;
- $G$  — параметр четырехполюсника;
- $g$  — активная проводимость; параметр четырехполюсника (мера или коэффициент передачи);
- $H$  — параметр четырехполюсника;
- $I$  — постоянный ток; действующий переменный ток;
- $\dot{I}$  — комплексный ток;
- $i$  — мгновенный ток;
- $j = \sqrt{-1}$ ;
- $K_I$  — коэффициент передачи по току;
- $K_U$  — коэффициент передачи по напряжению;
- $k$  — коэффициент связи; постоянная фильтра;
- $L$  — индуктивность;
- $L_S$  — индуктивность рассеяния;
- $M$  — взаимная индуктивность;
- $m$  — постоянная фильтра; индекс, обозначающий амплитуду переменной величины;
- $n$  — коэффициент трансформации, коэффициент отражения;
- $P$  — активная мощность;
- $p$  — мгновенная мощность; комплексная частота;



- $Q$  — реактивная мощность; добротность катушки, конденсатора, контура;  
 $q$  — электрический заряд (мгновенный);  
 $r$  — активное сопротивление;  
 $S$  — полная мощность; площадь поперечного сечения;  
 $T$  — период;  
 $t$  — время;  
 $U$  — постоянное напряжение; действующее переменное напряжение;  
 $\dot{U}$  — комплексное напряжение;  
 $u$  — мгновенное напряжение;  
 $W$  — энергия (постоянная);  
 $w$  — число витков, мгновенная энергия;  
 $\omega_L, \omega_C$  — энергия, запасенная в индуктивности и емкости;  
 $x$  — реактивное сопротивление;  
 $x_C$  — емкостное сопротивление;  
 $x_L$  — индуктивное сопротивление;  
 $x_M$  — сопротивление взаимной индукции;  
 $Y$  — комплексная проводимость; параметр четырехполюсника;  
 $Y_{ii}$  — входная проводимость  $i$ -го контура (ветви) или узла;  
 $Y_{ki}$  — передаточная проводимость контуров (ветвей) или узлов;  
 $Y_{ii}$  — собственная проводимость ветвей, сходящихся в узле;  
 $Y_{(ik)}$  — общая проводимость; между узлами  $i$  и  $k$ ;  
 $Y(p)$  — операторная проводимость;  
 $y$  — полная проводимость (модуль комплексной проводимости);  
 $Z$  — комплексное сопротивление; параметр четырехполюсника;  
 $Z_a$  — комплексное волновое сопротивление линии;  
 $Z_c$  — характеристическое сопротивление;  
 $Z_{ii}$  — входное сопротивление  $i$ -го узла или контура (ветви);  
 $Z_{ki}$  — передаточное сопротивление узлов или контуров (ветвей)  $i$  и  $k$ ;  
 $Z_{(ii)}$  — собственное сопротивление контура  $i$ ;  
 $Z_{(ik)}$  — общее сопротивление контуров  $i$  и  $k$ ;  
 $Z(p)$  — обобщенное (операторное) сопротивление;  
 $z$  — полное сопротивление (модуль комплексного сопротивления);  
 $\alpha$  — коэффициент ослабления линии;  
 $\beta$  — коэффициент фазы линии;  
 $\gamma$  — коэффициент распространения линии;  
 $\delta$  — угол потерь; относительная расстройка частоты;  
 $\Delta$  — определитель системы уравнений;  
 $\Delta_{ik}$  — алгебраическое дополнение элемента  $i$ -й строки  $k$ -го столбца;  
 $\epsilon_a$  — абсолютная диэлектрическая проницаемость;  
 $\vartheta$  — температура;  
 $\Lambda$  — магнитная проводимость;  
 $\lambda$  — длина волны;  
 $\mu_a$  — абсолютная магнитная проницаемость;  
 $\rho$  — удельное электрическое сопротивление; волновое сопротивление контура;  
 $\tau$  — время, постоянная времени;  
 $\Phi$  — магнитный поток;  
 $\varphi$  — фазовый сдвиг;  
 $\Psi$  — потокосцепление;  
 $\psi$  — начальная фаза;

$\omega$  — угловая частота;  
 1, 2 и 0 — индексы, обозначающие составляющие прямой, обратной и нулевой последовательностей.

### Приставки для дольных и кратных единиц

Наименование приставки	Обозначение	Отношение к основной единице	Наименование приставки	Обозначение	Отношение к основной единице
Пико	п	$10^{-12}$	Санتي	с	$10^{-2}$
Нано	н	$10^{-9}$	Гекто	г	$10^2$
Микро	мк	$10^{-6}$	Кило	к	$10^3$
Милли	м	$10^{-3}$	Мега	М	$10^6$

### Единицы электрических и магнитных величин в системе СИ

Величина	Единица	
	наименование	обозначение
Ток	ампер	А
Заряд	кулон	Кл
Потенциал, напряжение, э.д.с.	вольт	В
Напряженность электрического поля	вольт на метр	В/м
Сопротивление	ом	Ом
Емкость	фарада	Ф
Магнитный поток	вебер	Вб
Магнитная индукция	тесла	Т
Индуктивность	генри	Г
Магнитодвижущая сила	ампер	А
Напряженность магнитного поля	ампер на метр	А/м
Энергия	джоуль	Дж
Мощность	ватт	Вт



## ВВЕДЕНИЕ

Роль и значение электрической энергии в развитии народного хозяйства общеизвестны. Электричество стало основой развития всех отраслей техники, базой для развития промышленности, транспорта, сельского хозяйства, электросвязи; оно стало основой комплексной механизации и автоматизации производственных процессов. Электричество и радио прочно вошли в быт. Исключительно важное значение они имеют и в современной авиации; установленная мощность источников электрической энергии на самолетах, исчислявшаяся долями киловатта в начальный период развития авиации, в настоящее время достигает сотен киловатт на крупных самолетах. Продвижение науки по пути освоения космического пространства и изучения планет солнечной системы было бы невозможным без применения электричества и радио.

Столь широкому распространению электрической энергии во всех областях народного хозяйства и всех отраслях техники способствовали удобство передачи электромагнитной энергии на расстоянии и удобство преобразования ее в другие формы энергии: механическую, световую, тепловую, химическую и др.

Классики марксизма-ленинизма\* с первых же шагов развития науки об электричестве предсказали ей великое будущее. Известно, с каким пристальным вниманием следил К. Маркс и Ф. Энгельс за опытами по передаче электроэнергии на расстояние, предсказав огромное революционное значение применения электричества в промышленности. В 1850 г. К. Маркс, обращаясь к В. Либкнехту, говорил: «Царствование его величества пара, перевернувшего мир в прошлом столетии, окончилось; на его место станет неизмеримо более революционная сила — электрическая искра». Говоря о передаче электрической энергии

\* Ссылки на документы Съездов и Пленумов КПСС, а также на труды В. И. Ленина, К. Маркса и Ф. Энгельса в учебных изданиях были обязательны для советского периода.

на расстояние, Ф. Энгельс в 1883 г. писал Э. Бернштейну, что «это открытие окончательно освобождает промышленность почти от всяких границ, полагаемых местными условиями, делает возможным использование также и самой отдаленной водяной энергии, и если в начале оно будет полезно только для городов, то в конце концов оно станет самым мощным рычагом для устранения противоположности между городом и деревней. Совершенно ясно, однако, что благодаря этому производительные силы настолько вырастут, что управление ими будет все более и более не под силу буржуазии»<sup>1</sup>.

Энергетическая база дореволюционной России была крайне слаба. С первых дней существования Советской власти Коммунистическая партия придавала решающее значение делу электрификации страны для победы нового общественного строя. Всем памяты слова В. И. Ленина «Коммунизм — это есть Советская власть плюс электрификация всей страны». Выступая в 1920 г. на VIII Всероссийском съезде Советов, В. И. Ленин говорил: «...если Россия покроется густою сетью электрических станций и мощных технических оборудований, то наше коммунистическое хозяйственное строительство станет образцом для грядущей социалистической Европы и Азии»<sup>2</sup>.

Общеизвестно, что первый хозяйственный план, Государственный план электрификации России (ГОЭЛРО), был назван В. И. Лениным второй программой партии.

Благодаря преимуществам социалистической системы планирования и развития народного хозяйства, обеспечившим успешное выполнение и перевыполнение пятилетних планов, в СССР создана мощная энергетическая база, которая дает возможность быстрыми темпами повышать электроснабжение и производительность труда во всех отраслях промышленности и сельского хозяйства. По производству электроэнергии наша страна вышла на первое место в Европе и на второе в мире.

В СССР сооружена и пущена в 1954 г. первая в мире электрическая станция, использующая атомную энергию.

Ведущая роль электрификации в развитии всех отраслей народного хозяйства, в осуществлении всего современного технического прогресса раскрыта в Программе КПСС, принятой XXII съездом КПСС.

<sup>1</sup> К. Маркс и Ф. Энгельс. Соч. 2-е изд., т. 35, с. 374.

<sup>2</sup> В. И. Ленин. Полн. собр. соч. 5-е изд., т. 42, с. 161.

Советский Союз вступил в решающую стадию претворения в жизнь идеи В. И. Ленина о сплошной электрификации страны. Планом развития народного хозяйства СССР на 1976—1980 гг. предусмотрено довести производство электроэнергии в 1980 г. до 1380 млрд. кВт·ч. Одновременно с дальнейшей электрификацией промышленности и транспорта, автоматизацией производственных процессов и т. п. будут также электрифицированы все колхозы, совхозы и рабочие поселки. Создается и развивается Единая энергетическая система СССР, которая позволяет перебрасывать энергию из восточных районов страны в ее европейскую часть и связана с энергосистемами других социалистических стран.

Большое внимание уделяется освоению новых источников энергии и новых способов ее получения, в частности решению проблемы прямого преобразования различных видов энергии в электрическую.

Электрификация народного хозяйства была бы невозможна без развития учения об электричестве. В течение XIX и XX вв. учение об электричестве непрерывно развивалось, причем электротехника на ранних ступенях развития являлась разделом физики.

Первый трактат по электричеству, вышедший на русском языке в 1753 г., принадлежит отцу русской науки М. В. Ломоносову. Его «Слово о явлениях воздушных, от электрической силы происходящих» явилось одной из крупных работ в области электричества, написанных учеными XVIII в.

Исследования Ломоносова и его друга Рихмана, а также Франклина, Гальвани, Вольта и др., приведшие к изобретению громоотвода и источников электрической энергии (вольтова столба, гальванических элементов), положили начало систематическому изучению электрических явлений.

В. В. Петров, производя опыты в электрической цепи, обнаружил и исследовал в 1802 г. явление электрической дуги между угольными электродами при атмосферном давлении. Результаты этих исследований были опубликованы им в книге «Известие о гальвани-вольтовых опытах» (1803 г.).

В 1819 г. Эрстед обнаружил механическое воздействие электрического тока на магнитную стрелку, а в 1820 г. Ампер открыл магнитные свойства соленоида с током. Таким образом, было установлено, что прохождение тока сопровождается магнитными явлениями.



В 1831 г. М. Фарадей открыл и описал явление электромагнитной индукции. В 1833 г. Э. Х. Ленц установил правило определения индуктированного тока, выражающее фундаментальный принцип электродинамики — принцип электромагнитной инерции. В 1844 г. Ленцем и независимо от него Джоулем был открыт важный закон электротехники, известный под названием закона Джоуля — Ленца.

На основании теоретического обобщения экспериментальных данных по электричеству и магнетизму во второй половине XIX в. Д. Максвелл выдвинул гипотезу существования электромагнитного поля излучения. Разработанная им теория электромагнитного поля изложена в его труде «Трактат об электричестве и магнетизме» (1873 г.).

В 1888 г. Г. Герц опубликовал свои работы, в которых экспериментально доказал существование поля излучения. Однако Г. Герц и современные ему физики, занимавшиеся исследованием электромагнитного поля, не считали возможным выйти за пределы своих лабораторий и применить электромагнитные волны для беспроволочной связи.

Такую задачу впервые поставил и блестяще разрешил выдающийся русский ученый Александр Степанович Попов, практически осуществивший в 1895 г. первую в мире радиосвязь. Изобретение радио открыло новую эру в истории человечества.

В России формирование самостоятельной дисциплины «Теоретические основы электротехники» относится к концу XIX и началу XX вв. В 1904 г. проф В. Ф. Миткевич начал читать курс «Теория электрических и магнитных явлений» в Петербургском политехническом институте. Примерно тогда же началась подготовка инженеров электротехнической специальности в Московском высшем техническом училище, где проф. К. А. Круг приступил в 1905 г. к чтению курса «Теория переменных токов».

Предметом курса «Теоретические основы электротехники» является изучение как с качественной, так и с количественной сторон электромагнитных процессов, происходящих в цепях и полях. Этот курс, базирующийся на курсах физики и высшей математики, содержит инженерные методы расчета и анализа, применимые к широкому классу современных электротехнических устройств. Он имеет исключительно важное значение для формиро-



вания научного кругозора специалистов по электротехнике и радиотехнике и на нем основываются все специальные электротехнические и радиотехнические дисциплины.

В курсе ТОЭ применяются два способа описания электрических и магнитных явлений: при помощи понятий теории цепей и теории поля. Выбор того или другого способа диктуется условиями постановки задачи.

Теория цепей исходит из приближенной замены реального электротехнического устройства идеализированной схемой замещения. Эта схема содержит участки цепи, на которых определяются искомые напряжения и токи.

Теория цепей позволяет с достаточной для инженерной практики точностью определять непосредственно напряжение между концами рассматриваемого участка цепи, не прибегая к вычислению его между промежуточными точками. Токи также находят непосредственно, без вычисления их плотностей в различных точках сечения проводника.

Теория поля изучает изменение электрических и магнитных величин от точки к точке в пространстве и времени. Она исследует напряженности электрического и магнитного полей и с их помощью такие явления, как излучение электромагнитной энергии, распределение объемных зарядов, плотностей токов и т. п.

Разграничение областей применения теории цепей и теории поля является условным. Например, процессы распространения электрических сигналов в линиях электропроводной связи исследуются как методами теории цепей, так и методами теории поля. Здесь сочетаются такие понятия, как напряжение и ток, характерные для теории цепей, и скорость распространения электромагнитной энергии, характерная для теории поля.

Первая и вторая части настоящего курса посвящены теории цепей; третья часть посвящена теории поля.



## ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ, ЭЛЕМЕНТЫ И ПАРАМЕТРЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

### 1-1. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ

Электрической цепью называется совокупность устройств и объектов, образующих путь для электрического тока, электромагнитные процессы в которых могут быть описаны с помощью понятий об э. д. с., напряжении и токе. В общем случае электрическая цепь состоит из источников и приемников электрической энергии и промежуточных звеньев (проводов, аппаратов), связывающих источники с приемниками.

Источниками электрической энергии являются химические источники тока, термоэлементы, генераторы и другие устройства, в которых происходит процесс преобразования химической, молекулярно-кинетической, тепловой, механической или другого вида энергии в электрическую. К источникам можно отнести и приемные антенны, в которых в отличие от перечисленных выше устройств не происходит изменения вида энергии.

Приемниками электрической энергии, или так называемой нагрузкой, служат электрические лампы, электронагревательные приборы, электрические двигатели и другие устройства, в которых электрическая энергия превращается в световую, тепловую, механическую и др. К нагрузкам относятся и передающие антенны, излучающие электромагнитную энергию в пространство.

Расчеты электрических цепей и исследования процессов, происходящих в них, основываются на различных допущениях и некоторой идеализации реальных объектов электрических цепей. Под элементами в теории электрических цепей подразумеваются обычно не физически существующие составные части электротехнических

устройств, а их идеализированные модели, которым теоретически приписываются определенные электрические и магнитные свойства, так что они в совокупности приближенно отображают явления, происходящие в реальных устройствах.

В теории электрических цепей различают активные и пассивные элементы. Активными элементами считаются источники электрической энергии: источники э. д. с. и источники тока. Пассивным элементам электрических цепей относятся сопротивления, индуктивности и емкости. Соответственно различают активные и пассивные цепи.

Эти важные понятия, лежащие в основе теоретической электротехники, подробно рассмотрены ниже.

## 1-2. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ТОКА И НАПРЯЖЕНИЯ

Электрический ток в проводящей среде есть упорядоченное движение электрического заряда. Известно, что электрический ток проводимости в металлах, так же как и в вакууме, представляет собой перемещение отрицательно заряженных частиц (электронов), а ток проводимости в электролитах и газах — перемещение как положительно, так и отрицательно заряженных частиц (ионов).

Электрическому току приписывается направление. Хотя в общем случае ток представляет собой движение носителей электрических зарядов того и другого знаков в разные стороны, однако за направление тока принимают направление перемещения положительных зарядов; это направление противоположно направлению движения отрицательных зарядов.

Численно ток определяется как предел отношения количества электричества, переносимого заряженными частицами сквозь рассматриваемое поперечное сечение проводника за некоторый промежуток времени, к этому промежутку времени, когда он стремится к нулю. Следовательно, если обозначить через  $q$  количество электричества, прошедшего через рассматриваемое сечение проводника за время  $t$ , то мгновенное значение тока, т. е. значение его в любой момент времени  $t$ , определится как производная  $q$  по  $t$ :  $i = dq/dt$ . Здесь  $q = q_+ + q_-$ , где  $q_+$  и  $q_-$  — положительный и отрицательный заряды, переместившиеся в противоположные стороны за время  $t$ .



В Международной системе единиц (СИ)  $i$  измеряется в амперах<sup>1</sup> (А),  $q$  — в кулонах (Кл) или ампер-секундах (А·с),  $t$  — в секундах (с).

Электрический ток может быть постоянным (неизменяющимся) или переменным, т. е. изменяющимся в зависимости от времени.

Направление тока характеризуется знаком тока. Понятия положительный ток или отрицательный ток имеют смысл, только если сравнивать направление тока в проводнике с некоторым заранее выбранным ориентиром — так называемым положительным направлением.

Положительное направление тока выбирается произвольно; оно обычно указывается стрелкой. Если в результате расчета тока, выполненного с учетом выбранного положительного направления, ток имеет знак плюс ( $i > 0$ ), то это означает, что его направление совпадает с выбранным положительным направлением. В противном случае, когда ток отрицателен ( $i < 0$ ), он направлен противоположно.

Таким образом, выбранное для тока положительное направление само по себе не означает направления, в котором перемещаются электрические заряды; оно только придает определенный смысл знаку тока.

Изобразим некоторый участок электрической цепи, через который проходит ток  $i$ , в виде прямоугольника и обозначим концы (выводы) этого участка цифрами 1 и 2 (рис. 1-1). Разность электрических потенциалов точек 1 и 2 представляет собой напряжение на данном участке цепи<sup>2</sup>. Напомним, что разность электрических потенциалов

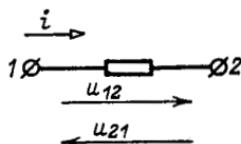


Рис. 1-1. Участок электрической цепи с выбранными положительными направлениями тока и напряжения.

<sup>1</sup> Ампер — величина неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на каждый метр длины.

<sup>2</sup> Электрическое напряжение — скалярная величина, равная линейному интегралу напряженности электрического поля. Разность электрических потенциалов — электрическое напряжение в безвихревом электрическом поле, характеризующееся независимостью от выбора пути интегрирования (ГОСТ 19880-74).

определяется работой, затрачиваемой на перенос единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2.

Значение напряжения в любой текущий момент времени обозначается через  $u$ ; оно может быть постоянным или переменным. В системе СИ напряжение измеряется в вольтах (В).

Для придания определенного смысла знаку напряжения на рассматриваемом участке цепи для напряжения, так же как и для тока, произвольно выбирается положительное направление. Чаще всего его выбирают совпадающим с положительным направлением тока и указывают стрелкой.

В выбранном положительном направлении и отсчитывается напряжение. Пусть на рис. 1-1 отсчет напряжения ведется от точки 1 к точке 2. Когда потенциал точки 1 выше потенциала точки 2, напряжение положительно; в противном случае оно отрицательно.

Для уяснения выбранного направления отсчета напряжения можно вместо стрелки пользоваться обозначением с помощью индексов, при котором порядок расположения индексов, соответствующих точкам цепи, отвечает положительному направлению, выбранному для напряжения. Так, применительно к рис. 1-1 напряжение, отсчитываемое в положительном направлении тока, равно  $u_{12}$ . Напряжение, отсчитываемое в обратном направлении, имеет противоположный знак:  $u_{21} = -u_{12}$ .

Двойное индексное обозначение возможно и для тока. Например,  $i_{12}$  обозначает ток, который имеет положительное направление на участке цепи от точки 1 к точке 2. Однако на практике большее распространение нашло обозначение с помощью стрелок.

Положительными направлениями токов и напряжений пользуются при исследовании процессов, происходящих в электротехнических устройствах, и расчете электрических цепей. Для краткости положительное направление будем называть просто направлением.

Отчетливое уяснение этих важных понятий совершенно обязательно для усвоения всего последующего материала.

### 1-3. МГНОВЕННАЯ МОЩНОСТЬ И ЭНЕРГИЯ

Предположим, что через участок электрической цепи (приемник энергии) под воздействием приложенного напряжения  $u$  проходит электрический заряд  $q$ . Совершае-

мая при этом элементарная работа, или, что то же, поступающая в приемник элементарная энергия, равна:

$$d\omega = u dq = ui dt.$$

Производная энергия по времени, т. е. скорость поступления в цепь электрической энергии в данный момент времени, представляет собой мгновенную мощность. Следовательно, мгновенная мощность, поступающая в приемник, равна произведению мгновенных значений напряжения и тока:

$$p = \frac{d\omega}{dt} = u \frac{dq}{dt} = ui.$$

Мгновенная мощность  $p$  — величина алгебраическая; значение ее положительно при одинаковых знаках  $u$  и  $i$  и отрицательно при разных знаках.

Если положительные направления для напряжения и тока приняты совпадающими, то при  $p > 0$  энергия поступает в приемник, а при  $p < 0$  она возвращается из рассматриваемого участка цепи к источнику.

Энергия, поступившая в приемник за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$  выражается интегралом

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p dt.$$

В отличие от мгновенной мощности  $p$ , которая может иметь любой знак, энергия, поступившая в приемник, не может быть отрицательной.

В системе СИ работа и энергия измеряются в джоулях (Дж), мощность — в ваттах (Вт).

#### 1.4. СОПРОТИВЛЕНИЕ

С о п р о т и в л е н и е м называется идеализированный элемент цепи, приближенно заменяющий резистор<sup>1</sup>, в котором происходит необратимый процесс преобразования электрической энергии в теплоту. При этом термин «сопротивление» и соответствующее ему буквенное обозначение  $r$  применяются как для обозначения самого элемента цепи, так и для количественной оценки величины, равной отно-

<sup>1</sup> Стандартизованный в последние годы термин «резистор» дает возможность более точно применять термин «сопротивление».

шению напряжения на данном элементе цепи к току, проходящему через него:

$$r = \frac{u}{i}. \quad (1-1)$$

Здесь предполагается, что положительные направления тока и напряжения совпадают; при этом знаки  $u$  и  $i$  одинаковы и  $r > 0$ .

Величина  $g = 1/r$ , обратная сопротивлению, называется проводимостью. В системе СИ сопротивление  $r$  измеряется в омах (Ом), а проводимость — в сименсах (См).

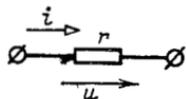


Рис. 1-2. Условное обозначение сопротивления.

Формула (1-1) выражает закон Ома, экспериментально установленный Омом в 1826 г.

Условное графическое изображение сопротивления (резистора) с указанием выбранных положительных направлений тока и напряжения приведено на рис. 1-2.

Мгновенная мощность, поступающая в сопротивление, равна произведению мгновенных значений напряжения и тока:

$$p_r = ui = ri^2 = gu^2.$$

Следовательно, параметр  $r$  может быть численно определен как отношение мгновенной мощности к квадрату мгновенного тока, проходящего через сопротивление:

$$r = \frac{p_r}{i^2}.$$

Электрическая энергия, поступившая в сопротивление  $r$  и превращенная в теплоту, начиная с некоторого момента времени, например,  $t = 0$ , до рассматриваемого момента  $t$ , равна:

$$w_r = \int_0^t p_r dt = \int_0^t ri^2 dt = \int_0^t gu^2 dt.$$

В случае постоянного тока ( $i = I = \text{const}$ )  $w_r = rI^2t$ .

Превращение электрической энергии  $w_r$  в тепловую впервые было доказано опытным путем Джоулем и Ленцем, установившими тепловой эквивалент электрической энергии, равный 0,24 кал/Дж.

Выделение током тепловой энергии впервые использовано для целей освещения А. Н. Лодыгиным, создавшим



в 1873 г. лампу накаливания<sup>1</sup>. Оно целесообразно используется в технике — электронагревательных приборах и т. п. К вредным последствиям теплового действия тока относятся потери электрической энергии в проводах, машинах, аппаратах, порча изоляции проводов от нагрева и т. п.

Параметр  $r$  в общем случае зависит от тока  $i$  (например, вследствие нагрева сопротивления током). Зависимость напряжения на сопротивлении от тока, проходящего через данное сопротивление, называется вольт-амперной характеристикой, которая в общем случае нелинейна.

Если сопротивление  $r$  не зависит от тока и его направления, то имеет место прямая пропорциональность между напряжением и током, выражающая закон Ома. В этом случае сопротивление называется линейным. На рис. 1-3 показаны вольт-амперные характеристики сопротивления — нелинейная (кривая  $a$ ) и линейная (прямая  $b$ ).

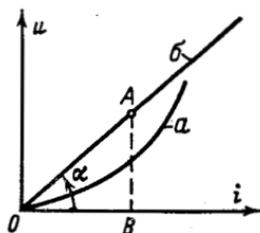


Рис. 1-3. Вольт-амперные характеристики сопротивлений.

$a$  — нелинейная;  $b$  — линейная.

В этой книге рассматриваются линейные сопротивления.

Очевидно, линейное сопротивление  $r$  пропорционально тангенсу угла наклона прямолинейной вольт-амперной характеристики к оси тока:

$$r = \frac{u}{i} = \frac{m_u AB}{m_i OB} = \frac{m_u}{m_i} \operatorname{tg} \alpha,$$

где  $m_u$  и  $m_i$  — масштабы напряжения, В/мм, и тока, А/мм, на чертеже.

## 1-5. ИНДУКТИВНОСТЬ

Индуктивностью называется идеализированный элемент электрической цепи, приближающийся по свойствам к индуктивной катушке, в которой накапливается энергия магнитного поля<sup>2</sup>. При этом термин «индуктив-

<sup>1</sup> Эдисон изобрел лампу накаливания в 1879 г., после Лодыгина.

<sup>2</sup> Магнитное поле — одна из двух сторон электромагнитного поля, характеризующаяся воздействием на электрически заряженную частицу с силой, пропорциональной заряду частицы и ее скорости (ГОСТ 19880-74).

ность» и соответствующее ему условное обозначение  $L$  применяются как для обозначения самого элемента цепи, так и для количественной оценки отношения потокосцепления самоиндукции к току в данном элементе <sup>1</sup>:

$$L = \frac{\Psi}{i}.$$

Потокосцеплением самоиндукции цепи называется сумма произведений магнитных потоков, обусловленных только током в этой цепи, на числа витков, с которыми они сцеплены. Если все витки пронизываются одним и тем же магнитным потоком, то потокосцепление равно произведению магнитного потока на число витков.

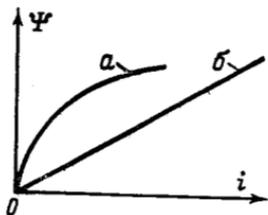


Рис. 1-4. Зависимости потокосцепления от тока.

$a$  — нелинейная;  $b$  — линейная.

В Международной системе единиц  $\Psi$  измеряется в веберах (Вб),  $L$  — в генри (Г). При этом всегда потокосцепление и ток имеют одинаковый знак, так что  $L > 0$ .

Зависимость потокосцепления от тока в общем случае нелинейна, и параметр  $L$  зависит от тока. В случае, когда вебер-амперная характеристика  $\Psi(i)$  прямолинейна, индуктивность  $L$  постоянна (линейная индуктивность). На рис. 1-4 показаны нелинейная и линейная зависимости потокосцепления от тока. В этой части учебника рассматриваются линейные индуктивности.

На основании закона электромагнитной индукции Фарадея — Максвелла изменение потокосцепления самоиндукции вызывает электродвижущую силу (э. д. с.) самоиндукции, которая выражается формулой

$$e_L = - \frac{d\Psi}{dt}. \quad (1-2)$$

По закону Ленца, выражающему принцип электромагнитной инерции, эта э. д. с. противодействует изменению потокосцепления, что и учитывается знаком минус в (1-2), поскольку положительное направление для  $e_L$  выбрано совпадающим с положительным направлением  $i$ .

<sup>1</sup> Термином «индуктивность» заменен ранее применявшийся в литературе и ныне не рекомендуемый термин «коэффициент самоиндукции».

Ввиду совпадения положительных направлений  $e_L$  и  $i$  положительные направления магнитного потока вдоль оси витков и наводимой им э. д. с. самоиндукции, точно так же как и положительные направления тока и создаваемого им магнитного потока, связаны правилом правогоходового винта.

Условное графическое изображение индуктивности с указанием выбранных положительных направлений тока и э. д. с. самоиндукции приведено на рис. 1-5.

Если  $L$  не зависит от  $i$ , то предыдущая формула принимает вид:

$$e_L = -L \frac{di}{dt}. \quad (1-3)$$

Величина

$$u_L = -e_L = L \frac{di}{dt} \quad (1-4)$$

называется падением напряжения в индуктивности или, что то же, на пряжением на индуктивности. Положительное направление  $u_L$  совпадает с положительным направлением  $i$  (рис. 1-5).

На основании (1-4) ток в индуктивности

$$i = \frac{1}{L} \int u_L dt,$$

или

$$i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt.$$

Нижний предел интеграла принят равным  $-\infty$ , так как до рассматриваемого момента времени  $t$  процесс мог длиться сколь угодно долго.

При  $t = 0$  ток в индуктивности равен:

$$i(0) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u_L dt;$$

следовательно,

$$i = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt,$$

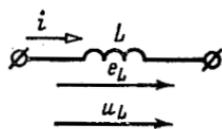


Рис. 1-5. Условное обозначение индуктивности и положительные направления тока, э. д. с. самоиндукции и напряжения.

т. е. в интервале времени от нуля до  $t$  ток в индуктивности изменяется на величину  $\frac{1}{L} \int_0^t u_L dt$ , определяемую площадью, ограниченной в этом интервале кривой напряжения  $u_L$ .

Мгновенная мощность, поступающая в индуктивность, равна произведению мгновенных тока и напряжения:

$$p_L = u_L i = Li \frac{di}{dt}.$$

Она связана с процессом нарастания или убывания энергии магнитного поля. Энергия магнитного поля в произвольный момент времени  $t$  определяется по формуле

$$\omega_L = \int_{-\infty}^t p_L dt = \int_0^t Li di = \frac{Li^2}{2} = \frac{\Psi^2}{2L}.$$

Здесь учтено, что при  $t = -\infty$  ток в индуктивности  $i(-\infty) = 0$ .

Если часть магнитного потока, связанного с индуктивным элементом, связана одновременно и с другим индуктивным элементом, то эти два элемента, кроме параметров  $L_1$  и  $L_2$ , обладают параметром  $M$ , называемым взаимной индуктивностью. Последний, как это будет показано в § 8-1, представляет собой отношение потокосцепления взаимной индукции одного из элементов к току в другом элементе:

$$M = \frac{\Psi_{12}}{i_2} = \frac{\Psi_{21}}{i_1}; \quad (1-5)$$

здесь  $\Psi_{12}$  — потокосцепление первого элемента, обусловленное током второго элемента;  $\Psi_{21}$  — потокосцепление второго элемента, обусловленное током первого элемента.

В этом случае в первом и втором элементах наводятся э. д. с. взаимной индукции, равные соответственно:

$$\left. \begin{aligned} e_{1M} &= -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -M \frac{di_2}{dt}; \\ e_{2M} &= -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

Выражения (1-6) получены в предположении, что  $M$  не зависит от  $i_1$  и  $i_2$ , так как здесь рассматриваются линейные цепи.



$M$  измеряется, так же как и  $L$ , в генри. Однако в отличие от параметра  $L$  взаимная индуктивность  $M$  обозначает не какой-либо самостоятельный элемент электрической цепи, а лишь магнитную связь между индуктивными элементами.

Вопрос взаимной индуктивности подробнее рассмотрен в гл. 8.

## 1-6. ЕМКОСТЬ

Емкостью называется идеализированный элемент электрической цепи, приближенно заменяющий конденсатор, в котором накапливается энергия электрического поля<sup>1</sup>. При этом термин «емкость» и соответствующее ему буквенное обозначение  $C$  применяются как для обозначения самого элемента цепи, так и для количественной оценки отношения заряда к напряжению на этом элементе:

$$C = q/u_c. \quad (1-7)$$

Если  $q$  и  $u_c$  измеряются в кулонах (Кл) и вольтах (В), то  $C$  измеряется в фарадах (Ф). При этом всегда заряд и напряжение имеют одинаковый знак, так что  $C > 0$ .

Зависимость заряда от напряжения в общем случае нелинейна, и, следовательно, параметр  $C$  зависит от напряжения.

В случае, когда кулон-вольтовая характеристика  $q(u)$  прямолинейна, емкость  $C$  постоянна (линейная емкость). На рис. 1-6 показаны нелинейная и линейная зависимости заряда от напряжения. В этой части учебника рассматриваются линейные емкости.

Предположим, что емкость образована двумя пластинами, разделенными диэлектриком. Под влиянием приложенного напряжения на пластинах сосредоточатся равные количества электричества противоположных знаков; пластина с более высоким потенциалом зарядится поло-

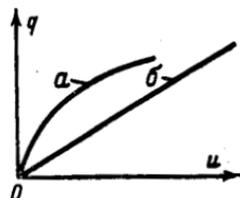


Рис. 1-6. Зависимости электрического заряда от напряжения.

$a$  — нелинейная;  $b$  — линейная.

<sup>1</sup> Электрическое поле — одна из двух сторон электромагнитного поля, характеризующаяся воздействием на электрически заряженную частицу с силой, пропорциональной заряду частицы и не зависящей от ее скорости (ГОСТ 19880-74).

жительным электричеством, а пластина с более низким потенциалом — отрицательным.

При изменении напряжения, приложенного к пластине, изменится в соответствии с (1-7) электрический заряд: к пластине, потенциал которой возрастет, поступит дополнительный положительный заряд, а к пластине, потенциал которой снизится, поступит такой же отрицательный заряд.

Ток равен производной электрического заряда по времени. Поэтому с изменением напряжения на емкости в присоединенной к ней последовательно электрической цепи создается ток, который определяется скоростью изменения заряда на емкости:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}. \quad (1-8)$$

Здесь знак заряда  $q$  соответствует знаку пластины, к которой направлен ток  $i$ .

Этот ток рассматривается как ток проводимости в проводниках, присоединенных к емкостному элементу (ток, обусловленный движением заряженных частиц под действием электрического поля в веществе, обладающем электропроводностью), переходящий в ток смещения<sup>1</sup> в диэлектрике емкостного элемента. Последнее понятие, применяемое в теории поля, означает величину, прямо пропорциональную скорости изменения напряженности электрического поля (в случае однородного поля и  $\epsilon = \text{const.}$ )

Напомним, что напряженность электрического поля определяется силой, действующей на электрический заряд, равный единице<sup>2</sup>.

Ток смещения имеет размерность тока. Благодаря введению этого понятия ток в цепи с емкостью представляется замкнутым через диэлектрик.

Согласно (1-8) ток положителен, когда заряд  $q$  и соответственно напряжение  $u_C$  возрастают.

На основании (1-8) напряжение на емкости

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt$$

<sup>1</sup> Ток смещения — скалярная величина, равная производной по времени от потока электрического смещения сквозь рассматриваемую поверхность (ГОСТ 19880-74).

<sup>2</sup> Напряженность электрического поля — векторная величина, характеризующая электрическое поле и определяющая силу, действующую на заряженную частицу со стороны электрического поля (ГОСТ 19880-74).



или

$$u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt.$$

Здесь, как и в предыдущем параграфе, предполагается, что до рассматриваемого момента времени  $t$  процесс мог длиться сколь угодно долго, и поэтому нижний предел интеграла принят равным  $-\infty$ .

При  $t = 0$  напряжение на емкости равно:

$$u_C(0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i dt.$$

Следовательно,

$$u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i dt,$$

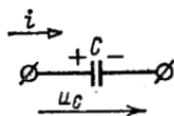


Рис. 1-7. Условное обозначение емкости и положительные направления тока и напряжения.

т. е. в интервале времени от нуля до  $t$  напряжение на емкости изменяется на величину  $\frac{1}{C} \int_0^t i dt$ , определяемую площадью, ограниченной в этом интервале кривой тока  $i$ .

Условное графическое изображение емкости с указанием положительных направлений тока и напряжения приведено на рис. 1-7. Полярность емкости, указанная на рис. 1-7 знаками  $+$  и  $-$ , соответствует положительному напряжению  $u_C$ , т. е. положительному заряду на пластине  $+$ .

Мгновенная мощность, поступающая в емкость, равна  $p_C = u_C i = C u_C \frac{du_C}{dt}$ . Она связана с процессом накопления или убыли электрического заряда в емкости.

Когда заряд положителен и возрастает, ток положителен и в емкость поступает электрическая энергия из внешней цепи.

Когда заряд положителен, но убывает, т. е. ток отрицателен, энергия, ранее накопленная в электрическом поле емкости, возвращается во внешнюю цепь.

Допустим, что к емкости  $C$  приложено некоторое напряжение  $u_C$ . Энергия электрического поля в произволь-

ный момент времени  $t$  определяется по формуле

$$w_C = \int_{-\infty}^t p_C dt = \int_0^{u_C} C u_C du_C = \frac{C u_C^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Здесь учтено, что при  $t = -\infty$  напряжение на емкости  $u_C (-\infty) = 0$ .

### 1-7. ЗАМЕЩЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ ИДЕАЛИЗИРОВАННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ ЦЕПИ

Представление о сопротивлении, индуктивности и емкости как идеализированных элементах электрической цепи основано на предположении, что потери энергии, магнитное и электрическое поля сосредоточиваются в отдельных, не зависящих друг от друга элементах цепи. Раздельное рассмотрение сопротивления, индуктивности и емкости представляет приближенный метод исследования цепи. В действительности потери энергии, магнитные и электрические поля сопутствуют друг другу.

Электропроводность всякого изотропного вещества характеризуется так называемой удельной электрической проводимостью, равной отношению плотности тока проводимости к напряженности электрического поля. Величина, обратная удельной электрической проводимости, называется удельным электрическим сопротивлением.

Электрическое сопротивление проводника при постоянном токе, равное отношению постоянного напряжения на рассматриваемом проводнике к постоянному току в нем, зависит от длины проводника ( $l$ ), площади поперечного сечения ( $S$ ) и удельного сопротивления ( $\rho$ ):

$$r = \rho \frac{l}{S}.$$

В широких пределах изменения температуры зависимость удельного сопротивления проводника от температуры практически прямолинейна, причем в случае металлических проводников кривая  $\rho = f(\theta)$  с повышением температуры возрастает, а в случае неметаллических материалов (например, угля) и электролитов — падает.

Если обозначить через  $\rho_1$  и  $\rho_2$  удельные сопротивления при температурах  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , а через  $\theta_0$  — температуру, соответствующую точке пересечения спрямленной харак-



теристики  $\rho = f(\theta)$  с осью (рис. 1-8), то получится пропорция

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\theta_0 - \theta_2}{\theta_0 - \theta_1}.$$

Эта пропорция служит для вычисления  $\rho_2$ , если известно  $\rho_1$ .

Значения  $\rho_1$  (при  $\theta_1 = 20^\circ\text{C}$ ) и  $\theta_0$  для некоторых проводников приведены ниже:

алюминий:  $\rho_t = 2,83 \cdot 10^{-8}$  Ом·м;  $\theta_0 = -236^\circ\text{C}$ ;

медь:  $\rho_t = 1,724 \cdot 10^{-8}$  Ом·м;  $\theta_0 = -234^\circ\text{C}$ ;

уголь:  $\rho_t = 3500$  Ом·м;  $\theta_0 = +1825^\circ\text{C}$ .

Как было пояснено выше, понятие сопротивления непосредственно связано с потерей энергии, т. е. с необратимым процессом поглощения электромагнитной энергии.

Количество теплоты, выделяемой при прохождении тока через какой-либо проводник, зависит от ряда факторов, в том числе от частоты тока. При невысоких частотах сопротивление проводника мало отличается от сопротивления при постоянном токе. С повышением же частоты

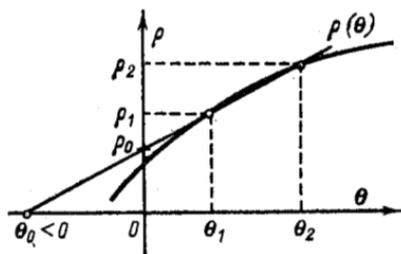


Рис. 1-8. Спрявленная характеристика  $\rho = f(\theta)$ .

ток распределяется по сечению проводника неравномерно: внутри проводника плотность тока уменьшается, ток вытесняется к поверхности проводника, что вызывает как бы уменьшение сечения проводника, а значит, увеличение сопротивления. Последнее приводит к увеличению тепловых потерь в проводнике. Это явление носит название **поверхностного эффекта** (см. ч. III).

Неравномерность распределения тока по сечению проводника и возрастание вследствие этого тепловых потерь происходят также под влиянием тока, проходящего по соседнему проводнику. Это явление носит название **эффекта близости**.

Кроме того, переменное магнитное поле наводит в окружающей проводник проводящей среде вихревые токи, что вызывает дополнительную потерю энергии на нагрев.

К этому можно еще добавить излучение в пространство электромагнитной энергии, наблюдаемое при высоких частотах и вызывающее дополнительное увеличение сопротивления.

Вследствие наличия магнитного и электрического полей проводник наряду с сопротивлением имеет некоторые индуктивность и емкость.

*Вычисление сопротивления, индуктивности и емкости проводника с учетом указанных выше факторов относится к задачам теории поля.*

Для уменьшения индуктивности и собственной емкости проволочные резисторы выполняются в виде пластинчатых или плетеных элементов. Применяются также непроволочные резисторы. Последние представляют собой фарфоровые цилиндрики, на которые нанесен слой углерода (так называемые углеродистые резисторы), или стержни из глинистого материала, смешанного с графитом (объемные карбокерамические резисторы).

Теперь представим себе простейшую индуктивную катушку в виде нескольких круговых витков проводника, по которому проходит ток.

При постоянном токе напряжение на выводах катушки определится падением напряжения на ее сопротивлении в соответствии с (1-1) и ток во всех точках будет одинаковым.

При переменном же токе изменяющееся магнитное поле будет наводить в витках э. д. с. самоиндукции. Между витками, так же как и между отдельными точками смежных витков, электрическое поле станет переменным. В связи с этим ток в различных витках будет неодинаковым, так как появится ток смещения между витками. Чем выше частота переменного тока, тем больше будут э. д. с. самоиндукции и ток смещения. При низких частотах током смещения можно пренебречь; при высоких же частотах ток смещения, обусловленный изменением напряженности электрического поля, может быть соизмерим по величине с током в витках или даже может превышать его. Таким образом, в зависимости от выбранного диапазона частот индуктивная катушка может быть представлена либо как сопротивление  $r$  (при постоянном токе — рис. 1-9, а), либо как индуктивность  $L$  с последовательно включенным сопротивлением  $r$  (при низких частотах — рис. 1-9, б), либо как индуктивность  $L$  и сопротивление  $r$ , соединенные параллельно с емкостью  $C$  (при высоких частотах — рис. 1-9, в).

Если катушка имеет много витков, то проходящий через нее ток создает магнитный поток, пропорциональный числу витков. Считая, что этот магнитный поток сцеплен со всеми витками катушки, приходим к выводу, что потокосцепление самоиндукции и соответственно индуктивность катушки пропорциональны квадрату числа витков.

Положим, например, что катушка, состоящая из  $w$  витков, насажена на тороидальный магнитопровод или достаточно длинный прямолинейный магнитопровод, длина которого  $l$  (м) и площадь поперечного сечения  $S$  (м<sup>2</sup>).

Обозначим через  $\mu_a$  абсолютную магнитную проницаемость<sup>1</sup> магнитопровода (равную произведению относи-

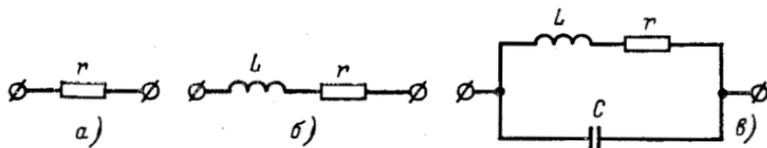


Рис. 1-9. Электрические схемы замещения индуктивной катушки.

*a* — при постоянном токе; *б* — при низких частотах; *в* — при высоких частотах.

тельной магнитной проницаемости на магнитную постоянную  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Г/м).

Магнитный поток в веберах (Вб) определяется отношением магнитодвижущей силы (м. д. с.) всей катушки  $iw$  к магнитному сопротивлению магнитопровода  $r_m \approx l/\mu_a S$ :

$$\Phi \approx \frac{iw\mu_a S}{l},$$

поэтому индуктивность катушки в генри (Г) согласно определению

$$L = \frac{w\Phi}{i} \approx \frac{w^2\mu_a S}{l}.$$

Она определяется геометрическими размерами катушки, магнитной проницаемостью материала магнитопровода и квадратом числа витков.

Перейдем теперь к рассмотрению плоского конденсатора, состоящего из двух параллельных пластин, разделенных диэлектриком. При постоянном напряжении

<sup>1</sup> Абсолютная магнитная проницаемость для изотропного вещества — скалярная величина, характеризующая магнитные свойства вещества, равная отношению модуля магнитной индукции к модулю напряженности магнитного поля (ГОСТ 19880-74).

и идеальном диэлектрике тока в цепи не будет. Если напряжение переменное, то в процессе изменения электрического заряда возникает переменный ток, создающий переменное магнитное поле. Эффект, вызываемый магнитным полем, может быть учтен в электрической схеме замещения с помощью некоторой индуктивности, включенной последовательно с емкостью конденсатора. Обычно этой индуктивностью пренебрегают из-за ее относительной малости. Наконец, в диэлектрике благодаря некоторой проводимости возникают тепловые потери, которые возрастают с частотой. Потери на нагрев учитываются в схеме замещения конденсатора посредством сопротивления  $r$ , включенного параллельно емкости  $C$  (рис. 1-10).

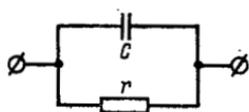


Рис. 1-10. Электрическая схема замещения конденсатора.

Емкость конденсатора определяется размерами обкладок, расстоянием между ними и диэлектрическими свойствами среды, заполняющей пространство между обкладками.

Если расстояние между обкладками конденсатора (толщина диэлектрика) достаточно мало по сравнению с их размерами, то емкость конденсатора в фарадах (Ф) вычисляется по формуле

$$C = \frac{\epsilon_n S}{d},$$

где  $\epsilon_n$  — абсолютная диэлектрическая проницаемость изоляции между пластинами<sup>1</sup> (равная произведению относительной диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  на электрическую постоянную  $\epsilon_0 = 8,556 \cdot 10^{-12}$  Ф/м);  $S$  — площадь поверхности каждой пластины, м<sup>2</sup>;  $d$  — расстояние между пластинами, м.

Чем выше частота и больше линейные размеры самих устройств, тем в большей мере проявляются взаимосвязь электрических и магнитных параметров и неотделимость друг от друга электрического и магнитного полей, являющихся лишь двумя сторонами единого электромагнитного поля.

<sup>1</sup> Абсолютная диэлектрическая проницаемость для изотропного вещества — скалярная величина, характеризующая электрические свойства диэлектрика, равная отношению электрического смещения к модулю напряженности электрического поля (ГОСТ 19880-74).

Строго разграничить области частот, при которых справедлива та или иная схема замещения, не представляется возможным, так как это зависит от множества факторов.

### 1.8. ИСТОЧНИК Э. Д. С. И ИСТОЧНИК ТОКА

В теории электрических цепей пользуются идеализированными источниками электрической энергии: источником э. д. с. и источником тока. Им приписываются следующие свойства.

Идеальный источник э. д. с. представляет собой активный элемент с двумя выводами, напряжение

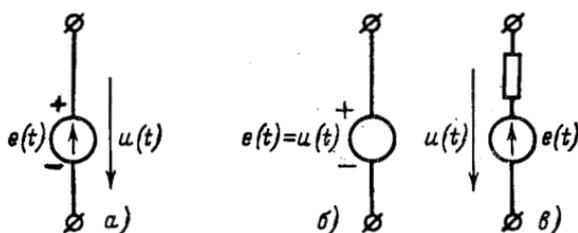


Рис. 1-11. Источники э. д. с.: идеальные (а, б) и конечной мощности (в).

на которых не зависит от тока, проходящего через источник. Предполагается, что внутри такого идеального источника пассивные элементы ( $r$ ,  $L$ ,  $C$ ) отсутствуют и поэтому прохождение через него тока не вызывает в нем падения напряжения.

Упорядоченное перемещение положительных зарядов в источнике от меньшего потенциала к большему возможно за счет присущих источнику сторонних сил. Работа, затрачиваемая сторонними силами на перемещение единицы положительного заряда от вывода «—» к выводу «+», называется электродвижущей силой (э. д. с.) источника и обозначается  $e(t)$ .

В соответствии со сказанным выше напряжение на выводах рассматриваемого источника равно его э. д. с., т. е.  $u(t) = e(t)$ .

Условные обозначения идеального источника э. д. с. приведены на рис. 1-11, а и б. Здесь стрелкой или знаками + и — указаны положительное направление э. д. с. или полярность источника, т. е. направление возрастания по-

тенциала в источнике для моментов времени, соответствующих положительной функции  $e(t)$ .

Ток в пассивной электрической цепи, подключенной к источнику э. д. с., зависит от параметров этой цепи и э. д. с.  $e(t)$ . Если выводы идеального источника э. д. с. замкнуть накоротко, то ток теоретически должен быть бесконечно велик. Поэтому такой источник рассматривается как источник бесконечной мощности (теоретическое понятие). В действительности при замыкании зажимов реального источника электрической энергии — химического источника тока, генератора и т. п. — ток может иметь только конечное значение, так как э. д. с. источника уравновешивается падением напряжения от тока внутри источника (например, в сопротивлении  $r$ , индуктивности  $L$ ).

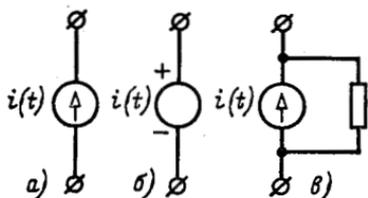


Рис. 1-12. Источники тока: идеальные (а, б) и конечной мощности (в).

Источник э. д. с. конечной мощности изображается в виде идеального источника э. д. с. с подключенным к нему последовательно пассивным элементом, который характеризует внутренние параметры источника и ограничивает

мощность, отдаваемую во внешнюю электрическую цепь (рис. 1-11, в). Обычно внутренние параметры источника конечной мощности незначительны по сравнению с параметрами внешней цепи; они могут быть отнесены к последней или в некоторых случаях могут вовсе не учитываться (в зависимости от соотношения величин и требуемой точности расчета).

Идеальный источник тока представляет собой активный элемент, ток которого не зависит от напряжения на его выводах. Предполагается, что внутреннее сопротивление такого идеального источника бесконечно велико и поэтому параметры внешней электрической цепи, от которых зависит напряжение на выводах источника, не влияют на ток источника.

Условные обозначения идеального источника тока приведены на рис. 1-12, а и б. Стрелка в источнике тока или знаки  $+$  и  $-$  указывают положительное направление тока  $i(t)$  или полярность источника, т. е. направление перемещения положительных зарядов, или, что то же, направление, противоположное направлению движения отрицатель-

ных зарядов, для тех моментов времени, когда функция  $i(t)$  положительна.

По мере неограниченного увеличения сопротивления внешней электрической цепи, присоединенной к идеальному источнику тока, напряжение на его выводах и соответственно мощность, развиваемая им, неограниченно возрастают. Поэтому идеальный источник тока, так же как и идеальный источник напряжения, рассматривается как источник бесконечной мощности.

Источник тока конечной мощности изображается в виде идеального источника тока с подключенным к его выводам пассивным элементом, который характеризует внутренние

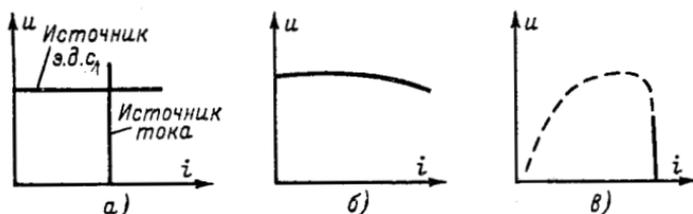


Рис. 1-13. Вольт-амперные характеристики источников э. д. с. и тока.

*a* — идеальные источники; *б* — генератор постоянного тока с независимым возбуждением; *в* — генератор постоянного тока с последовательным возбуждением.

параметры источника и ограничивает мощность, отдаваемую во внешнюю электрическую цепь (рис. 1-12, в).

Представляя собой теоретическое понятие, источник тока, как будет показано ниже (см. гл. 4 и 7), применяется в ряде случаев для расчета электрических цепей.

Некоторым подобием источника тока может служить устройство, состоящее из аккумулятора, соединенного последовательно с дополнительным большим сопротивлением. Другим примером источника тока может являться пятиэлектродная усилительная электронная лампа (пентод). Имея внутреннее сопротивление, несоизмеримо большее, чем сопротивление внешней электрической цепи, эти устройства отдают ток, почти не зависящий от изменения внешней нагрузки в широких пределах, и именно в этом отношении они аналогичны источнику тока.

Вольт-амперные характеристики идеальных источников э. д. с. и тока представляются прямыми, параллельными осям  $i$  и  $u$  (рис. 1-13, а). Реальные источники электри-

ческой энергии по своим вольт-амперным характеристикам могут приближаться к идеальным источникам напряжения или тока. Например, в значительной части характеристики  $u = f(i)$  напряжение на выводах генератора постоянного тока с независимым возбуждением<sup>1</sup>, а также ток  $i$  генератора постоянного тока с последовательным возбуждением<sup>2</sup> изменяются незначительно. На рис. 1-13, в соответствующая часть характеристики показана сплошной линией.

### 1-9. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Как уже указывалось выше, настоящая книга посвящена рассмотрению электрических цепей, в которых сопротивление, индуктивности и емкости не зависят от токов и напряжений и их направлений. Такие электрические цепи, как и сами элементы, из которых они состоят, называются *линейными*, так как напряжение и ток в каждом элементе связаны линейным уравнением — алгебраическим или дифференциальным первого порядка.

Действительно, в случае если параметр  $r$  не зависит от  $u$  и  $i$ , то закон Ома (1-1) выражает линейную зависимость между напряжением и током. Если  $L$  и  $C$  не зависят от  $u$  и  $i$ , то напряжение и ток связаны линейным дифференциальным уравнением (1-4) в случае индуктивности и уравнением (1-8) в случае емкости.

Что касается активных элементов линейных электрических цепей, то условием линейности идеального источника э. д. с. является независимость напряжения от тока, проходящего через источник, а условием линейности идеального источника тока является независимость тока от напряжения на его выводах.

Реальные электротехнические и радиотехнические устройства, строго говоря, не подчиняются линейному закону. При прохождении тока через проводник выделяется тепло, проводник нагревается и его сопротивление изменяется. С изменением тока в индуктивной катушке с магнитопроводом соотношение между потокосцеплением и током, т. е. параметр  $L$ , не остается постоянным. В зависимости от диэлектрика в большей или меньшей степени изменяется и емкость конденсатора в функции заряда

<sup>1</sup> Обмотка возбуждения питается от постоянного источника.

<sup>2</sup> Обмотка возбуждения соединена последовательно с цепью якоря.

(или приложенного напряжения). К нелинейным устройствам относятся, кроме того, электронные, ионные и полупроводниковые приборы, параметры которых зависят от тока и напряжения.

Если в рабочем диапазоне, на который рассчитывается то или иное устройство, т. е. при заданных ограниченных пределах изменений напряжения, тока и т. п., закон линейности с достаточной для практики степенью точности сохраняется, то такое устройство рассматривается как линейное.

Исследование и расчет линейных цепей сопряжены, как правило, с меньшими трудностями, чем исследование и расчет нелинейных цепей. Поэтому в тех случаях, когда линейный закон достаточно близко отражает действительность, цепь рассматривается как линейная.

#### 1-10. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СХЕМЕ

*Электрическая схема представляет собой графическое изображение электрической цепи. Она показывает, как осуществляется соединение элементов рассматриваемой электрической цепи.*

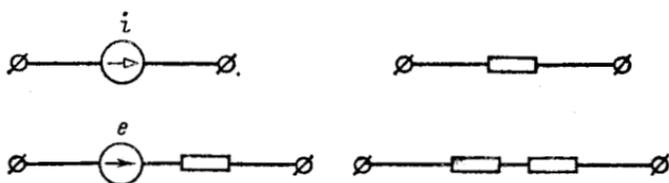


Рис. 1-14. Изображения ветвей электрической схемы.

«Электрическими» элементами схемы служат активные и пассивные элементы цепи. «Геометрическими» элементами схемы являются ветви и узлы.

Ветвь<sup>1</sup> образуется одним или несколькими последовательно соединенными элементами цепи (рис. 1-14). В общем случае, если состав ветви неизвестен, последняя изображается прямоугольником.

<sup>1</sup> Ветвь электрической цепи — участок электрической цепи, вдоль которого протекает один и тот же ток (ГОСТ 19880-74).

Узел — место соединения трех или большего числа ветвей (рис. 1-15)<sup>1</sup>. Линии, связывающие ветви в схеме, представляют соединения без сопротивлений. Поэтому, например, схемы рис. 1-15, а и б в электрическом смысле одинаковы: они содержат один узел.

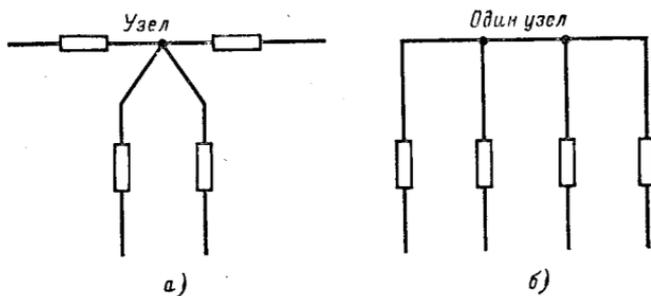


Рис. 1-15. Изображения узла электрической схемы.

Ветви, присоединенные к одной паре узлов (рис. 1-16), называются параллельными.

Рисунок 1-17 в виде примера иллюстрирует электрическую схему, содержащую пять ветвей и три узла.

Любой замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям, называется контуром. На рис. 1-17 указано

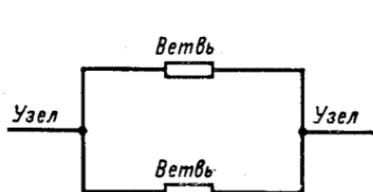


Рис. 1-16. Параллельное соединение двух ветвей.

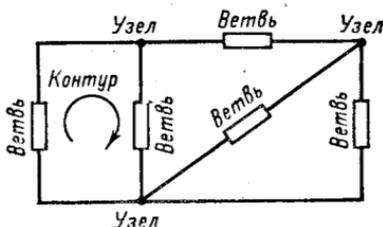


Рис. 1-17. Схема электрической цепи.

стрелкой направление обхода одного из контуров, образованных в данной электрической схеме.

В зависимости от числа контуров, имеющих в схеме, различают одноконтурные и многоконтурные схемы. Одноконтурная схема является простейшей. Пользуясь

<sup>1</sup> Место соединения двух ветвей рассматривается как «устранимый» узел.

правилами преобразования схем (см. гл. 4), в ряде случаев представляется удобным заменить многоконтурную схему одноконтурной, что упрощает расчеты.

Если ток в электрической цепи постоянен, т. е. его значение не изменяется во времени, то отсутствует явление самоиндукции: производная потокосцепления по времени равна нулю и напряжение, например, на индуктивной катушке определяется только падением напряжения от тока в сопротивлении катушки. Схема замещения индуктивной катушки для этого случая приводилась на рис. 1-9, *a*.

В свою очередь, если не учитывать проводимости диэлектрика конденсатора, т. е. рассматривать конденсатор как идеальную емкость, то ветвь с такой емкостью представится в электрической схеме цепи постоянного тока разомкнутой: постоянный ток через емкость не проходит.

Таким образом, при рассмотрении электрической цепи постоянного тока в установившемся режиме, при котором напряжения и токи в цепи являются постоянными, пассивными элементами схемы являются сопротивления, а активными — источники постоянной э. д. с. или постоянного тока.

Индуктивности и емкости учитываются в схемах цепей переменного тока и при переходных (неустановившихся) процессах, возникающих в электрических цепях при переходе от одного режима к другому (см. гл. 14).

### 1-11. ВОЛЬТ-АМПЕРНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА УЧАСТКА ЦЕПИ С ИСТОЧНИКОМ

Закон Ома может быть применен к участку цепи с источниками, и для такого участка может быть построена вольт-амперная характеристика.

На рис. 1-18, *a* показана ветвь с последовательно соединенными источником постоянной э. д. с.  $E$  и сопротивлением  $r$ . Через ветвь проходит ток  $i$ , значение которого в общем случае зависит не только от данного источника э. д. с., но и от источников остальной части электрической цепи, присоединенной к выводам 1 и 2.

При указанных на рис. 1-18, *a* направлениях э. д. с. и тока потенциал вывода 2 выше потенциала вывода 1 на э. д. с. за вычетом падения напряжения от тока  $i$  в сопротивлении  $r$ . Следовательно, напряжение на выводах

ветви равно:

$$u = u_{21} = E - ri. \quad (1-9)$$

По этому уравнению строится вольт-амперная характеристика, которая называется также внешней характеристикой (рис. 1-18, б).

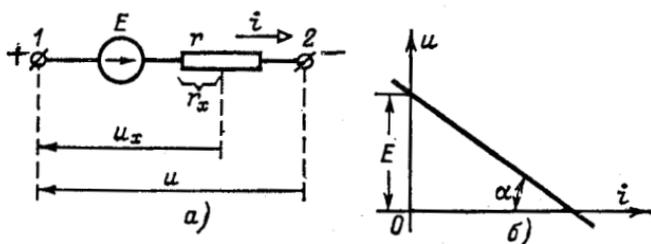


Рис. 1-18. Последовательное соединение сопротивления и источника постоянной э. д. с.

а — схема; б — вольт-амперная характеристика.

Тангенс угла  $\alpha$  пропорционален сопротивлению  $r$ .

При отрицательном знаке тока  $i$  напряжение на сопротивлении  $r$  складывается с э. д. с.  $E$  и в этом случае  $u > E$ .

На рис. 1-19, а показан участок цепи, состоящий из источника постоянного тока  $I$  с параллельным сопротивле-

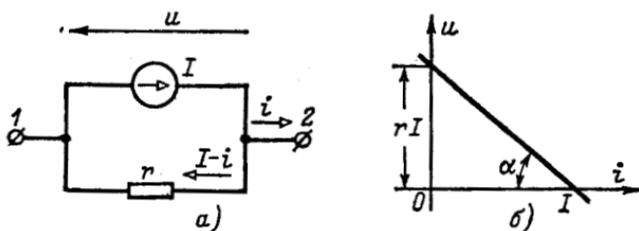


Рис. 1-19. Параллельное соединение сопротивления и источника постоянного тока.

а — схема; б — вольт-амперная характеристика.

нием  $r$ . Так же как и в предыдущем случае, значение и направление тока  $i$ , проходящего через выводы 1 и 2, зависят не только от данного источника, но и от источников остальной части цепи, присоединенной к выводам 1 и 2. При указанных на рис. 1-19, а направлениях токов через сопротивление от вывода 2 к выводу 1 проходит ток  $I - i$ ,

создающий напряжение

$$u = rI - ri.$$

По этому уравнению строится вольт-амперная характеристика (рис. 1-19, б).

Таким образом, вольт-амперные характеристики участков цепи, состоящих из линейного сопротивления, соединенного последовательно с источником э. д. с. или параллельно с источником тока, прямолинейны.

Из сопоставления вольт-амперных характеристик рис. 1-18 и 1-19 видно, что источник напряжения конечной мощности эквивалентен источнику тока конечной мощности при условии  $E = rI$  и потому они могут быть взаимно заменяемы.

В общем случае этот вопрос разобран в § 4-6.

### 1-12. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ВДОЛЬ ЦЕПИ С СОПРОТИВЛЕНИЯМИ И ИСТОЧНИКАМИ Э. Д. С.

Допустим, что на участке цепи, изображенном на рис. 1-18, а, ток  $i = I$  задан.

Обозначив  $r_x$ ,  $u_x$  часть сопротивления  $r$  и соответствующее напряжение относительно вывода  $I$ , получим по аналогии с (1-9)  $u_x = E - r_x I$ . Следовательно, зависимость  $u_x(r_x)$  представляется прямой линией (рис. 1-20), причем тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс пропорционален  $I$ :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{BC}{AB} = \frac{rI}{m_u} : \frac{r}{m_r} = I \frac{m_r}{m_u},$$

где  $m_u$  и  $m_r$  — масштабы, в которых отложены на рис. 1-20 напряжения и сопротивления.

При переходе через источник э. д. с. по направлению, совпадающему с направлением действия э. д. с., потенциал возрастает скачкообразно на  $E$ , затем при прохождении через сопротивление  $r_x$  (по направлению тока) убывает прямолинейно на падение напряжения  $r_x I$ . Если не выделять сопротивление  $r$ , а рассматривать его как сопротивление источника напряжения, равномерно распределенное

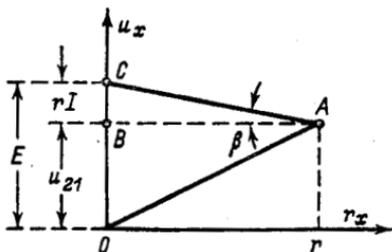


Рис. 1-20. Зависимость напряжения от сопротивления (при заданном токе).



внутри самого источника, то график изменения потенциала внутри источника представится в виде прямой  $OA$  (рис. 1-20).

Теперь рассмотрим какую-нибудь неразветвленную электрическую цепь постоянного тока, содержащую сопротивления и источники э. д. с. (рис. 1-21, а), и построим для нее график изменения потенциала. Приравняем нулю потенциал одной точки этого контура. Начав обход контура с этой точки, придем к исходному потенциалу. Примерный график распределения потенциала в этом случае показан на рис. 1-21, б. Следует обратить внимание на то, что при переходе через источник э. д. с. в направлении, противоположном э. д. с., потенциал снижается на эту э. д. с.

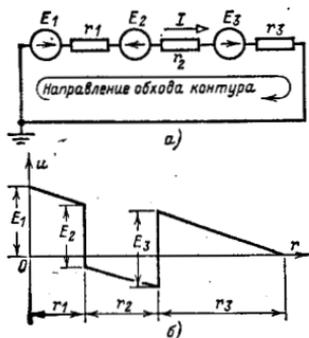


Рис. 1-21. Распределение потенциала вдоль цепи постоянного тока.

а — схема; б — график потенциала.

На графике наклон прямых линий одинаков, так как ток во всех сопротивлениях один и тот же (одноконтурная цепь). В случае разветвленной цепи, где токи в ветвях различны, наклон прямых линий графика потенциала неодинаков.

### 1-13. ЗАКОНЫ КИРХГОФА

Основными законами теории цепей наряду с законом Ома являются законы баланса токов в разветвлениях (первый закон Кирхгофа) и баланса напряжений на замкнутых участках цепи (второй закон Кирхгофа).

Распределение токов и напряжений в электрических цепях подчиняется законам Кирхгофа, которые должны быть основательно усвоены для отчетливого понимания материала всех последующих разделов курса.

#### Первый закон Кирхгофа

*Алгебраическая сумма токов в узле равна нулю:*

$$\sum i = 0. \quad (1-10)$$

Суммирование распространяется на токи  $i$  в ветвях, сходящихся в рассматриваемом узле. При этом знаки токов берутся с учетом выбранных положительных на-

правлений токов: всем токам, направленным к узлу, в уравнении (1-10) присписывается одинаковый знак, например положительный, и соответственно все токи, направленные от узла, входят в уравнение (1-10) с противоположным знаком. Иначе говоря, всякий ток, направленный от узла, может рассматриваться как ток, направленный к узлу, но имеющий противоположный знак.

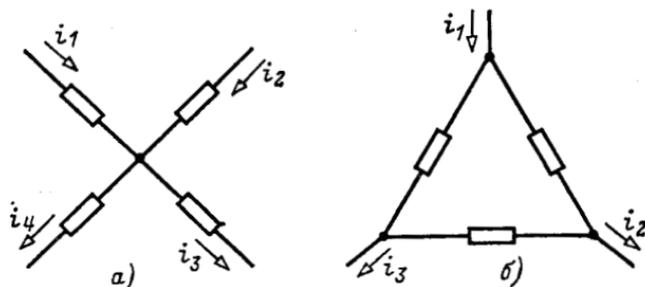


Рис. 1-22. Иллюстрация к первому закону Кирхгофа.

На рис. 1-22, а в качестве примера показан узел, в котором сходятся четыре ветви. Уравнение (1-10) имеет в этом случае вид:

$$i_1 + i_2 - i_3 - i_4 = 0.$$

Первый закон Кирхгофа выражает тот факт, что в узле электрический заряд не накапливается и не расходуется. Сумма электрических зарядов, приходящих к узлу, равна сумме зарядов, уходящих от узла за один и тот же промежуток времени.

Первый закон Кирхгофа применим не только к узлу, но и к любому контуру или замкнутой поверхности, охватывающей часть электрической цепи, так как ни в каком элементе цепи, ни в каком режиме электричество одного знака не может накапливаться.

Так, например, для схемы рис. 1-22, б имеем:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0.$$

## Второй закон Кирхгофа

*Алгебраическая сумма э. д. с. в любом контуре цепи равна алгебраической сумме падений напряжения на элементах этого контура:*

$$\sum e = \sum u. \quad (1-11)$$

Обход контура совершается в произвольно выбранном направлении, например по ходу часовой стрелки. При этом соблюдается следующее правило знаков для э. д. с. и падений напряжения входящих в (1-11): э. д. с.

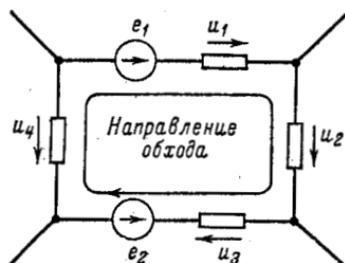


Рис. 1-23. Иллюстрация ко второму закону Кирхгофа.

и падения напряжения, совпадающие по направлению с направлением обхода, берутся с одинаковыми знаками.

Например, для схемы рис. 1-23 имеем:

$$e_1 - e_2 = u_1 + u_2 + u_3 - u_4.$$

Уравнение (1-11) можно переписать так:

$$\sum (u - e) = 0. \quad (1-12)$$

Здесь  $(u - e)$  — напряжение на ветви. Следовательно, алгебраическая сумма напряжений на ветвях в любом замкнутом контуре равна нулю.

Формулы (1-10) и (1-11) написаны в общем виде для мгновенных значений токов, напряжений и э. д. с.; они справедливы для цепей как переменного, так и постоянного тока.

График изменения потенциала, рассмотренный в предыдущем параграфе, служит графической иллюстрацией второго закона Кирхгофа.

#### 1-14. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1-1. Определить сопротивление медного провода при  $10^\circ \text{C}$ , если при  $60^\circ \text{C}$  оно равно 5 Ом.

О т в е т: 4,15 Ом.

1-2. Показать, что величины  $rC$ ,  $L/r$  и  $\sqrt{LC}$  имеют размерность времени.

1-3. Показать, что  $r^2C$  имеет размерность индуктивности,  $\sqrt{L/C}$  — размерность сопротивления;  $L/r^2$  — размерность емкости.

1-4. Ток  $i = e^{-at}$  проходит через ветвь, состоящую из последовательно соединенных сопротивления  $r$  и индуктивности  $L$ .

Определить напряжения на сопротивлении, индуктивности и на всей ветви, приняв  $a = r/L$ ; объяснить физически полученный результат.

1-5. Начиная с момента  $t = 0$  через сопротивление 1 Ом проходит ток  $i = 1 - e^{-t}$  А. Какая энергия выделится в виде тепла к моменту времени, когда ток достигнет значения 0,632 А?

О т в е т: 0,168 Дж.

1-6. Начиная с момента  $t = 0$  через индуктивность  $L = 1$  Г проходит ток  $i = 1 - e^{-t}$  А. Определить напряжение на индуктивности и энергию магнитного поля в момент времени, когда ток достигнет значения 0,632 А.

Ответ: 0,37 В; 0,2 Дж.

1-7. Емкость  $C = 1$  Ф, имеющая электрический заряд  $q = 1$  Кл, в момент  $t = 0$  начинает разряжаться через сопротивление  $r = 1$  Ом. Ток изменяется по закону  $i = e^{-t}$  [А]. Определить напряжение на емкости и энергию электрического поля в момент, когда ток достигнет значения 0,37 А.

Ответ: 0,37 В; 0,068 Дж.

1-8. Сохранив условия предыдущей задачи, определить, какое количество энергии выделится в виде тепла к моменту времени, когда ток достигнет значения 0,37 А.

Ответ: 0,432 Дж.

1-9. Сохранив условия задачи 1-7, убедиться в том, что энергия, выделенная в виде тепла за бесконечно большое время, равна энергии электрического поля до начала разряда. Определить эту энергию.

Ответ: 0,5 Дж.

1-10. Плоский конденсатор состоит из двух листов фольги, каждый площадью 40 см<sup>2</sup>, разделенных парафинированной бумагой толщиной 0,05 мм. Вычислить емкость конденсатора, приняв диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$  парафинированной бумаги равной 1,8.

Ответ:  $1,275 \cdot 10^{-3}$  мкФ.

1-11. Плоский конденсатор, диэлектриком которого служит слюда толщиной 3 мм, имеет емкость  $C = 0,0443 \cdot 10^{-3}$  мкФ. Площадь каждой пластины конденсатора равна 25 см<sup>2</sup>. Чему равна диэлектрическая проницаемость слюды?

Ответ: 6.

1-12. Вычислить приближенно индуктивность катушки без магнитопровода, имеющей 300 витков, длину 10 см и сечение 1 см<sup>2</sup>.

Ответ: 0,113 мГ.

1-13. Торoidalная катушка состоит из  $\omega$  витков, навитых на магнитопровод, поперечное сечение которого — прямоугольник:  $d_1$  и  $d_2$  — внутренний и внешний диаметры тороида;  $h$  — толщина тороида. Доказать, что индуктивность катушки равна:

$$L = \frac{\mu_0 \omega^2 h}{2\pi} \ln \frac{d_2}{d_1}.$$

У к а з а н и е: Следует составить выражение для кольцевого магнитного потока бесконечно малого сечения и провести интегрирование по сечению тороида.

1-14. В цепи, изображенной на рис. 1-18, а, при токе  $i = 2$  А напряжение  $u = 10$  В, а при  $i = 1$  А и  $u = 12$  В. Определить э. д. с.  $E$  и сопротивление  $r$ .

Ответ: 14 А; 2 Ом.

1-15. Определить ток  $I$  источника тока и сопротивление  $r$  в схеме рис. 1-19, а, если ток  $i$  и напряжение  $u$  изменяются так же, как и в предыдущей задаче.

Ответ: 7 А; 2 Ом.

1-16. В цепи, изображенной на рис. 1-21, а,  $E_1 = 10,5$  В;  $E_3 = 19,5$  В;  $r_1 = 2$  Ом;  $r_2 = 3$  Ом;  $r_3 = 5$  Ом. Найти э. д. с.  $E_2$ , при которой потенциал точки между сопротивлением  $r_1$  и источником э. д. с.



$E_2$  равен и противоположен по знаку потенциалу точки между сопротивлением  $r_2$  и источником э. д. с.  $E_2$ .

Ответ: 15 В.

1-17. Сохранив условия предыдущей задачи, найти э. д. с.  $E_2$ , при которой точка с нулевым потенциалом будет находиться посредине сопротивления  $r_2$ .

Ответ: 0.

1-18. В цепи, изображенной на рис. 1-21, а,  $E_1 = 17$  В,  $E_2 = 10$  В,  $E_3 = 13$  В,  $r_1 = 6$  Ом,  $r_3 = 1$  Ом. Определить сопротивление  $r_2$ , при котором потенциал точки между сопротивлением  $r_1$  и источником э. д. с.  $E_2$  равен и противоположен по знаку потенциалу точки между сопротивлением  $r_2$  и источником э. д. с.  $E_2$ .

Ответ: 3 Ом.

1-19. Сохранив условия предыдущей задачи, определить сопротивление  $r_2$ , если известно, что точка с нулевым потенциалом находится внутри сопротивления  $r_2$ , причем одна четвертая часть  $r_2$  находится левее этой точки.

Ответ: 35,5 Ом.

1-20. Что такое положительное направление тока?

1-21. Зависит ли выбор положительного направления напряжения от положительного направления тока?

1-22. Что понимается под полярностью источника э. д. с. и источника тока?

1-23. Почему результат расчета электрической цепи не зависит от выбора положительных направлений токов?

1-24. Как выбрано положительное направление э. д. с. самоиндукции в формулах (1-2) и (1-3)? Пояснить связь с законом Ленца.

1-25. Пояснить процесс прохождения переменного тока через конденсатор.

1-26. Исходя из выражений энергии, показать, что сопротивление, индуктивность и емкость всегда положительны.

---

## ГЛАВА ВТОРАЯ

### ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ ОДНОФАЗНОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

#### 2-1. СИНУСОИДАЛЬНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

Электромагнитный процесс в электрической цепи, при котором мгновенные значения напряжений и токов повторяются через равные промежутки времени, называется периодическим. Наименьшее время, по истечении которого мгновенные значения периодической величины повторяются, называется периодом. Если величину, являющуюся периодической функцией времени  $t$ , обозначить через  $F(t)$ , то для любого положительного



или отрицательного значения аргумента  $t$  справедливо равенство

$$F(t \pm T) = F(t),$$

где  $T$  — период.

Геометрически это значит, что ординаты двух произвольных точек графика  $F(t)$  с абсциссами, различающимися на  $T$ , одинаковы.

Величина, обратная периоду, т. е. число периодов в единицу времени, называется **частотой**:

$$f = \frac{1}{T}.$$

Единицей измерения частоты служит герц (Гц); частота равна 1 Гц, если период равен 1 с.

Преобладающим видом периодического процесса в электрических цепях является **синусоидальный режим**, характеризующийся тем, что все напряжения и токи являются синусоидальными функциями одинаковой частоты. Это возможно только при заданных синусоидальных э. д. с. и токах источников. Тем самым обеспечивается наиболее выгодный эксплуатационный режим работы электрических установок.

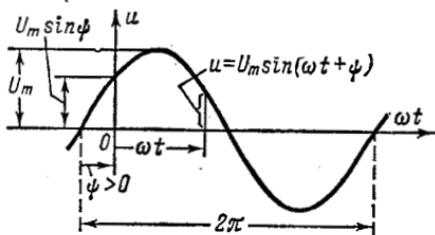


Рис. 2-1. Синусоидальная функция.

Как известно из курса математического анализа, синусоида является простейшей периодической функцией; всякие другие несинусоидальные периодические функции могут быть разложены в бесконечный ряд синусоид, имеющих кратные частоты (см. гл. 13). Поэтому для исследования процессов в цепях переменного тока в первую очередь необходимо изучить особенности цепей синусоидального тока.

На рис. 2-1 изображена синусоидальная функция

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi); \quad (2-1)$$

здесь  $U_m$  — максимальное значение, или амплитуда;  $\omega$  — скорость изменения аргумента (угла), называемая **угловой частотой**; она равна произведению частоты на  $2\pi$  и измеряется в радианах в секунду (рад/с),

$$\omega = 2\pi f; \quad (2-2)$$

$\psi$  — начальная фаза, определяемая смещением синусоиды относительно начала координат; она измеряется абсциссой точки перехода отрицательной полуволны в положительную.

Начальная фаза  $\psi$  представляет собой алгебраическую величину. Угол  $\psi$  положителен и отсчитывается вправо, к точке  $t = 0$ , когда синусоидальная функция смещена влево относительно начала координат (рис. 2-1).

Косинусоида может рассматриваться как синусоида с начальной фазой  $\psi = \pi/2$ . Если функция задана в косинусоидальной форме  $u = U_m \cos(\omega t \mp \psi_1)$ , то она может быть приведена к виду (2-1) путем замены  $\psi_1 = \psi - \pi/2$ . Поэтому к синусоидальным функциям (2-1) в общем случае причисляются и косинусоидальные функции.

За аргумент функции (2-1) может быть принято время  $t$  или соответственно угол  $\omega t$ . Аргументу  $t$  соответствует период  $T$ , а аргументу  $\omega t$  — период  $\omega T = 2\pi$ . Следует иметь в виду, что аргумент  $\omega t$  выражается в радианах, причем в тех же единицах выражается и начальная фаза.

Если угол  $\psi$  вычисляется в градусах, то аргумент  $\omega t$  также переводится в градусы<sup>1</sup>; в этом случае период составляет  $360^\circ$ .

Величина  $\omega t + \psi$ , определяющая стадию изменения синусоидальной величины (2-1), называется фазовым углом или фазой. С течением времени фаза возрастает, причем после увеличения фазы на  $2\pi$  цикл изменения синусоидальной величины повторяется.

Рассмотренные в данном параграфе понятия, характеризующие синусоидальные электрические величины, являются исходными при изучении электрических процессов в цепях переменного тока.

## 2-2. ГЕНЕРИРОВАНИЕ СИНУСОИДАЛЬНОЙ Э. Д. С.

Наиболее распространенным в промышленности способом получения синусоидального тока является применение электромагнитных машин, так называемых синхронных генераторов, приводимых во вращение тепловыми, газовыми, гидравлическими или другими двигателями.

Генератор переменного тока состоит из двух частей — неподвижного статора и вращающегося ротора.

<sup>1</sup> Напомним, что  $1 \text{ рад} = 57,3^\circ$ .



На одном из них (чаще на роторе) располагаются полюсы, т. е. электромагниты, обмотка которых питается от источника постоянного напряжения, или постоянные магниты. На другом (обычно на статоре) располагается главная обмотка, в которой наводится переменная э. д. с.

Генератор может иметь одну или несколько пар полюсов. На рис. 2-2, а упрощенно показан явнополюсный генератор с двумя парами полюсов, размещенных на роторе. Указанному на рис. 2-2, а положению ротора относительно статора соответствует на рис. 2-2, б развернутая на плоскость схема расположения обмотки и полюсов.

В каждом проводе обмотки, находящемся в пазу статора, при вращении ротора наводится по закону Фарадея

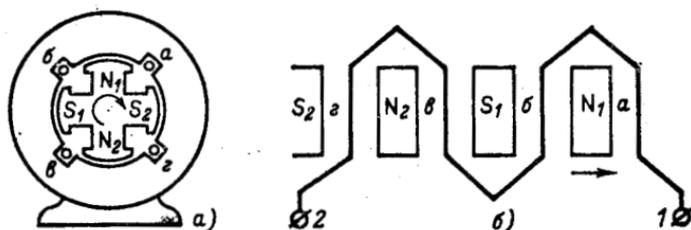


Рис. 2-2. Принцип устройства синхронного генератора.

э. д. с.  $e = Blv$ , где  $B$  — магнитная индукция поля под проводом;  $l$  — длина провода;  $v$  — линейная скорость перемещения магнитного поля. В Международной системе  $B$  измеряется в теслах (Т), т. е. Вб/м<sup>2</sup>.

При постоянных значениях  $l$  и  $v$  закон изменения э. д. с.  $e(t)$  определяется законом распределения магнитной индукции  $B$  в воздушном зазоре машины. Благодаря специальной форме полюсных наконечников распределение магнитной индукции делается приблизительно синусоидальным вдоль всей окружности зазора между ротором и статором; магнитная индукция максимальна против середин и постепенно убывает к краям полюсных наконечников.

В момент времени, которому соответствует указанное на рис. 2-2 положение ротора, магнитная индукция под проводом равна нулю и поэтому э. д. с.  $e$  также равна нулю.

После поворота ротора на одну восьмую часть полного оборота (половина полюсного шага) э. д. с. достигнет максимума и будет направлена от вывода 1 к выводу 2 (по пра-

вилу правой руки) <sup>1</sup>. Когда ротор повернется еще на половину полюсного шага, э. д. с. вновь обратится в нуль. При последующем вращении ротора еще на одну восьмую часть оборота э. д. с. достигнет максимума, но будет противоположно направлена — от вывода 2 к выводу 1 и т. д. Таким образом, на выводах генератора возникнет практически синусоидальная э. д. с.

При числе пар полюсов  $p$  и числе оборотов ротора в минуту  $n$  частота наводимой переменной э. д. с. в герцах равна:

$$f = pn/60. \quad (2-3)$$

В энергосистемах СССР и большинства других стран частота промышленного тока равна 50 Гц. В США принята частота 60 Гц.

В авиации с целью уменьшения массы оборудования применяются машины с повышенной частотой вращения. Частота  $f$  при этом получается повышенной (400 Гц). Например, генератор, имеющий  $p = 2$  и  $n = 12\,000$  об/мин, генерирует синусоидальную э. д. с. с частотой

$$f = \frac{2 \cdot 12\,000}{60} = 400 \text{ Гц.}$$

При большой окружной скорости ( $v > 50$  м/с) крепление полюсов затруднено и для обеспечения механической прочности применяются неявнополюсные машины, у которых обмотка возбуждения укладывается в пазы цилиндрического ротора неравномерно, так чтобы форма поля была по возможности синусоидальной.

Проводная связь использует частоты порядка  $10^4$ — $10^6$  Гц, а радиотехника — еще более высокие частоты. Генерирование токов высокой частоты осуществляется с помощью электронных или полупроводниковых устройств.

На рис. 2-3 в виде примера показана одна из схем электронного генератора высокой частоты. Анод трехэлектродной лампы (триода) присоединен через контур  $LC$  к положительному полюсу источника постоянного напряжения, например аккумуляторной батареи. В конту-

---

<sup>1</sup> Это правило заключается в следующем: если вектор магнитной индукции входит в ладонь, а отогнутый большой палец показывает направление движения проводника относительно поля, то остальные четыре пальца указывают направление наводимой э. д. с.

Аналогично по правилу левой руки большой палец указывает направление силы, действующей на проводник с током.

ре  $LC$ , называемом резонансным, возникают незатухающие синусоидальные колебания тока, частота которых зависит от выбора параметров  $L$  и  $C$ . Электрическая энергия, необходимая для поддержания этих колебаний, поступает от аккумуляторной батареи.

Работа электронных генераторов здесь не рассматривается. Процессам, происходящим в резонансных цепях, посвящена гл. 5. Принцип действия электронных генераторов разобран во второй части курса. Приведенная выше схема электронного генератора предназначена для получения синусоидальных колебаний высокой частоты.

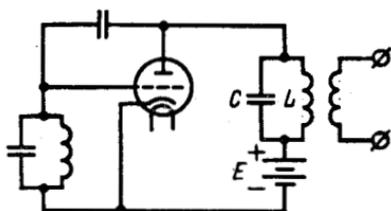


Рис. 2-3. Упрощенная схема электронного генератора,

Начало практического внедрения переменного тока относится ко второй половине XIX в., когда выдающийся русский электротехник Павел Николаевич Яблочков (1847—1894) стал применять на практике изобретенные им электрические свечи.

### 2-3. СРЕДНЕЕ И ДЕЙСТВУЮЩЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

Среднее значение периодической функции  $f(t)$  за период  $T$  определяется по формуле

$$F_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (2-4)$$

Отсюда видно, что среднее значение за период равно высоте прямоугольника с основанием  $T$ , площадь которого равна площади, ограниченной функцией  $f(t)$  и осью абсцисс за один период.

В случае синусоидальной функции среднее значение за период равно нулю, так как площадь положительной полуволны компенсируется площадью отрицательной полуволны синусоиды. Поэтому здесь пользуются понятием среднего значения функции, взятой по абсолютному значению или, что то же, среднего полупериодного значения, соответствующего положительной полуволне синусоиды (рис. 2-4).

В соответствии с этим среднее значение синусоидального тока с амплитудой  $A = I_m$  будет:

$$I_{\text{cp}} = \frac{2I_m}{T} \int_0^{T/2} \sin \omega t dt = \frac{2I_m}{\omega T} \left| -\cos \omega t \right|_0^{T/2} = \frac{2}{\pi} I_m \approx 0,637 I_m. \quad (2-5)$$

Аналогично среднее значение синусоидального напряжения

$$U_{\text{cp}} = \frac{2}{\pi} U_m \approx 0,637 U_m. \quad (2-6)$$

Измерительные приборы магнитоэлектрической системы реагируют на средние значения за период. Для измерения среднего полупериодного значения, соответствующего положительной полувольтне, синусоидальный ток предварительно пропускается через выпрямительное устройство.

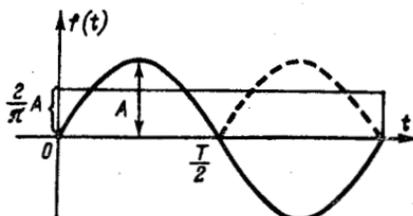


Рис. 2-4. Среднее полупериодное значение синусоидальной функции.

Тепловое действие тока, а также механическая сила взаимодействия двух проводников, по которым проходит один и тот же ток, пропорциональны квадрату тока. Поэтому о величине тока судят обычно по так называемому действующему (среднеквадратичному) значению за период.

Действующее значение периодической функции  $f(t)$  вычисляется по формуле

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt}. \quad (2-7)$$

Из этой формулы следует, что величина  $F^2$  представляет собой среднее значение функции  $[f(t)]^2$  за период  $T$ , т. е. равна высоте прямоугольника с основанием  $T$ , площадь которого равна площади, ограниченной функцией  $[f(t)]^2$  и осью абсцисс за один период (рис. 2-5).

<sup>1</sup> Этим термином заменен применявшийся ранее в литературе и ныне не рекомендуемый термин «эффективное» значение.

В соответствии с (2-7) действующий периодический ток

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (2-8)$$

Возведя (2-8) в квадрат и умножив обе части полученного выражения на  $rT$ , найдем:

$$rI^2T = \int_0^T ri^2 dt.$$

Это равенство показывает, что действующий периодический ток равен такому постоянному току, который, проходя через неизменное сопротивление  $r$ , за период времени  $T$  выделяет то же количество тепла, что и данный ток  $i$ .

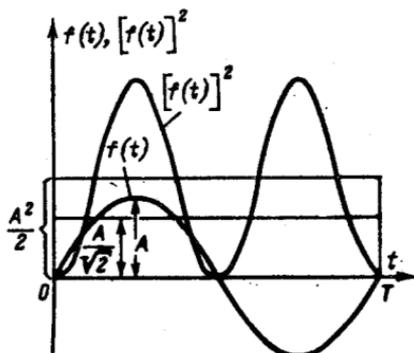


Рис. 2-5. Действующее значение синусоидальной функции.

Аналогично действующее периодическое напряжение

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}. \quad (2-9)$$

При синусоидальном токе

$$\begin{aligned} \int_0^T i^2 dt &= \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt = \\ &= \frac{I_m^2}{2} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) dt = \frac{I_m^2}{2} T. \end{aligned}$$

Следовательно, согласно (2-8)

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 I_m. \quad (2-8a)$$

Аналогично действующее синусоидальное напряжение

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 U_m. \quad (2-9a)$$

Номинальные токи и напряжения электротехнических устройств определяются, как правило, действующими зна-



чениями; поэтому действующие значения представляют наиболее распространенный электрический параметр.

Для измерения действующих значений применяются системы приборов тепловая, электромагнитная, электродинамическая и др.

#### 2.4. СИНУСОИДАЛЬНЫЙ ТОК В СОПРОТИВЛЕНИИ

Если синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$  подвести к сопротивлению  $r$  (рис. 2-6, а), то через сопротивление пройдет синусоидальный ток

$$i = \frac{U_m}{r} \sin(\omega t + \psi) = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Следовательно, напряжение на выводах сопротивления и ток, проходящий через это сопротивление, имеют одинаковую начальную фазу, или, как говорят, совпадают по фазе: они одновременно достигают своих амплитудных значений  $U_m$  и  $I_m$  и соответственно одновременно проходят через нуль (рис. 2-6, б).

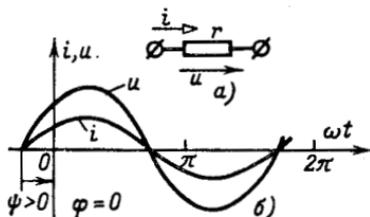


Рис. 2-6. Синусоидальный ток в сопротивлении.

В данном случае фазовый сдвиг между напряжением  $u$  и током  $i$  равен нулю:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 0.$$

При прохождении синусоидального тока через сопротивление  $r$  не только мгновенные напряжения на сопротивлении и тока в нем, но и амплитуды и соответственно действующие напряжение и ток связаны законом Ома:

$$U_m = rI_m; \quad U = rI.$$

Пользуясь величиной проводимости  $g = 1/r$ , получаем:

$$I_m = gU_m; \quad I = gU.$$

Мгновенная мощность, поступающая в сопротивление:

$$p_r = ui = U_m I_m \sin^2(\omega t + \psi) = UI [1 - \cos 2(\omega t + \psi)], \quad (2-10)$$

изменяется с угловой частотой, удвоенной по сравнению с частотой напряжения и тока, и колеблется в пределах от 0 до  $2UI$  (рис. 2-7).

Как видно из (2-10), кривая  $p_r$  состоит из двух слагающих: постоянной слагающей  $UI$  и косинусоидальной функции, имеющей амплитуду  $UI$  и угловую частоту  $2\omega$ .

Ввиду того что в рассматриваемом случае напряжение и ток совпадают по фазе, т. е. всегда имеют одинаковый знак (плюс или минус), их произведение всегда положительно.

Среднее значение мощности за период  $P =$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T p_r dt \text{ называется ак-$$

тивной мощностью и измеряется в ваттах.

В рассматриваемом случае, как это видно из выражения (2-10) и рис. 2-7, активная мощность  $P = UI = rI^2$ . Это следует также из определений, данных в предыдущем параграфе.

Сопротивление  $r$  в свою очередь может быть определено как отношение активной мощности к квадрату действующего значения тока:  $r = P/I^2$ .

В § 1-7 отмечалось, что сопротивление проводника при переменном токе больше, чем при постоянном токе, вследствие явлений поверхностного эффекта, возникновения вихревых токов и излучения электромагнитной энергии в пространство (при высоких частотах). В отличие от сопротивления при постоянном токе сопротивление проводника при переменном токе называется активным сопротивлением.

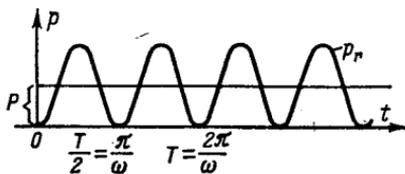


Рис. 2-7. Мгновенная мощность, поступающая в сопротивление ( $\psi = 0$ ).

## 2-5. СИНУСОИДАЛЬНЫЙ ТОК В ИНДУКТИВНОСТИ

Пусть через индуктивность  $L$  (рис. 2-8, а) проходит ток

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Электродвижущая сила самоиндукции определяется по формуле (1-3):

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -\omega LI_m \cos(\omega t + \psi) = -U_m \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Значит, напряжение на индуктивности

$$u_L = -e_L = U_m \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Полученное выражение показывает, что напряжение на индуктивности опережает ток на угол  $\pi/2$ : максимум напряжения смещен влево относительно максимума тока на  $\pi/2$  (рис. 2-8, б), когда ток проходит через нуль, напряжение достигает положительного или отрицательного максимума, так как оно пропорционально скорости изменения тока ( $di/dt$ ), которая в момент прохождения тока через нуль максимальна (синусоида тока в этот момент имеет наибольшую крутизну). Когда ток достигает максимума, скорость его изменения, а следовательно, и напряжение на индуктивности обращаются в нуль.

Под фазовым сдвигом  $\varphi$  тока относительно напряжения понимается разность начальных фаз напряжения и тока (см. § 2-4). Следовательно, в данном случае

Под фазовым сдвигом  $\varphi$  тока относительно напряжения понимается разность начальных фаз напряжения и тока (см. § 2-4). Следовательно, в данном случае

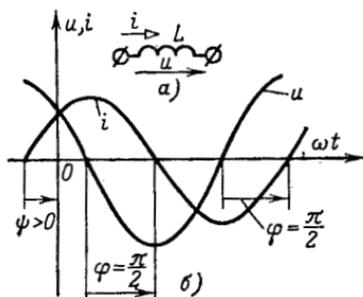


Рис. 2-8. Синусоидальный ток в индуктивности.

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \frac{\pi}{2}.$$

Амплитуды, так же как и действующие значения напряжения и тока, связаны соотношением, подобным закону Ома:

$$U_m = \omega L I_m = x_L I_m; \quad U = x_L I.$$

Величина  $x_L = \omega L$ , имеющая размерность сопротивления, называется индуктивным сопротивлением; обратная ей величина  $b_L = 1/\omega L$  называется индуктивной проводимостью.

Итак,

$$I_m = b_L U_m; \quad I = b_L U.$$

Индуктивное сопротивление представляет собой расчетную величину, с помощью которой учитывается явление самоиндукции.

Мгновенная мощность, поступающая в индуктивность, будет:

$$\begin{aligned} p_L &= ui = U_m I_m \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right) \sin(\omega t + \psi) = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} 2 \cos(\omega t + \psi) \sin(\omega t + \psi) = UI \sin 2(\omega t + \psi). \end{aligned}$$

Она колеблется по синусоидальному закону с угловой частотой  $2\omega$ , имея амплитуду  $UI$ . Мгновенная мощность в данном случае равна скорости изменения энергии магнитного поля индуктивности (см. § 1-3).

Энергия магнитного поля индуктивности

$$w_L = \frac{Li^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2(\omega t + \psi) = \frac{LI_m^2}{2} [1 - \cos 2(\omega t + \psi)]$$

изменяется периодически с угловой частотой  $2\omega$  в пределах от 0 до  $\frac{LI_m^2}{2}$  (рис. 2-9).

Поступая от источника, энергия временно запасается в магнитном поле индуктивности, затем возвращается в источник при исчезновении магнитного поля. Энергия магнитного поля достигает максимума в момент перехода тока в индуктивности через амплитудное значение, затем она убывает и обращается в нуль при токе, равном нулю.

Таким образом, происходит колебание энергии между источником и индуктивностью, причем активная мощность, поступающая в индуктивность, равна нулю.

Так как максимальная энергия, запасаемая в магнитном поле, равна  $W_{L\text{макс}} = LI_m^2$ , то индуктивное сопротивление  $x_L = \omega L$  может быть определено как

$$x_L = \frac{\omega W_{L\text{макс}}}{I_m^2}.$$

## 2-6. СИНУСОИДАЛЬНЫЙ ТОК В ЕМКОСТИ

Пусть напряжение на емкости  $C$  (рис. 2-10, а) синусоидально:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi).$$

На основании (1-8)

$$i = C \frac{du}{dt} = \omega C U_m \cos(\omega t + \psi) = I_m \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (2-11)$$

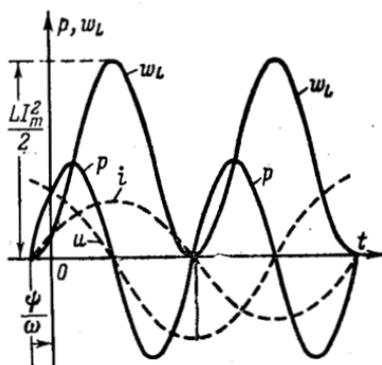


Рис. 2-9. Мгновенная мощность, поступающая в индуктивность, и энергия магнитного поля.



Изменение электрического заряда происходит по синусоидальному закону в соответствии с приложенным напряжением  $u$ . При этом попеременное накопление положительных и отрицательных электрических зарядов на пластинах емкости обуславливает прохождение в цепи синусоидального тока  $i$ . Он определяется скоростью изменения заряда на емкости ( $dq/dt$ ).

Выражение (2-11) показывает, что ток  $i$  опережает приложенное напряжение  $u$  на угол  $\pi/2$  (рис. 2-10, б). Нулевым значениям тока соответствуют максимальные (положительные или отрицательные) значения напряжения  $u$ . Физически это объясняется тем, что когда электрический заряд  $q$  и соответственно напряжение  $u = q/C$  достигают максимального значения (положительного или отрицательного), ток  $i$  равен нулю.

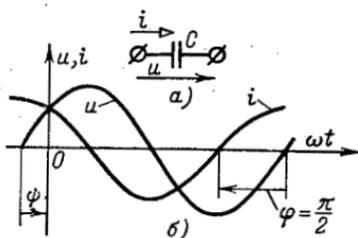


Рис. 2-10. Синусоидальный ток в емкости.

Под фазовым сдвигом тока относительно напряжения здесь, как и раньше, подразумевается разность начальных фаз напряжения и тока, т. е.  $\varphi = \psi_u - \psi_i = -\pi/2$ .

Таким образом, в отличие от цепи с индуктивностью, где  $\varphi = +\pi/2$ , фазовый сдвиг тока относительно напряжения в случае емкости отрицателен ( $\varphi = -\pi/2$ ).

Амплитуды и соответственно действующие напряжение и ток связаны соотношением, подобным закону Ома<sup>1</sup>:

$$U_m = \frac{1}{\omega C} I_m = x_C I_m; \quad U = x_C I.$$

Величина  $x_C = 1/\omega C$ , имеющая размерность сопротивления, называется емкостным сопротивлением. Обратная ей величина  $b_C = \omega C$  называется емкостной проводимостью. Следовательно,

$$I_m = b_C U_m; \quad I = b_C U.$$

<sup>1</sup> Следует заметить, что только в случае сопротивления  $r$  закон Ома применим к мгновенным значениям напряжения и тока; в остальных случаях отношение мгновенных величин  $u$  и  $i$ , имеющее размерность сопротивления, представляет собой некоторую функцию времени, не имеющую физического смысла и практического применения.

Мгновенная мощность, поступающая в емкость,

$$p_c = ui = U_m I_m \sin(\omega t + \psi) \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right) = \\ = UI \sin 2(\omega t + \psi)$$

колеблется синусоидально с угловой частотой  $2\omega$ , имея амплитуду, равную  $UI$ ; выражение  $p_c$  в рассматриваемом случае аналогично выражению для  $p_L$  в § 2-5.

Мгновенная мощность, поступающая в емкость, равна скорости изменения энергии электрического поля емкости.

Энергия электрического поля емкости

$$w_c = \frac{Cu^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2} \sin^2(\omega t + \psi) = \frac{CU^2}{2} [1 - \cos 2(\omega t + \psi)]$$

изменяется периодически с угловой частотой  $2\omega$  в пределах от 0 до  $\frac{CU_m^2}{2}$  (рис. 2-11).

Поступая от источника, энергия временно запасается в электрическом поле емкости, а затем возвращается в источник при исчезновении электрического поля. Энергия электрического поля достигает максимума при амплитудном значении напряжения на емкости. Затем она убывает и обращается в нуль при напряжении, равном нулю.

Таким образом, так же как в случае индуктивности, происходит колебание энергии между источником и емкостью, причем активная мощность  $P = 0$ .

Так как максимальная энергия, запасаемая в электрическом поле, равна  $W_{C_{\max}} = CU^2$ , то емкостное сопротивление  $x_C = U/I = 1/\omega C$  может быть определено как

$$x_C = \frac{\omega W_{C_{\max}}}{I^2}.$$

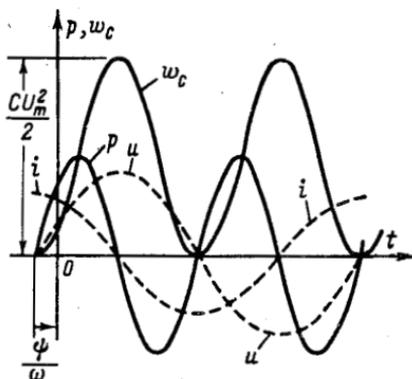


Рис. 2-11. Мгновенная мощность, поступающая в емкость, и энергия электрического поля.

## 2-7. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ

При прохождении синусоидального тока  $i = I_m \sin \omega t$  через электрическую цепь, состоящую из последовательно соединенных элементов  $r$ ,  $L$  и  $C$  (рис. 2-12), на выводах этой цепи создается синусоидальное напряжение, равное алгебраической сумме синусоидальных напряжений на отдельных элементах (второй закон Кирхгофа):

$$u = u_r + u_L + u_C.$$

Напряжение  $u_r$  на сопротивлении  $r$  совпадает

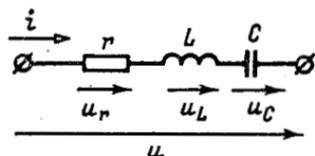


Рис. 2-12. Последовательное соединение сопротивления, индуктивности и емкости.

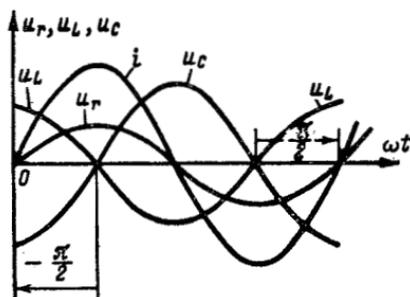


Рис. 2-13. Напряжения на сопротивлении, индуктивности и емкости (соединенных последовательно) при синусоидальном токе.

по фазе с током  $i$ , напряжение  $u_L$  на индуктивности  $L$  опережает, а напряжение  $u_C$  на емкости  $C$  отстает по фазе от  $i$  на  $\pi/2$  (рис. 2-13). Следовательно, напряжение  $u$  на выводах всей цепи равно:

$$\begin{aligned} U_m \sin(\omega t + \varphi) &= rI_m \sin \omega t + \omega LI_m \cos \omega t - \\ &- \frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t = rI_m \sin \omega t + \\ &+ \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I_m \cos \omega t = I_m [r \sin \omega t + x \cos \omega t]. \end{aligned} \quad (2-12)$$

Уравнение (2-12) представляет собой тригонометрическую форму записи второго закона Кирхгофа для мгновенных напряжений. Входящая в него величина  $x = x_L - x_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$  называется реактивным сопротивлением цепи, которое в зависимости от знака может иметь индуктивный ( $x > 0$ ) или емкостный ( $x < 0$ ) характер.

В отличие от реактивного сопротивления  $x$  активное сопротивление  $r$  всегда положительно.

Для нахождения  $U_m$  и  $\varphi$  воспользуемся тригонометрическими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} m \sin \alpha \pm n \cos \alpha &= \sqrt{m^2 + n^2} \sin(\alpha \pm \varphi); \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{n}{m}. \end{aligned} \right\} \quad (2-13)$$

Итак,

$$U_m = \sqrt{r^2 + x^2} I_m; \quad (2-14)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{r}. \quad (2-15)$$

Выражение (2-14) показывает, что амплитуда и действующее напряжение на цепи и ток, проходящий через данную цепь, связаны соотношением, аналогичным закону Ома:

$$U_m = z I_m; \quad U = z I,$$

где

$$z = \sqrt{r^2 + x^2} \quad (2-16)$$

называется п о л н ы м с о п р о т и в л е н и е м<sup>1</sup> рассматриваемой цепи.

Активное, реактивное и полное сопротивления относятся к числу основных понятий, применяемых в теории электрических цепей.

Выражения (2-12) и (2-15) показывают, что ток  $i$  отстает от напряжения  $u$  на угол  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x}{r}$ .

Если задано напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$  на выводах цепи с последовательно соединенными  $r$ ,  $L$  и  $C$ , то ток определяется по формуле

$$i = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi - \varphi).$$

Угол  $\varphi$ , равный разности начальных фаз напряжения и тока, отсчитывается по оси  $\omega t$  в направлении от напряжения к току и бывает острым или прямым

$$|\varphi| \leq \pi/2.$$

Угол  $\varphi$  положителен при индуктивном характере цепи, т. е. при  $x > 0$ ; при этом ток отстает по фазе от напряжения и  $\varphi$  отсчитывается по оси абсцисс вправо от напряжения к току (рис. 2-14).

<sup>1</sup> Этим термином заменен применявшийся ранее в литературе и ныне не рекомендуемый термин «кажущееся» сопротивление.



Угол  $\varphi$  отрицателен при емкостном характере цепи, т. е. при  $x < 0$ ; при этом ток опережает по фазе напряжение и  $\varphi$  отсчитывается по оси абсцисс влево от напряжения к току (рис. 2-15).

Итак, следует всегда помнить, что угол  $\varphi$  положителен при отстающем и отрицателен при опережающем токе.

Ток совпадает с напряжением по фазе при  $x = x_L - x_C = 0$ , т. е. при равенстве индуктивного и емкостного сопротивлений. Такой режим работы электрической цепи называется резонансом на напряжении (см. гл. 5).

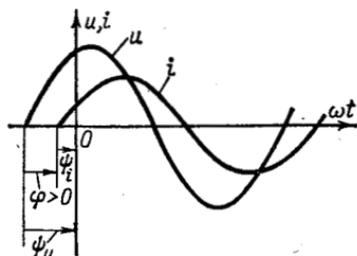


Рис. 2-14. Ток отстает от напряжения.

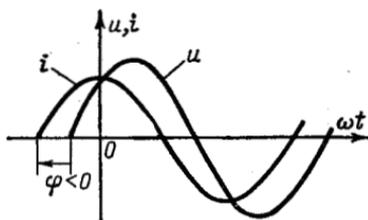


Рис. 2-15. Ток опережает напряжение.

Из выражений (2-15) и (2-16) следует, что активное и реактивное сопротивления цепи связаны с полным сопротивлением формулами:

$$r = z \cos \varphi; \quad x = z \sin \varphi. \quad (2-17)$$

Умножив правые и левые части выражений (2-17) на действующий ток  $I$ , получим действующие напряжения на активном и реактивном сопротивлениях, называемые активной и реактивной составляющими напряжения:

$$\left. \begin{aligned} U_a &= rI = z \cos \varphi I = U \cos \varphi; \\ U_p &= xI = z \sin \varphi I = U \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2-18)$$

Мгновенные значения напряжений на активном и реактивном сопротивлениях, суммирующиеся алгебраически в соответствии с (2-12), имеют фазовый сдвиг  $\pi/2$ . Поэтому непосредственное сложение действующих активного и реактивного напряжений не дает действующего напряжения всей цепи: согласно (2-18) активная и реактивная составляющие напряжения связаны с действующими

щим суммарным напряжением формулой <sup>1</sup>

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2}.$$

Для характеристики индуктивных катушек, представляемых цепью с последовательным соединением элементов  $r$  и  $L$ , пользуются понятием добротности катушки  $Q_L = x_L/r = \omega L/r$ , которое равнозначно тангенсу угла сдвига фаз  $\varphi$  для катушки. Чем меньше сопротивление  $r$ , тем выше при прочих равных условиях добротность катушки.

Добротность индуктивных катушек, применяемых в радиотехнике, автоматике и приборостроении, обычно не превышает  $Q_L = 200 \div 300$ . Для достижения более высокой добротности применяются так называемые пьезоэлектрические резонаторы (см. § 10-6). С понятием добротности мы встретимся в гл. 5.

## 2-8. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ

Если к выводам электрической цепи, состоящей из параллельно соединенных элементов  $r$ ,  $L$  и  $C$  (рис. 2-16), приложено синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin \omega t$ , то синусоидальный ток, проходящий через эту цепь,

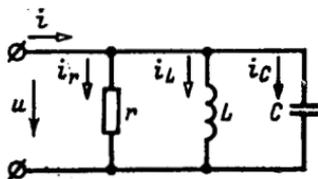


Рис. 2-16. Параллельное соединение сопротивления, индуктивности и емкости.

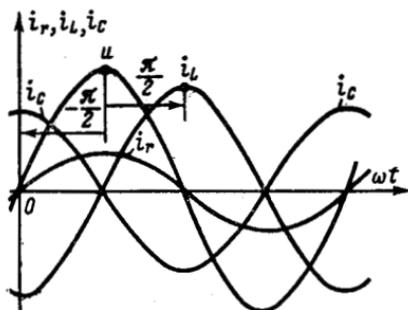


Рис. 2-17. Токи в сопротивлении, индуктивности и емкости (соединенных параллельно) при синусоидальном напряжении.

равен алгебраической сумме синусоидальных токов в параллельных ветвях (первый закон Кирхгофа):

$$i = i_r + i_L + i_C.$$

Ток  $i_r$  в сопротивлении  $r$  совпадает по фазе с напряжением  $u$ , ток  $i_L$  в индуктивности  $L$  отстает, а ток  $i_C$  в емкости  $C$  опережает напряжение на  $\pi/2$  (рис. 2-17).

<sup>1</sup>  $U_a$  и  $U_p$  могут рассматриваться как катеты прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна  $U$ ; подобный прямоугольный треугольник образуют также величины  $r$ ,  $x$  и  $z$  (см. гл. 3).



Следовательно, суммарный ток  $i$  в цепи равен:

$$\begin{aligned}
 I_m \sin(\omega t - \varphi) &= \frac{1}{r} U_m \sin \omega t - \frac{1}{\omega L} U_m \cos \omega t + \\
 + \omega C U_m \cos \omega t &= U_m \left[ \frac{1}{r} \sin \omega t - \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \cos \omega t \right] = \\
 &= U_m (g \sin \omega t - b \cos \omega t). \quad (2-19)
 \end{aligned}$$

Уравнение (2-19) представляет собой тригонометрическую форму записи первого закона Кирхгофа для мгновенных токов. Входящая в него величина  $b = b_L - b_C = \frac{1}{\omega L} - \omega C$  называется реактивной проводимостью цепи, которая в зависимости от знака может иметь индуктивный ( $b > 0$ ) или емкостный ( $b < 0$ ) характер. В отличие от реактивной проводимости  $b$  величина  $g = 1/r$ , которая в данном случае называется активной проводимостью, всегда положительна.

Для нахождения  $I_m$  и  $\varphi$  воспользуемся соотношениями (2-13):

$$I_m = \sqrt{g^2 + b^2} U_m = y U_m; \quad (2-20)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{g}. \quad (2-21)$$

Из (2-20) следует, что

$$I_m = y U_m \text{ или } I = y U,$$

где

$$y = \sqrt{g^2 + b^2} \quad (2-22)$$

— полная проводимость<sup>1</sup> рассматриваемой цепи.

Активная, реактивная и полная проводимости относятся к числу основных понятий, применяемых в теории электрических цепей.

Согласно (2-21) ток  $i$  отстает от напряжения  $u$  на угол

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{g} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{g}.$$

Если задано напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$  на выводах цепи с параллельно соединенными  $r$ ,  $L$  и  $C$ , то ток определяется по формуле

$$i = y U_m \sin(\omega t + \psi - \varphi).$$

<sup>1</sup> Этим термином заменен применявшийся ранее в литературе и ныне не рекомендуемый термин «кажущаяся» проводимость.



Угол  $\varphi$ , как и в предыдущем случае, отсчитывается по оси углов  $\omega t$  в направлении от напряжения к току и является острым или прямым

$$|\varphi| \leq \pi/2.$$

Угол  $\varphi$  положителен при индуктивном характере цепи, т. е. при  $b > 0$ ; при этом ток отстает по фазе от напряжения.

Угол  $\varphi$  отрицателен при емкостном характере цепи, т. е. при  $b < 0$ ; при этом ток опережает по фазе напряжение.

Ток совпадает с напряжением по фазе при  $b = b_L = b_C = 0$ , т. е. при равенстве индуктивной и емкостной проводимостей. Такой режим работы электрической цепи называется резонансом токов (см. гл. 5).

Из (2-21) и (2-22) следует, что активная и реактивная проводимости цепи связаны с полной проводимостью формулами:

$$g = y \cos \varphi; \quad b = y \sin \varphi. \quad (2-23)$$

Умножив правые и левые части выражений (2-23) на действующее значение напряжения  $U$ , получим действующие токи в ветвях с активной и реактивной проводимостями, называемые активной и реактивной составляющими тока:

$$\left. \begin{aligned} I_a &= gU = y \cos \varphi U = I \cos \varphi; \\ I_p &= bU = y \sin \varphi U = I \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2-24)$$

Активная и реактивная составляющие тока связаны с действующим значением суммарного тока формулой<sup>1</sup>

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}.$$

Для характеристики конденсаторов, представляемых цепью с параллельным соединением элементов  $r$  и  $C$ , применяется понятие добротности конденсатора  $Q_C = bc/g = \omega Cr$ , которое равнозначно тангенсу угла  $|\varphi|$  конденсатора. Обратная величина называется тангенсом угла диэлектрических потерь конденсатора:  $\operatorname{tg} \delta = 1/Q_C$  (угол диэлектрических потерь  $\delta$  дополняет угол  $|\varphi|$  до  $90^\circ$ ).

<sup>1</sup>  $I_a$  и  $I_p$  могут рассматриваться как катеты прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна  $I$ ; подобный прямоугольный треугольник образует также величины  $g$ ,  $b$  и  $y$  (см. гл. 3).



Чем больше сопротивление  $r$ , тем больше (при прочих равных условиях) добротность конденсатора и тем меньше угол потерь.

Добротность конденсаторов, применяемых в радиотехнике, автоматике и приборостроении, определяется сотнями и тысячами ( $\operatorname{tg} \delta$  для разных частот и диэлектриков колеблется в пределах от  $10^{-1}$  до  $10^{-4}$ ).

## 2.9. МОЩНОСТЬ В ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

В § 2-4—2-6 рассматривались энергетические соотношения в отдельных элементах  $r$ ,  $L$  и  $C$  при синусоидальном токе.

Разберем теперь более общий случай участка электрической цепи, напряжение на котором равно  $u = U_m \sin \omega t$ , а ток

$$i = I_m \sin (\omega t - \varphi).$$

Мгновенная мощность, поступающая в цепь,

$$\begin{aligned} p &= U_m I_m \sin \omega t \sin (\omega t - \varphi) = \\ &= UI [\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi)] \end{aligned} \quad (2-25)$$

состоит из двух слагающих: постоянной величины  $UI \cos \varphi$  и синусоидальной, имеющей удвоенную частоту по сравнению с частотой напряжения и тока.

Среднее значение второй слагающей за время  $T$ , в течение которого она совершает два цикла изменений, равно нулю. Поэтому активная мощность, поступающая в рассматриваемый участок цепи,

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T ui \, dt = UI \cos \varphi. \quad (2-26)$$

Множитель  $\cos \varphi$  носит название коэффициента мощности. Как видно из (2-26), активная мощность равна произведению действующих значений напряжения и тока, умноженному на коэффициент мощности.

Чем ближе угол  $\varphi$  к нулю, тем ближе  $\cos \varphi$  к единице и, следовательно, тем большая при заданных значениях  $U$  и  $I$  активная мощность передается источником приемнику.

Повышение коэффициента мощности промышленных электроустановок представляет важную технико-экономическую задачу.

Выражение активной мощности может быть преобразовано с учетом (2-17) и (2-23):

$$P = zI^2 \cos \varphi = rI^2;$$

$$P = yU^2 \cos \varphi = gU^2.$$

Активная мощность может быть также выражена через активную составляющую напряжения ( $U_a = U \cos \varphi$ ) или тока ( $I_a = I \cos \varphi$ ):

$$P = U_a I; \quad P = U I_a.$$

Приведенные общие выражения мгновенной и активной мощности применимы и к частным случаям, разобранным выше, когда  $\varphi = 0$  (см. § 2-4),  $\varphi = \pi/2$  (§ 2-5) и  $\varphi = -\pi/2$  (§ 2-6); мы не будем здесь повторять полученных ранее результатов.

Рассмотрим более общий случай активно-реактивной цепи, например цепи, содержащей сопротивление и индуктивность; при этом

$$0 < \varphi < \pi/2 \text{ и } 0 < \cos \varphi < 1.$$

Согласно (2-25) мгновенная мощность колеблется с удвоенной угловой частотой  $2\omega$  относительно линии, отстоящей от оси времени на  $P = UI \cos \varphi$  (рис. 2-18).

В промежутки времени, когда  $u$  и  $i$  имеют одинаковые знаки, мгновенная мощность положительна; энергия поступает от источника в приемник, поглощается в сопротивлении и запасается в магнитном поле индуктивности.

В промежутки времени, когда  $u$  и  $i$  имеют разные знаки, мгновенная мощность отрицательна и энергия частично возвращается приемником источнику. Как видно из рис. 2-18, в течение большей части периода мгновенная мощность положительна и соответственно положительная (расположенная над осью времени) площадь кривой  $p$  преобладает над отрицательной площадью кривой  $p$ . В результате средняя мощность за период, т. е. активная мощность,  $P > 0$ .

Аналогичная картина получается и в случае активно-емкостной цепи ( $0 > \varphi > -\pi/2$ ).

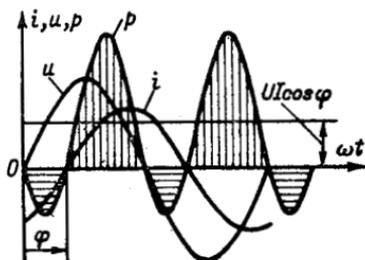


Рис. 2-18. Мощность, поступающая в активно-индуктивную цепь.

В электрических системах, в которых источниками электрической энергии являются генераторы переменного тока, мощность получается от первичных двигателей, приводящих генераторы во вращение. В радиотехнике и электронике, где синусоидальные колебания создаются с помощью электронных или полупроводниковых приборов, мощность получается от источников постоянного тока, питающих электронные генераторы или другого рода устройства.

Величина, равная произведению действующих тока и напряжения на цепи:

$$S = UI, \quad (2-27)$$

называется **полной мощностью** цепи и измеряется в вольт-амперах (*ва*). Следует заметить, что амплитуда синусоидальной составляющей мгновенной мощности (2-25) численно равна полной мощности.

На основании (2-26) и (2-27) коэффициент мощности равен отношению активной мощности к полной:

$$\cos \varphi = P/S.$$

При расчетах электрических цепей и на практике в эксплуатации пользуются также понятием **реактивная мощность**<sup>1</sup>, которая вычисляется по формуле

$$Q = UI \sin \varphi$$

и является мерой потребления (или выработки) реактивного тока.

Эта мощность выражается в единицах, называемых **вар**. Очевидно,

$$S^2 = P^2 + Q^2; \quad \sin \varphi = \frac{Q}{S}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P}.$$

Выражение реактивной мощности может быть преобразовано с учетом (2-17) и (2-23):

$$Q = zI^2 \sin \varphi = xI^2; \quad Q = yU^2 \sin \varphi = bU^2.$$

Реактивная мощность может быть также выражена через реактивную составляющую тока ( $I_p = I \sin \varphi$ ) или напряжения ( $U_p = U \sin \varphi$ ):

$$Q = UI_p; \quad Q = U_p I.$$

<sup>1</sup> Терминами «активная», «реактивная» и «полная» мощности заменены применявшиеся ранее в литературе и ныне не рекомендуемые термины «ваттная», «безваттная» и «кажущаяся» мощности.



В соответствии с принятым ранее правилом знаков для угла  $\varphi$  реактивная мощность положительна при отстающем токе (индуктивная нагрузка) и отрицательна при опережающем токе (емкостная нагрузка).

Понятия активная (средняя), реактивная и полная мощности являются удобными определениями мощностей, которые прочно укоренились на практике.

Реактивные мощности, подводимые к индуктивности и емкости, могут быть представлены в следующем виде:

$$Q_L = UI \sin \frac{\pi}{2} = UI = \omega LI^2 = \omega \frac{LI_m^2}{2} = \omega W_{L_{\max}};$$

$$\begin{aligned} Q_C &= UI \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) = -UI = -\omega CU^2 = \\ &= -\omega \frac{CU_m^2}{2} = -\omega W_{C_{\max}}, \end{aligned}$$

где  $W_{L_{\max}}$  и  $W_{C_{\max}}$  — максимальные значения энергии, периодически запасаемой индуктивностью и емкостью.

Реактивная мощность цепи, содержащей индуктивность и емкость, пропорциональна разности максимальных значений энергии, запасаемой в магнитном и электрическом полях:

$$Q = \omega (W_{L_{\max}} - W_{C_{\max}}). \quad (2-28)$$

Предлагается читателям проверить и самостоятельно убедиться в том, что эта формула справедлива при любом соединении индуктивности и емкости: последовательном, параллельном или в какой-либо комбинации с сопротивлениями.

## 2-10. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

2-1. Вычсть напряжение  $5 \sin \omega t$  из напряжения  $10 \sin (\omega t + \pi/2)$ .

Ответ:  $11,2 \sin (\omega t + 116^\circ 30')$ .

2-2. Ток изменяется по закону  $i = 20 \sin \omega t$  А; частота равна  $f = 50$  Гц. Определить наибольшую скорость изменения тока и соответствующее этому моменту значение тока.

Ответ: 6280 А/с; 0.

2-3. На выводах цепи, состоящей из последовательно соединенных сопротивления  $r = 50$  Ом и индуктивности  $L = 0,1$  Г, задано напряжение  $u = \sqrt{2} \cdot 100 \sin \omega t$  В. Частота  $f = 50$  Гц. Вычислить полное сопротивление цепи и действующие напряжения на  $r$  и  $L$ ; вывести выражения для синусоидального тока  $i(t)$ ; построить кривые  $i(t)$ ,  $u(t)$  и напряжений на  $r$  и  $L$ .

Ответ: 59 Ом; 85 В; 53,4 В;  $i = \sqrt{2} \cdot 1,7 \sin (\omega t - 32^\circ 10')$  А.



2-4. В цепи, состоящей из последовательно соединенных  $r$  и  $L$ , ток равен 1 А при частоте 400 Гц и 0,8 А при 800 Гц. В обоих случаях напряжение на цепи 20 В. Определить  $r$  и  $L$ .

Ответ: 18 Ом; 3,45 мГ.

2-5. В цепи, состоящей из последовательно соединенных  $r$  и  $C$ , ток равен 0,1 А при частоте 800 Гц и 0,08 А при 400 Гц. В обоих случаях напряжение на выводах цепи 20 В. Определить  $r$  и  $C$ .

Ответ: 180 Ом; 2,3 мкФ.

2-6. В цепи, состоящей из параллельно соединенных  $r$  и  $C$ , ток равен 0,08 А при частоте 400 Гц и 0,1 А при 800 Гц. В обоих случаях напряжение на цепи 20 В. Определить  $r$  и  $C$ .

Ответ: 277 Ом; 0,688 мкФ.

2-7. В цепи, изображенной на рис. 2-12, при частоте 1000 Гц и сопротивлении  $r = 25$  Ом действующие значения напряжений  $U_r = 25$ ,  $U_L = 100$ ,  $U_C = 120$  В. Определить  $L$  и  $C$ .

Ответ: 15,9 мГ; 1,33 мкФ.

2-8. На цепи, состоящей из последовательно включенных сопротивления  $r = 30$  Ом и емкости  $C = 6$  мкФ, задано напряжение  $u = \sqrt{2} \cdot 120 \sin \omega t$  В. Частота  $f = 400$  Гц. Вычислить полное сопротивление цепи и действующие значения напряжений на  $r$  и  $C$ ; вывести выражение для синусоидального тока  $i(t)$ ; построить кривые  $u(t)$ ,  $i(t)$  и напряжений на  $r$  и  $C$ .

Ответ: 72,8 Ом; 49,5 В; 109,5 В;

$$i = \sqrt{2} \cdot 1,65 \sin(\omega t + 65^\circ 40') \text{ А.}$$

2-9. Напряжение на сопротивлении  $r = 3,63$  Ом и индуктивности  $L = 0,02$  Г, соединенных параллельно, равно  $u = \sqrt{2} \times 120 \sin(3,14 t + \pi/6)$  В. Вычислить полную проводимость цепи и действующие токи в  $r$  и  $L$ ; вывести выражение для суммарного синусоидального тока в цепи; построить кривые  $u(t)$ ,  $i(t)$  и токов в  $r$  и  $L$ .

Ответ: 0,318 См; 33,1 А; 19,1 А;

$$i = \sqrt{2} \cdot 38,2 \sin 3,14 t \text{ А.}$$

2-10. Напряжение на сопротивлении  $r = 1000$  Ом и емкости  $C = 1$  мкФ, соединенных параллельно, равно  $u = \sqrt{2} \cdot 120 \sin 2512 t$  В. Вычислить полную проводимость и действующие токи в  $r$  и  $C$ ; вывести выражение для суммарного синусоидального тока  $i(t)$ ; построить кривые  $u(t)$ ,  $i(t)$  и токов в  $r$  и  $C$ .

Ответ: 0,00269 См; 0,12 А; 0,301 А;

$$i = \sqrt{2} \cdot 0,323 \sin(2512t + 68^\circ 20') \text{ А.}$$

2-11. Вычислить действующее напряжение на цепи, имеющей активную проводимость 0,07 См и реактивную проводимость 0,044 См, если действующий синусоидальный ток, проходящий через цепь, равен 10 А.

Ответ: 121 В.

2-12. К цепи, состоящей из последовательно соединенных сопротивления  $r = 1$  Ом, индуктивности  $L = 0,1$  Г и емкости  $C = 101,4$  мкФ, приложено напряжение  $33,8 \sin 314 t$  В. Найти ток; построить кривые тока и напряжений на сопротивлении, индуктивности и емкости.

Ответ:  $33,8 \sin 314 t$  А.



2-13. Определить напряжение на цепи, состоящей из  $r$ ,  $L$  и  $C$ , соединенных последовательно, если напряжение на  $C$  равно  $U_m \sin \omega t$ .

О т в е т:

$$U_m \sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (r\omega C)^2} \sin(\omega t + \alpha);$$

$$\alpha = \arctg \frac{r\omega C}{1 - \omega^2 LC}.$$

2-14. Напряжение на  $r$ ,  $L$  и  $C$ , соединенных параллельно, равно  $U_m \sin \omega t$ . Определить суммарный ток.

О т в е т:

$$I_m = U_m \sqrt{\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2} \sin(\omega t - \varphi);$$

$$\varphi = \arctg r \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right).$$

2-15. Через цепь, состоящую из параллельно соединенных сопротивлений  $r = 8,33$  Ом и индуктивности  $L = 6,36$  мГ, проходит ток  $0,141 \cos \omega t$  А, частота равна 500 Гц. Определить напряжение на параллельных ветвях.

О т в е т:  $1,1 \cos(\omega t + 22^\circ 36')$  В.

2-16. На цепи, состоящей из последовательно соединенных  $r$  и  $L$ , напряжение равно 120 В, ток 0,5 А, активная мощность 30 Вт, частота 400 Гц. Определить  $r$  и  $L$ .

О т в е т: 120 Ом; 83 мГ.

2-17. Цепь состоит из источника э. д. с.  $100 \sin 400 t$  В, сопротивления  $r = 50$  Ом и индуктивности  $L = 0,1$  Г, соединенных последовательно. Считая ток синусоидальным, найти для момента  $t = \pi/200$  с мгновенные токи, напряжения на элементах и мощности, подводимые к ним; определить действующие токи и напряжения на элементах.

О т в е т:  $-0,975$  А;  $-48,8$  В;  $48,8$  В;  $47,5$  Вт;  $-47,5$  Вт;  $1,1$  А;  $55$  В;  $44$  В.

2-18. Сохранив условия задачи 2-17, заменить индуктивность емкостью 100 мкФ.

О т в е т:  $0,8$  А;  $40$  В;  $-40$  В;  $32$  Вт;  $-32$  Вт;  $1,26$  А;  $63$  В;  $31,5$  В.

2-19. Цепь состоит из источника э. д. с.  $100 \sin 300 t$  В, сопротивления  $r = 40$  Ом и индуктивности  $L = 0,1$  Г, соединенных последовательно. Считая ток синусоидальным, найти мгновенные ток и напряжения на элементах при  $t = 0,01$  с; вычислить энергию, поступающую от источника с момента  $t = 0$  до  $t = 0,01$  с.

О т в е т:  $-1,42$  А;  $56,8$  В;  $-42,4$  В;  $0,833$  Дж.

2-20. Цепь состоит из источника э. д. с.  $100 \sin 400 t$  В, сопротивления  $r$  и индуктивности  $L = 0,025$  Г. Найти  $r$ , если при  $t = \pi/800$  с мгновенное напряжение на  $L$  равно 35,35 В; получить выражение для синусоидального тока; вычислить для  $t = \pi/800$  с энергию, запасенную в магнитном поле, и мгновенную мощность, поступающую от источника.

О т в е т:  $13,55$  Ом;  $5,95 \sin(400 t - 36^\circ 30')$  А;  $0,284$  Дж;  $478$  Вт.

2-21. Цепь состоит из источника э. д. с.  $100 \cos 1000 t$  В, сопротивления  $r$  и емкости  $C$ , соединенных последовательно. Ток в цепи равен  $10 \cos(1000 t + \pi/3)$  А. Найти  $r$  и  $C$ ; вычислить для  $t = \pi/1000$  с мгновенные значения напряжения на  $r$  и  $C$  и мощности, поступающие в них.

О т в е т:  $5$  Ом;  $115$  мкФ;  $-25$  В;  $-75$  В;  $125$  Вт;  $375$  Вт.



2-22. Цепь, состоящая из  $r$ ,  $L$  и  $C$ , соединенных последовательно, питается от источника э. д. с. 110 В переменной частоты. Определить коэффициент мощности цепи при 60 Гц, если известно, что при частоте 45 Гц напряжение на емкости, так же как и на индуктивности, составляет 200,8 В.

У к а з а н и е. При 45 Гц имеет место резонанс напряжений, т. е.  $\omega L = 1/\omega C$ .

О т в е т: 0,69.

2-23. Что такое положительное направление синусоидального тока?

2-24. Что понимается под полярностью источника синусоидальной э. д. с. или источника синусоидального тока?

2-25. Что такое фазовый сдвиг тока относительно напряжения? Чем вызван фазовый сдвиг?

2-26. Какова разница между активной, реактивной и полной мощностями? В каких единицах они измеряются?

2-27. Почему в общем случае активная проводимость ветви не равна величине, обратной активному сопротивлению этой ветви? В каком частном случае выполняется такое равенство?

2-28. Для чего стремятся повысить коэффициент мощности электрической установки?

---

## ГЛАВА ТРЕТЬЯ

### ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ И ВЕКТОРНЫХ ДИАГРАММ К РАСЧЕТУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

#### 3-1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ВИДЕ ПРОЕКЦИЙ ВРАЩАЮЩИХСЯ ВЕКТОРОВ

Тригонометрическая форма расчета электрических цепей синусоидального тока, рассмотренная в предыдущей главе, практически применима только для простейших электрических цепей, не содержащих большого числа контуров и источников, взаимных индуктивностей и т. п.

С усложнением электрических цепей тригонометрическая форма расчета становится крайне затруднительной и требуется метод, позволяющий рассчитывать электрические цепи переменного тока алгебраически аналогично цепям постоянного тока. Таким удобным расчетным методом служит метод комплексных амплитуд (комплексный метод), основанный на замене рассмотрения синусоидальных функций рассмотрением вращающихся векторов. Все последующее изложение курса ТОЭ



и других электротехнических и радиотехнических дисциплин базируется на этом методе <sup>1</sup>.

Известно, что каждая точка на комплексной плоскости определяется радиус-вектором этой точки, т. е. вектором, начало которого совпадает с началом координат, а конец находится в точке, соответствующей заданному комплексному числу (рис. 3-1).

Пользуясь показательной или полярной формой записи комплексного числа, имеем <sup>2</sup>:

$$\dot{A} = Ae^{j\alpha} = A \angle \alpha;$$

здесь  $A$  — модуль;  $\alpha$  — аргумент или фаза;  $j = \sqrt{-1}$  (в электротехнике не пользуются обозначением  $i = \sqrt{-1}$ , так как буква  $i$  обозначает ток).

Применив формулу Эйлера, можно получить тригонометрическую форму записи комплексного числа:

$$\dot{A} = A \cos \alpha + jA \sin \alpha$$

или соответственно алгебраическую форму:

$$\dot{A} = A_1 + jA_2,$$

где

$$A_1 = A \cos \alpha; \quad A_2 = A \sin \alpha.$$

Очевидно,

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2; \quad \alpha = \arctg \frac{A_2}{A_1}.$$

Вектор, вращающийся в положительном направлении, т. е. против хода часовой стрелки, с угловой скоростью  $\omega$  может быть выражен следующим образом:

$$Ae^{j(\omega t + \alpha)} = \dot{A}e^{j\omega t}, \quad (3-1)$$

где  $\dot{A} = Ae^{j\alpha} = A \angle \alpha$  — комплексная амплитуда, представляющая данный вектор в момент  $t = 0$

<sup>1</sup> Комплексный метод расчета электрических цепей введен в инженерную практику А. Е. Кеннели и Ч. П. Штейнметцем в 1893—1894 гг.

<sup>2</sup> В зарубежной литературе по электротехнике и радиотехнике для комплексных величин часто применяется жирный шрифт в отличие от модулей, обозначаемых светлыми буквами.

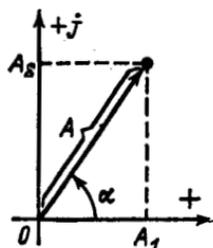


Рис. 3-1. Вектор, изображающий комплексное число.



(рис. 3-2). Иначе говоря, это комплексная величина, не зависящая от времени, модуль и аргумент которой равны соответственно амплитуде и начальной фазе заданной синусоидальной функции.

Множитель  $e^{j\omega t}$  является оператором вращения; умножение комплексной амплитуды  $\dot{A}$  на  $e^{j\omega t}$  означает поворот вектора  $\dot{A}$  на угол  $\omega t$  в положительном направлении.

Записывая комплексную функцию (3-1) в тригонометрической форме

$$\dot{A}e^{j(\omega t + \alpha)} = A \cos(\omega t + \alpha) + jA \sin(\omega t + \alpha),$$

закключаем, что синусоидальная функция  $A \sin(\omega t + \alpha)$  может рассматриваться как мнимая часть комплексной функции (3-1), взятая без множителя  $j$ , или, что то же, как проекция вращающегося вектора на мнимую ось.

Условно это записывается так:

$$A \sin(\omega t + \alpha) = \text{Im}(\dot{A}e^{j\omega t}).$$

Символ  $\text{Im}$  обозначает, что берется мнимая часть комплексной функции.

Аналогично косинусоидальная функция может быть в случае необходимости пре-

Рис. 3-2. Вращающийся вектор.

дставлена как действительная часть комплексной функции (3-1)

$$A \cos(\omega t + \alpha) = \text{Re}(\dot{A}e^{j\omega t}),$$

где символ  $\text{Re}$  обозначает, что берется действительная часть комплексной функции.

Если синусоидальные функции имеют одну и ту же частоту, то соответствующие этим функциям векторы вращаются с одинаковой угловой скоростью и поэтому углы между ними сохраняются неизменными.

На рис. 3-3, а показаны две синусоидальные функции:  $u_1 = U_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$  и  $u_2 = U_{2m} \sin(\omega t - \psi_2)$ , имеющие одинаковую угловую частоту  $\omega$ . Функция  $u_1$  опережает по фазе функцию  $u_2$ , причем фазовый сдвиг равен разности начальных фаз:

$$\varphi = \psi_1 - (-\psi_2) = \psi_1 + \psi_2.$$

Этот угол и образуют между собой векторы, показанные на рис. 3-3, б.

При равенстве начальных фаз, т. е. при фазовом сдвиге, равном нулю, векторы направлены в одну и ту же сторону (совпадают по фазе).

При фазовом сдвиге  $180^\circ$  векторы направлены в диаметрально противоположные стороны (находятся в противофазе).

Диаграмма, изображающая совокупность векторов, построенных с соблюдением их взаимной ориентации по фазе, называется векторной диаграммой<sup>1</sup>.

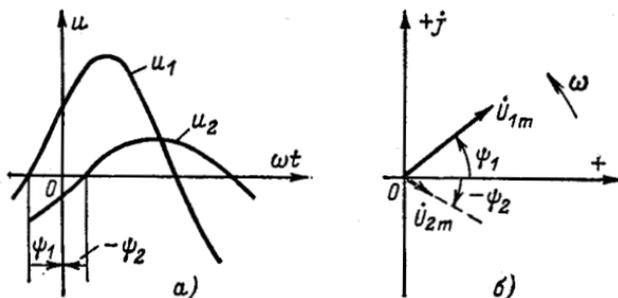


Рис. 3-3. Фазовый сдвиг.

а — между синусоидами; б — между векторами.

Векторное представление синусоидальных функций, частота которых одинакова, облегчает операции сложения и вычитания этих функций. Ввиду того что сумма проекций двух векторов равна проекции геометрической суммы этих векторов, амплитуда и начальная фаза результирующей кривой могут быть найдены из векторной диаграммы.

Например, если двум синусоидальным функциям соответствуют комплексные амплитуды  $A$  и  $B$ , то сумме этих синусоидальных функций соответствует комплексная амплитуда  $C = A + B$  (рис. 3-4, а).

Из графического построения следует:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(\alpha - \beta)}; \quad (3-2)$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{A \sin \alpha + B \sin \beta}{A \cos \alpha + B \cos \beta}. \quad (3-3)$$

<sup>1</sup> В отличие от векторных диаграмм кривые мгновенных значений называются временными диаграммами.

Здесь угол  $\gamma$  находится с учетом знаков числителя и знаменателя, определяющих знаки синуса и косинуса.

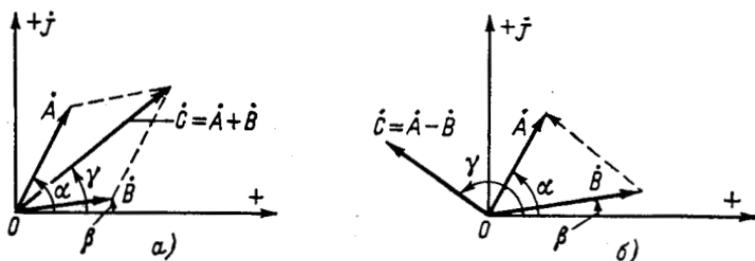


Рис. 3-4. Сложение (а) и вычитание (б) векторов.

В случае, когда вектор  $\vec{B}$  вычитается из вектора  $\vec{A}$  (рис. 3-4, б), угол  $\beta$  в (3-2) и (3-3) заменяется  $\beta + \pi$  или, что то же,  $\beta - \pi$ .

### 3-2. ЗАКОНЫ ОМА И КИРХГОФА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Рассмотрим применение метода комплексных амплитуд в случае последовательного и параллельного соединений элементов  $r$ ,  $L$  и  $C$ .

#### Последовательное соединение $r$ , $L$ и $C$

Положим, что в уравнении Кирхгофа

$$u = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \quad (3-4)$$

заданными являются параметры  $r$ ,  $L$ ,  $C$  и синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$  на цепи, а искомой величиной является ток  $i$ . Ввиду того что здесь рассматривается установившийся режим цепи синусоидального тока, решение этого дифференциального уравнения должно дать синусоидальную функцию вида:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

где  $I_m$  и  $(\psi - \varphi)$  — пока неизвестные амплитуда и начальная фаза тока.

Пусть в соответствии с предыдущим параграфом заданное синусоидальное напряжение символизируется комплексной функцией  $\dot{U}_m e^{j\omega t}$ , а искомый синусоидальный ток — комплексной функцией  $\dot{I}_m e^{j\omega t}$ ; комплексные амплитуды

напряжения и тока равны соответственно:

$$\dot{U}_m = U_m e^{j\psi}; \quad \dot{I}_m = I_m e^{j(\psi - \varphi)}.$$

Сложение, дифференцирование и интегрирование синусоидальных функций в уравнении (3-4) заменяются теми же математическими операциями над мнимыми частями комплексных функций:

$$\operatorname{Im}(\dot{U}_m e^{j\omega t}) = r \operatorname{Im}(\dot{I}_m e^{j\omega t}) + L \frac{d}{dt} \operatorname{Im}(\dot{I}_m e^{j\omega t}) + \frac{1}{C} \int \operatorname{Im}(\dot{I}_m e^{j\omega t}) dt. \quad (3-5)$$

Операции над мнимыми частями комплексных функций могут быть заменены операциями над самими комплексными функциями с последующим выделением мнимой части полученного результата. Объясняется это коммутативностью операций сложения, дифференцирования и интегрирования относительно символической операции  $\operatorname{Im}$ . Итак, (3-5) преобразуется следующим образом:

$$\operatorname{Im}(\dot{U}_m e^{j\omega t}) = \operatorname{Im}\left(r \dot{I}_m e^{j\omega t} + L \frac{d}{dt} \dot{I}_m e^{j\omega t} + \frac{1}{C} \int \dot{I}_m e^{j\omega t} dt\right).$$

Полученное уравнение удовлетворяется для любого момента времени. Поэтому заключенные в скобки комплексные выражения, от которых берется мнимая часть, должны быть равны друг другу. Производя дифференцирование и интегрирование, получаем:

$$\dot{U}_m e^{j\omega t} = r \dot{I}_m e^{j\omega t} + j\omega L \dot{I}_m e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_m e^{j\omega t}. \quad (3-6)$$

Здесь следует обратить внимание на то, что при интегрировании функции  $e^{j\omega t}$  постоянная интегрирования опущена, так как в рассматриваемом установившемся режиме цепи синусоидального тока электрические заряды или напряжения на емкостях представляют собой синусоидальные функции, не содержащие постоянных слагающих.

В результате сокращения всех частей уравнения (3-6) на множитель  $e^{j\omega t}$  получается алгебраическое комплексное уравнение

$$\dot{U}_m = r \dot{I}_m + j\omega L \dot{I}_m + \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_m. \quad (3-7)$$

Ток  $\dot{I}_m$  может быть вынесен за скобки. При этом вводится условное обозначение для комплексного



сопротивления рассматриваемой электрической цепи:

$$Z = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = r + jx. \quad (3-8)$$

Таким образом, получается уравнение

$$\dot{U}_m = Z \dot{I}_m, \quad (3-9)$$

выражающее закон Ома для комплексных амплитуд.

Разделив обе части уравнения (3-9) на  $\sqrt{2}$ , получим закон Ома для комплексных действующих значений<sup>1</sup>:

$$\dot{U} = Z \dot{I}. \quad (3-10)$$

Следовательно, комплексное сопротивление электрической цепи равно отношению комплексного напряжения на данной цепи к комплексному току в этой цепи.

Комплексное сопротивление  $Z$  представлено в выражении (3-8) в алгебраической форме. Та же величина в тригонометрической и показательной (полярной) формах имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} Z &= z \cos \varphi + jz \sin \varphi; \\ Z &= ze^{j\varphi} = z \angle \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (3-11)$$

Здесь  $z = |Z|$  — модуль комплексного числа  $Z$  — представляет собой полное сопротивление цепи, а  $\varphi$  — аргумент комплексного числа  $Z$ :

$$z = \sqrt{r^2 + x^2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{x}{r}.$$

На основании (3-9) комплексная амплитуда тока

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{Z} = \frac{U_m}{z} e^{j(\psi - \varphi)} = \frac{U_m}{z} \angle (\psi - \varphi),$$

где  $\psi - \varphi$  — начальная фаза тока. Следовательно, искомый ток в тригонометрической форме

$$i = \operatorname{Im}(\dot{I}_m e^{j\omega t}) = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

что совпадает с результатом, полученным ранее (см. § 2-7).

<sup>1</sup> Комплексный действующий синусоидальный ток (комплексный ток) — комплексная величина, модуль и аргумент которой равны соответственно действующему синусоидальному току и его начальной фазе (по ГОСТ 19880-74).



На рис. 3-5 дана геометрическая интерпретация на комплексной плоскости уравнения (3-10). Рисунок 3-5, а относится к случаю, когда реактивное сопротивление цепи имеет индуктивный характер ( $x > 0$ ) и соответственно ток отстает по фазе от напряжения ( $\varphi > 0$ ). Рисунок 3-5, б относится к случаю, когда реактивное сопротивление цепи имеет емкостный характер ( $x < 0$ ) и поэтому ток опережает по фазе напряжение ( $\varphi < 0$ ).

В случае чисто реактивной цепи ( $r = 0$ ) ток отстает от напряжения по фазе на  $\pi/2$ , если сопротивление цепи индуктивно, и опережает напряжение на  $\pi/2$  при емкостном сопротивлении цепи.

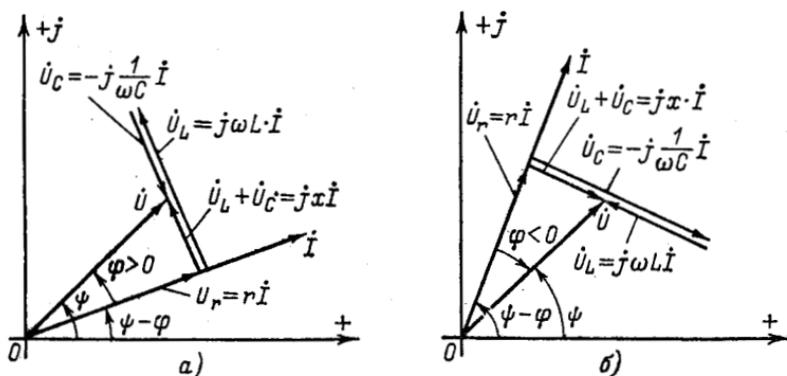


Рис. 3-5. Векторные диаграммы для последовательной цепи  $r, L, C$  при  $x > 0$  (а) и  $x < 0$  (б).

Как видно из векторных диаграмм, приведенных на рис. 3-5,  $\dot{U}_r = r\dot{I}$  — напряжение на сопротивлении  $r$  (совпадает по фазе с током  $\dot{I}$ ),  $\dot{U}_L = j\omega L\dot{I}$  — напряжение на индуктивности  $L$  (опережает ток  $\dot{I}$  на угол  $\pi/2$ ) и  $\dot{U}_C = -j\frac{1}{\omega C}\dot{I}$  — напряжение на емкости  $C$  (отстает от тока  $\dot{I}$  на угол  $\pi/2$ ).

Геометрическая сумма векторов  $\dot{U}_r$ ,  $\dot{U}_L$  и  $\dot{U}_C$  дает вектор приложенного к цепи напряжения:

$$\dot{U} = \dot{U}_r + \dot{U}_L + \dot{U}_C.$$

Прямоугольный треугольник, катетами которого являются  $\dot{U}_r$  и  $\dot{U}_L + \dot{U}_C$ , а гипотенуза которого равна  $\dot{U}$ , называется треугольником напряжений;  $\dot{U}_r$  и  $\dot{U}_L + \dot{U}_C$  представляют собой соответственно активную



и реактивную составляющие напряжения ( $\dot{U}_a = \dot{U}_r$ ;  $\dot{U}_p = \dot{U}_L + \dot{U}_C$ ).

Если все стороны-векторы этого треугольника разделить на вектор  $\dot{I}$ , то получится треугольник сопротивлений, подобный треугольнику напряжений и повернутый относительно последнего на угол  $\psi - \varphi$  по ходу часовой стрелки.

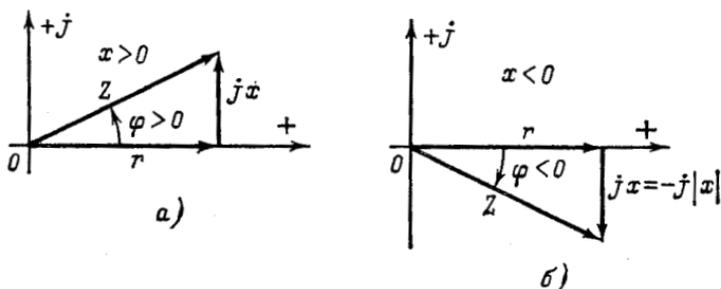


Рис. 3-6. Треугольник сопротивлений при  $x > 0$  (а) и  $x < 0$  (б).

Треугольник сопротивлений представляет собой геометрическую интерпретацию уравнения (3-11). Его положение не зависит от начальных фаз  $\dot{U}$  и  $\dot{I}$ ; сопротивление  $r$  откладывается на комплексной плоскости в положительном направлении действительной оси, а реактивное сопротивление  $x$  в зависимости от его знака откладывается в положительном ( $x > 0$ ) или отрицательном ( $x < 0$ ) направлении мнимой оси (рис. 3-6, а и б).

В треугольнике сопротивлений угол  $\varphi$  отсчитывается от катета  $r$  к гипотенузе  $Z$  по аналогии с тем, как отсчитывается угол  $\varphi$  в треугольнике напряжений от  $\dot{U}_r = r\dot{I}$  к  $\dot{U} = Z\dot{I}$ .

### Параллельное соединение $r$ , $L$ и $C$

Пользуясь рассуждениями, аналогичными приведенным выше, можно прийти к комплексной форме законов Ома и Кирхгофа для электрической цепи, состоящей из элементов  $r$ ,  $L$  и  $C$ , соединенных параллельно.

Ограничиваясь записью для комплексных действующих значений; пропорциональных комплексным амплитудам, имеем в соответствии с первым законом Кирхгофа:

$$\dot{I} = g\dot{U} + \frac{1}{j\omega L}\dot{U} + j\omega C\dot{U} = \dot{I}_r + \dot{I}_L + \dot{I}_C; \quad (3-12)$$

здесь  $I_r = g\dot{U}$  — ток в сопротивлении  $r$  (совпадает по фазе с напряжением  $\dot{U}$ );  $I_L = -j\frac{1}{\omega L}\dot{U}$  — ток в индуктивности (отстает от напряжения на  $\pi/2$ );

$I_C = j\omega C\dot{U}$  — ток в емкости (опережает напряжение на  $\pi/2$ ).

Выражение

$$Y = g - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) = g - jb \quad (3-13)$$

представляет собой комплексную проводимость рассматриваемой цепи;  $g$  и  $b$  — активная и реактивная проводимости цепи.

Уравнение

$$\dot{I} = Y\dot{U} \quad (3-14)$$

выражает закон Ома в комплексной форме. Следовательно, комплексная проводимость электрической цепи равна отношению комплексного тока в данной цепи к комплексному напряжению на ее выводах.

Тригонометрическая и показательная (полярная) формы комплексной проводимости имеют следующий вид:

$$Y = y \cos \varphi - jy \sin \varphi; \quad Y = ye^{-j\varphi} = y \angle -\varphi;$$

здесь  $y = |Y|$  — модуль комплексного числа  $Y$  — представляет собой полную проводимость цепи, а  $(-\varphi)$  — аргумент комплексного числа  $Y$ :

$$y = \sqrt{g^2 + b^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{b}{g}.$$

На основании (3-14) комплексный ток равен:

$$\dot{I} = yUe^{j(\Psi - \varphi)} = yU \angle (\Psi - \varphi),$$

что соответствует синусоидальному току

$$i = \text{Im}(\dot{I}_m e^{j\omega t}) = yU_m \sin(\omega t + \Psi - \varphi).$$

На рис. 3-7 дана геометрическая интерпретация на комплексной плоскости уравнения (3-12). Рисунок 3-7, а относится к случаю, когда реактивная проводимость цепи имеет индуктивный характер ( $b > 0$ ) и соответственно ток отстает по фазе от напряжения ( $\varphi > 0$ ). Рисунок 3-7, б относится к случаю, когда реактивная проводимость цепи имеет емкостный характер ( $b < 0$ ) и соответственно ток опережает по фазе напряжение ( $\varphi < 0$ ).



Прямоугольный треугольник с катетами  $I_r$  и  $(I_L + I_C)$  и гипотенузой  $I$  называется треугольником токов;  $I_r$  и  $(I_L + I_C)$  представляют собой соответственно активную и реактивную составляющие тока  $I_a$  и  $I_p$ .

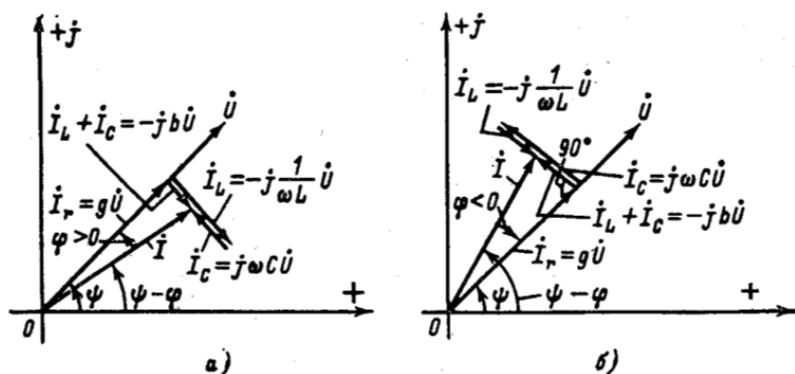


Рис. 3-7. Векторные диаграммы для параллельной цепи  $r, L, C$  при  $b > 0$  (а) и  $b < 0$  (б).

Если все стороны-векторы этого треугольника разделить на вектор  $U$ , то получится треугольник проводимостей, подобный треугольнику токов и повернутый относительно последнего на угол  $\psi$  по ходу

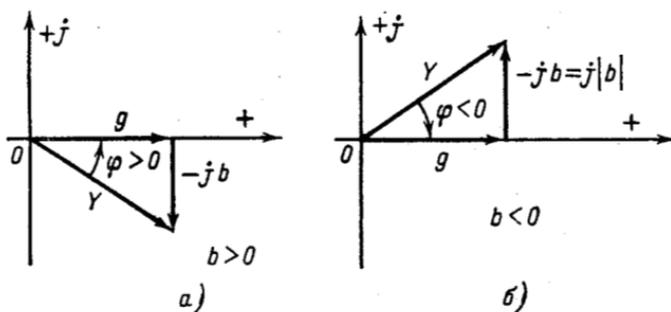


Рис. 3-8. Треугольник проводимостей при  $b > 0$  (а) и  $b < 0$  (б).

часовой стрелки. Треугольник проводимостей служит геометрической интерпретацией выражения (3-13): активная проводимость  $g$  откладывается на комплексной плоскости в положительном направлении действительной оси, а реактивная проводимость  $b$  в зависимости от ее знака

откладывается в отрицательном ( $b > 0$ ) или положительном ( $b < 0$ ) направлении мнимой оси (рис. 3-8,  $a$  и  $b$ ).

В треугольнике проводимостей угол  $\varphi$  отсчитывается от гипотенузы  $Y$  к катету  $g$  по аналогии с треугольником токов, где угол  $\varphi$  отсчитывается от  $I = Y\dot{U}$  к  $I_r = g\dot{U}$ .

В табл. 3-1 дана сводка уравнений основных элементов цепи в общей форме (дифференциальной, интегральной) и при синусоидальном режиме в тригонометрической и комплексной формах.

Таблица 3-1

Уравнения элементов цепи

Элемент	Общая форма	Синусоидальный режим	
		Тригонометрическая форма	Комплексная форма
Сопротивление	$u = ri$ $i = gu$	$u = rI_m \sin(\omega t + \psi)$ $i = gU_m \sin(\omega t + \psi)$	$\dot{U} = rI$ $I = g\dot{U}$
Индуктивность	$u = L \frac{di}{dt}$ $i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u dt$	$u = \omega LI_m \sin(\omega t + \psi)$ $i = -\frac{1}{\omega L} U_m \cos(\omega t + \psi)$	$\dot{U} = j\omega LI$ $I = -j \frac{1}{\omega L} \dot{U}$
Емкость	$u = \frac{1}{C} \int_{\infty}^t i dt$ $i = C \frac{du}{dt}$	$u = \frac{1}{\omega C} I_m \sin(\omega t + \psi)$ $i = \omega CU_m \cos(\omega t + \psi)$	$\dot{U} = -j \frac{1}{\omega C} I$ $I = j\omega C \dot{U}$

Следует обратить внимание на то, что комплексное сопротивление индуктивного элемента равно  $j\omega L$ , а емкостного элемента  $\frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C}$ ; комплексные проводимости составляют соответственно  $\frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{\omega L}$  и  $j\omega C$ .

При последовательном соединении  $r$ ,  $L$  и  $C$  складываются в комплексной форме сопротивления, а при параллельном соединении — проводимости.

В табл. 3-2 приведены выражения комплексных сопротивлений и проводимостей цепи для различных сочетаний элементов  $r$ ,  $L$  и  $C$ .



## Выражения комплексных сопротивлений и проводимостей

Цепь	Z при последовательном соединении	Y при параллельном соединении
$r, L$	$r + j\omega L$	$\frac{1}{r} - j\frac{1}{\omega L}$
$r, C$	$r - j\frac{1}{\omega C}$	$\frac{1}{r} + j\omega C$
$r, L, C$	$r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$	$\frac{1}{r} - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)$

## 3-3. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ СОПРОТИВЛЕНИЯМИ И ПРОВОДИМОСТЯМИ УЧАСТКА ЦЕПИ

Пользуясь комплексной формой записи, при заданном комплексном сопротивлении  $Z = r + jx$  некоторого участка цепи находим для того же участка цепи комплексную проводимость<sup>1</sup>:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{r + jx} = \frac{r}{r^2 + x^2} - j\frac{x}{r^2 + x^2} = g - jb. \quad (3-15)$$

В свою очередь если задана комплексная проводимость некоторого участка цепи  $Y = g - jb$ , то комплексное сопротивление того же участка цепи

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{g - jb} = \frac{1}{g^2 + b^2} + j\frac{b}{g^2 + b^2} = r + jx. \quad (3-16)$$

Выражения (3-15) и (3-16) показывают, что реактивное сопротивление  $x$  и реактивная проводимость  $b$  одного и того же участка цепи имеют одинаковый знак.

Кроме того, каждая слагающая проводимости ( $g$  и  $b$ ) зависит как от активного, так и от реактивного сопротивлений (т. е. от  $r$  и  $x$ ). Соответственно каждая слагающая сопротивления ( $r$  и  $x$ ) является функцией активной и реактивной проводимостей ( $g$  и  $b$ ).

Соотношения  $g = 1/r$  и  $b = 1/x$  справедливы только в частном случае, когда элемент  $r, L$  или  $C$  рассматрива-

<sup>1</sup> В зарубежной литературе под реактивной проводимостью обычно понимается величина  $b = -\frac{x}{r^2 + x^2}$  и соответственно комплексная проводимость записывается в виде  $Y = g + jb$ .

ется в отдельности, например:

$$b_L = \frac{1}{x_L} = \frac{1}{\omega L}; \quad b_C = \frac{1}{x_C} = \omega C.$$

Предлагается учащимся в виде упражнения написать выражения для активного и реактивного сопротивлений, активной и реактивной проводимостей для всех случаев, указанных в табл. 3-2.

### 3-4. КОМПЛЕКСНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ МОЩНОСТИ

Допустим, что через электрическую цепь проходит синусоидальный ток, причем положительные направления тока и напряжения на выводах цепи приняты совпадающими (рис. 3-9).

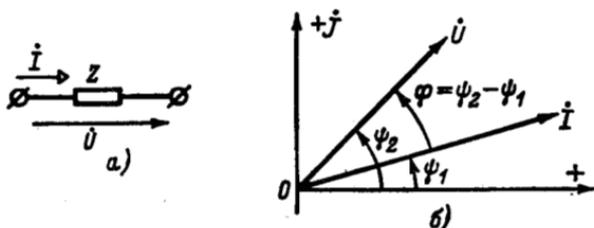


Рис. 3-9. Положительные направления (а) и комплексные напряжения и ток (б).

Комплексные ток и напряжение равны соответственно:

$$\dot{I} = I \angle \psi_1 \quad \text{и} \quad \dot{U} = U \angle \psi_2.$$

Фазовый сдвиг тока относительно напряжения равен разности начальных фаз:

$$\varphi = \psi_2 - \psi_1.$$

Умножим  $\dot{U}$  на комплексное значение  $\dot{I}^* = I \angle -\psi_1$ , сопряженное с  $\dot{I}$ :

$$\dot{U}\dot{I}^* = UI \angle (\psi_2 - \psi_1) = UI \angle \varphi.$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{S} = \dot{U}\dot{I}^* = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ.$$

Так как напряжение  $\dot{U}$  может рассматриваться как сумма активной и реактивной слагающих:  $\dot{U} = \dot{U}_a + \dot{U}_p$  (см. § 3-2), то почленное умножение этих слагающих на

$\dot{I}^*$  дает активную и реактивную мощности:

$$\dot{U}_a \dot{I}^* + \dot{U}_p \dot{I}^* = U \cos \varphi I \angle 0^\circ + U \sin \varphi I \angle \pi/2 = P + jQ.$$

Аналогично мощность может быть выражена через активный и реактивный токи.

Таким образом, комплексная величина  $\tilde{S}$  определяет действительной частью активную мощность, а мнимой частью реактивную мощность, поступающую в цепь.

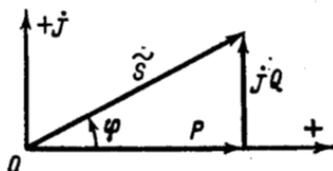


Рис. 3-10. Треугольник мощностей на комплексной плоскости.

Модуль  $S$  равен полной мощности.  $\tilde{S}$  носит название мощности в комплексной форме, или комплексной мощности.

На комплексной плоскости  $\tilde{S}$  изображает гипотенузу прямоугольного треугольника, катетами которого служат  $P$  и  $Q$  (рис. 3-10).

Треугольник мощностей, изображенный на рис. 3-10, подобен треугольнику сопротивлений:

$$\frac{Q}{P} = \frac{x}{r} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Если комплексно сопряженное напряжение  $\dot{U}^*$  умножить на комплексный ток  $\dot{I}$ , то получится:

$$\dot{U}^* \dot{I} = UI \cos \varphi - jUI \sin \varphi = P - jQ.$$

Поэтому мощности  $P$  и  $Q$  на выводах цепи могут быть записаны в следующем виде:

$$P = \frac{1}{2} (\dot{U}^* \dot{I} + \dot{U} \dot{I}^*);$$

$$Q = \frac{1}{2j} (\dot{U}^* \dot{I} - \dot{U} \dot{I}^*).$$

Комплексное сопротивление цепи легко вычислить, если известны комплексная мощность  $\tilde{S}$  и действующее значение тока  $I$ :

$$\tilde{S} = \dot{U} \dot{I} = Z I \dot{I} = Z I^2,$$

откуда

$$Z = \frac{\tilde{S}}{I^2} = \frac{P}{I^2} + j \frac{Q}{I^2}.$$

Воспользовавшись выражением (2-28), получим:

$$Z = \frac{P}{j^2} + j \frac{\omega}{j^2} (W_{L_{\max}} - W_{C_{\max}}).$$

Эта формула справедлива при любой схеме соединений сопротивлений, индуктивностей и емкостей.

Энергетический метод определения комплексного сопротивления применим и к комплексной проводимости:  $\tilde{S} = \dot{U}\dot{I}^* = \dot{U}\dot{U}^*\dot{Y} = U^2\dot{Y}^*$ , откуда  $\dot{Y}^* = \tilde{S}/U^2$ , где  $\dot{Y}^*$  — комплексная проводимость, сопряженная с  $Y$ . Следовательно,

$$Y = \frac{P}{U^2} - j \frac{Q}{U^2} = \frac{P}{U^2} + j \frac{\omega}{U^2} (W_{C_{\max}} - W_{L_{\max}}).$$

Итак, активные сопротивление и проводимость цепи зависят от поглощаемой цепью активной мощности, а реактивные сопротивление и проводимость — от разности максимальных значений энергии, запасаемых в магнитных и электрических полях (см. § 2-5, 2-6 и 2-9).

### 3-5. УСЛОВИЕ ПЕРЕДАЧИ МАКСИМУМА АКТИВНОЙ МОЩНОСТИ ОТ ИСТОЧНИКА К ПРИЕМНИКУ

Пусть требуется подобрать комплексное сопротивление нагрузки таким образом, чтобы при заданном комплексном сопротивлении источника обеспечивалась передача максимума активной мощности от источника к приемнику. Обозначим комплексные сопротивления источника напряжения и нагрузки соответственно через

$$Z_0 = r_0 + jx_0$$

$$\text{и } Z = r + jx$$

(см. рис. 3-11).

Активная мощность, потребляемая нагрузкой, равна:

$$P = rI^2 = \frac{rE^2}{|Z_0 + Z|^2} = \frac{rE^2}{(r_0 + r)^2 + (x_0 + x)^2}.$$

Будем сначала изменять реактивное сопротивление  $x$ . Очевидно, при любом значении  $r$  ток и соответственно активная мощность достигают наибольшего значения  $x = -x_0$ . При этом  $P = \frac{rE^2}{(r_0 + r)^2}$ .

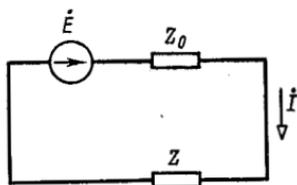


Рис. 3-11. Передача энергии от источника к приемнику.

Найдем теперь условие максимума полученной функции в предположении, что  $r$  — переменная величина, т. е. из условия, что  $dP/dr = 0$ ; это даст:

$$(r_0 + r)^2 - 2r(r_0 + r) = 0,$$

откуда

$$r = r_0.$$

На основании найденных равенств заключаем, что *условием передачи максимума активной мощности источником приемнику является равенство*

$$Z = Z_0^*, \quad (3-17)$$

где  $Z_0^*$  — комплексное сопротивление, сопряженное с  $Z_0$ .

При соблюдении этого условия приемник потребляет мощность

$$P_{\text{макс}} = \frac{E^2}{4r_0}$$

и к. п. д., определяемый как отношение активной мощности, потребляемой приемником, к суммарной мощности, поглощаемой активными сопротивлениями цепи, равен 0,5.

В том случае, когда комплексное сопротивление источника имеет индуктивный характер, комплексное сопротивление приемника на основании (3-17) должно быть емкостного характера. Такая компенсация реактивного сопротивления цепи осуществляется на практике с помощью конденсаторов, включаемых последовательно или параллельно нагрузке.

Если условие (3-17) не выполняется, то относительное отклонение передаваемой активной мощности от максимальной составляет:

$$\frac{P_{\text{макс}} - P}{P_{\text{макс}}} = \frac{(r_0 - r)^2 + (x_0 + x)^2}{(r_0 + r)^2 + (x_0 + x)^2}.$$

В тех случаях, когда реактивное сопротивление источника относительно невелико по сравнению с его активным сопротивлением, условия, близкие к оптимальным, получаются при активной нагрузке, если сопротивление приемника принято равным активному или полному сопротивлению источника.

Например, при  $Z_0 = 618 \angle -14^\circ$  и  $Z = 618 \angle 0^\circ$  поступающая в приемник активная мощность отличается от максимально возможной только на 1,5%; в этом случае компенсации реактивного сопротивления источника практически не требуется.

Формулы, приведенные выше, справедливы и для цепей постоянного тока; при этом комплексные величины заменяются действительными.



### 3-6. УСЛОВИЕ ПЕРЕДАЧИ ИСТОЧНИКОМ МАКСИМУМА МОЩНОСТИ ПРИ ЗАДАННОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ МОЩНОСТИ ПРИЕМНИКА

На практике часто возникает необходимость подбора комплексного сопротивления нагрузки таким образом, чтобы при заданных комплексном сопротивлении источника и коэффициенте мощности приемника обеспечивалась передача максимума полной и соответственно активной мощности от источника приемнику.

Пользуясь условными обозначениями, принятыми в предыдущем параграфе, находим полную мощность на выводах нагрузки:

$$S = zI^2 = \frac{zE^2}{|Z_0 + Z|^2} = \frac{zE^2}{z_0^2 \left| 1 + \frac{z}{z_0} \angle (\varphi - \varphi_0) \right|^2},$$

где  $\varphi$  и  $\varphi_0$  — углы комплексных сопротивлений  $Z$  и  $Z_0$ .

После преобразования получим:

$$S = \left(\frac{E}{z_0}\right)^2 \frac{z}{1 + 2\frac{z}{z_0} \cos(\varphi - \varphi_0) + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}. \quad (3-18)$$

Приняв величину  $z$  за переменную, записываем условие максимума функции  $S$ :

$$\frac{dS}{dz} = 0,$$

откуда

$$1 + 2\frac{z}{z_0} \cos(\varphi - \varphi_0) + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 - z \left[ 2\frac{1}{z_0} \cos(\varphi - \varphi_0) + 2\frac{z}{z_0^2} \right] = 0,$$

или

$$1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 - 2\left(\frac{z}{z_0}\right)^2 = 0.$$

Следовательно,

$$z = z_0. \quad (3-19)$$

Подстановка (3-19) в (3-18) дает:

$$S_{\text{макс}} = \frac{E^2}{2z_0 [1 + \cos(\varphi - \varphi_0)]}.$$

Таким образом, передача максимума мощности в нагрузку при заданном  $\cos \varphi$  достигается при равенстве полных сопротивлений нагрузки и источника. При этом передаваемая мощность тем больше, чем больше по абсо-



лютому значению разность углов сопротивлений нагрузки и источника  $|\varphi - \varphi_0|$ .

Если условие (3-19) не соблюдается, то относительное отклонение передаваемой полной мощности от максимальной составляет:

$$\frac{S_{\text{макс}} - S}{S_{\text{макс}}} = \frac{\left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^2}{1 + 2\frac{z}{z_0} \cos(\varphi - \varphi_0) + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}. \quad (3-20)$$

Практически допустимы отклонения от условия (3-19), при которых значение (3-20) не превышает заданного предела.

Условия передачи максимума мощности широко используются в радиотехнике, электропроводной связи, автоматике и приборостроении. В энергетических же системах, генерирующих и потребляющих большие мощности, стремятся обеспечить высокий к. п. д. генераторов; поэтому сопротивления нагрузок значительно превышают сопротивления генераторов.

### 3-7. БАЛАНС МОЩНОСТЕЙ

Из закона сохранения энергии следует, что для любой электрической цепи соблюдается закон баланса активных мощностей: *активная мощность, генерируемая источниками, равна активной мощности, потребляемой всеми приемниками.*

В свою очередь можно показать, что и сумма *отдаваемых реактивных мощностей равна сумме потребляемых реактивных мощностей.*

Если воспользоваться комплексной формой записи токов, напряжений и мощностей, то высказанные положения будут вытекать из следующих рассуждений.

Для электрической цепи, содержащей  $q$  узлов, можно написать по первому закону Кирхгофа  $q - 1$  уравнение вида:

$$\dot{I}_{k1} + \dot{I}_{k2} + \dots + \dot{I}_{k, q-1} + \dot{I}_{kq} = 0,$$

где положительные направления всех токов приняты от узла  $k$  к узлам 1, 2, ...,  $q$ .

Умножим каждое из этих уравнений на комплексное напряжение, отсчитываемое от соответствующего узла к узлу  $q$ , и просуммируем эти произведения:

$$\dot{U}_{1q}(\dot{I}_{12} + \dot{I}_{13} + \dots + \dot{I}_{1q}) + \dot{U}_{2q}(\dot{I}_{21} + \dot{I}_{23} + \dots + \dot{I}_{2q}) + \dots + \dots + \dot{U}_{q-1, q}(\dot{I}_{q-1, 1} + \dot{I}_{q-1, 2} + \dots + \dot{I}_{q-1, q}) = 0,$$



откуда с учетом того, что

$$\dot{U}_{kq} - \dot{U}_{mq} = \dot{U}_{km}$$

и

$$\dot{I}_{mk} = -\dot{I}_{km},$$

получим:

$$\dot{U}_{12}\dot{I}_{12}^* + \dot{U}_{13}\dot{I}_{13}^* + \dots + \dot{U}_{q-1,q}\dot{I}_{q-1,q}^* = 0.$$

Итак сумма комплексных мощностей, потребляемых всеми ветвями электрической цепи, равна нулю; следовательно, также равны нулю в отдельности алгебраические суммы действительных и мнимых частей мощностей.

Иначе говоря, равны нулю как алгебраическая сумма потребляемых всеми ветвями цепи активных мощностей, так и алгебраическая сумма потребляемых реактивных мощностей.

Поскольку отрицательные потребляемые мощности представляют собой мощности отдаваемые, то отсюда следует закон баланса как активных, так и реактивных мощностей.

*В случае цепи постоянного тока сумма мощностей источников равна сумме мощностей, расходуемых в сопротивлениях, причем знаки мощностей источников определяются по указанному выше правилу: мощность положительна при совпадении направлений э. д. с.  $E$  и тока  $I$ , проходящего через источник, и отрицательна при встречных направлениях э. д. с. и тока. В последнем случае, если источником энергии служит аккумулятор, мощность  $EI$  расходуется на его зарядку; если же источником служит генератор, то мощность  $EI$  расходуется на механическую работу (генератор работает в режиме двигателя).*

### 3-8. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ (ТОПОГРАФИЧЕСКАЯ) ДИАГРАММА

В § 1-12 рассматривался график распределения потенциала для простейшей цепи постоянного тока. В случае цепи синусоидального тока аналогично строится другой график, который называется *потенциальной* или *топографической диаграммой напряжений*. Эта диаграмма представляет собой векторную диаграмму, на которой отложены комплексные потенциалы отдельных точек заданной цепи по отношению к одной точке, потенциал которой принят за нуль. Таким образом, порядок расположения векторов падения напряжения на диаграмме

строго соответствует порядку расположения элементов цепи на схеме. Конец вектора напряжения на каждом последующем элементе примыкает к началу вектора напряжения предыдущего элемента. При таком построении векторной диаграммы напряжений каждой точке электрической цепи соответствует определенная точка на потенциальной диаграмме.

Потенциальная диаграмма позволяет весьма просто находить напряжения между любыми точками цепи: действующее значение и фаза искомого напряжения определяются прямой, соединяющей соответствующие точки потенциальной диаграммы.

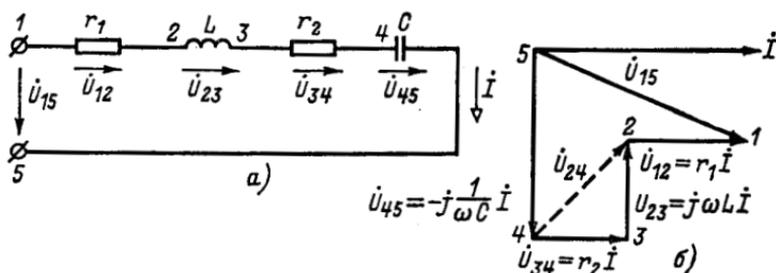


Рис. 3-12. Схема (а) и потенциальная диаграмма (б).

На рис. 3-12 изображена схема неразветвленной электрической цепи и для нее построена потенциальная диаграмма напряжений. Направления векторов напряжений на потенциальной диаграмме увязаны с произвольно выбранным направлением вектора тока  $\dot{I}$ .

Обход схемы ведется навстречу положительному направлению тока  $\dot{I}$ . В соответствии с порядком расположения в схеме элементов  $C$ ,  $r_2$ ,  $L$ ,  $r_1$  на диаграмме изображены векторы напряжений:

$$\dot{U}_{45} = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I}; \quad \dot{U}_{34} = r_2 \dot{I}; \quad \dot{U}_{23} = j \omega L \dot{I}; \quad \dot{U}_{12} = r_1 \dot{I}.$$

Начала и концы векторов (рис. 3-12, б) пронумерованы в соответствии с нумерацией точек, принятой на схеме (рис. 3-12, а).

Напряжение между какими-либо двумя точками схемы, например, на участке 2—4 схемы, взятое в положительном направлении тока  $\dot{I}$ , определяется по потенциальной диаграмме вектором  $\dot{U}_{24}$ , соединяющим точки 2 и 4 диаграммы и направленным на диаграмме от точки 4 к точке 2.

Это соответствует известному правилу вычитания векторов, согласно которому какой-либо вектор  $\dot{U}_{mn}$ , представляющий собой разность напряжений (или потенциалов)  $\dot{U}_m - \dot{U}_n$ , направлен от конца вектора  $\dot{U}_n$  к концу вектора  $\dot{U}_m$ . Итак, вектор напряжения на диаграмме направлен к точке высшего (уменьшаемого) потенциала, а то же напряжение на схеме указывается стрелкой, направленной от высшего потенциала к низшему.

Если при построении потенциальной диаграммы обход схемы совершался бы в положительном направлении тока  $\dot{I}$ , то изменилась бы нумерация начала и конца каждого вектора напряжения на потенциальной диаграмме, что противоречило бы принятому правилу расстановки индексов при вычитании векторов.

### 3-9. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

3-1. Произвести вычисления: а)  $10 \angle 30^\circ + 5 \angle 60^\circ$ .

Ответ:  $14,53 \angle 40^\circ$ .

б)  $10 \angle 30^\circ - 5 \angle 60^\circ$ .

Ответ:  $6,2 \angle 6^\circ 12'$ .

в)  $(8,66 + j5) (3,53 + j3,53)$ .

Ответ:  $50 \angle 75^\circ$ .

г)  $(8,66 + j5) : (2,5 + j4,33)$ .

Ответ:  $2 \angle -30^\circ$ .

д)  $(5 + j5)^3$ .

Ответ:  $-250 + j250$ .

е)  $\sqrt[4]{5 + j8,66}$ .

Ответ:  $1,78 \angle 15^\circ, 105^\circ, -75^\circ$  или  $-165^\circ$ .

ж)  $\ln(50 e^{j70^\circ})$ .

Ответ:  $3,91 + j1,22$ .

3-2. Решить в комплексной форме следующие задачи:

а) Сложить напряжения  $u_1 = 10 \sin(\omega t + \pi/3)$  и  $u_2 = 5 \sin(\omega t + \pi/12)$ .

б) Сложить токи  $i_1 = 10 \sin \omega t$  и  $i_2 = 10 \cos(\omega t + \pi/4)$ .

Ответ:  $u = 14 \sin(\omega t + 45^\circ 30')$ ;  $i = 7,65 \sin(\omega t + 67^\circ 30')$ .

3-3. К цепи, состоящей из  $r = 7$  Ом и  $L = 63,7$  мГ, соединенных последовательно, приложено напряжение  $250 \sin 377 t$  В. Найти тригонометрическое и комплексное выражения тока, комплексные напряжение и сопротивление; построить векторную диаграмму.

Ответ:  $10 \sin(\omega t - 73^\circ 40')$  А;

$$\frac{10}{\sqrt{2}} \angle -73^\circ 40' \text{ А}; \quad \frac{250}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \text{ В}; \quad 25 \angle 73^\circ 40' \text{ Ом}.$$

3-4. К цепи, состоящей из  $r = 20$  Ом,  $L = 100$  мГ и  $C = 50$  мкФ, соединенных последовательно, приложено напряжение  $u = 14,14 \times \sin 377 t$  В. Вычислить комплексные ток и напряжения на  $r$ ,  $L$  и  $C$ ; построить векторную диаграмму.

Ответ:  $0,396 \angle 37^\circ 25'$  А;  $7,92 \angle 37^\circ 25'$  А;  $14,95 \angle 127^\circ 25'$  В;  $21,15 \angle -52^\circ 35'$  В.



3-5. Сохранив условия предыдущей задачи, вычислить мгновенные значения тока и напряжений на  $r$ ,  $L$  и  $C$  при  $t = 0,01$  с.

Ответ:  $-0,538$  А;  $-10,76$  А;  $-6,22$  В;  $8,52$  В.

3-6. На выводах цепи, состоящей из последовательно соединенных  $r$  и  $C$ , напряжение равно  $127$  В, ток  $27,6$  мА, частота  $400$  Гц; напряжение на сопротивлении  $63,5$  В. Определить  $r$  и  $C$ .

Ответ:  $2300$  Ом;  $0,1$  мкФ.

3-7. Индуктивная катушка  $L = 5$  мГ,  $r = 5\sqrt{3} = 8,66$  Ом и соединенная с нею параллельно емкость  $C = 100$  мкФ находятся под напряжением  $u = 100\sqrt{2}\sin 1000t$  В. Найти комплексные токи и показания приборов. Построить векторную диаграмму.

Ответ:  $I = 10 \angle 30^\circ$ ;  $I_C = 10 \angle 90^\circ$ ;  $I_k = 10 \angle -30^\circ$  А.

3-8. Комплексное сопротивление равно  $3 + j5$  Ом. Вычислить активную и реактивную проводимости.

Ответ:  $0,0882$  См;  $0,147$  См.

3-9. Комплексная проводимость равна  $0,2 - j0,2$  См. Вычислить активное и реактивное сопротивления.

Ответ:  $2,5$  Ом;  $2,5$  Ом.

3-10. Заданы в комплексном виде напряжение на ветви  $\dot{U} = 30$  В и ток  $I = 6 + j0,9$  А, проходящий через эту ветвь. Определить комплексное сопротивление и комплексную проводимость цепи; построить векторную диаграмму.

Ответ:  $4,95 \angle -8^\circ 30'$  Ом;  $0,202 \angle 8^\circ 30'$  См.

3-11. Через ветвь, комплексное сопротивление которой равно  $5 \angle 30^\circ$  Ом, проходит ток  $I = 10 \angle 30^\circ$  А. Определить напряжение на ветви в комплексной и тригонометрической форме; построить векторную диаграмму.

Ответ:  $50 \angle \pi/3$  В;  $\sqrt{2} \cdot 50 \sin(\omega t + \pi/3)$  В.

3-12. К  $r$  и  $L$ , соединенным последовательно, подведено напряжение  $U = 100 \angle 30^\circ$  В;  $r = 30$  Ом;  $\omega L = 40$  Ом. Написать выражение для мощности в комплексной форме,

Ответ:  $120 + j160$  В·А.

3-13. Напряжение на индуктивной катушке  $r$ ,  $L$  равно  $100$  В при прохождении через катушку как постоянного тока  $25$  А, так и синусоидального тока  $10$  А с частотой  $400$  Гц. Определить емкость, которую следует включить последовательно с катушкой, чтобы синусоидальный ток возрос до  $20$  А, а напряжение на цепи было равно  $100$  В.

Рассмотреть два случая, удовлетворяющие этому требованию, найти напряжение на катушке и построить векторные диаграммы.

Ответ:  $64,6$ ;  $32,7$  мкФ;  $200$  В.

3-14. В цепи, изображенной на рис. 3-12, а,  $r_1 = 25$  Ом,  $L = 8$  мГ,  $r_2 = 15$  Ом,  $C = 8$  мкФ.

Построить потенциальную диаграмму и определить  $\dot{U}_{13}$ ,  $\dot{U}_{24}$  и  $\dot{U}_{15}$ , если ток в цепи  $I = 2 \angle 0^\circ$  А и угловая частота  $\omega = 2500$  рад/с.

Ответ:  $64 \angle 38^\circ 40'$ ;  $50 \angle 53^\circ 10'$ ;  $100 \angle -36^\circ 50'$  В.

3-15. Доказать, что

$$P = \frac{1}{2} (\dot{U}I^* + \dot{U}^*I); \quad Q = \frac{1}{2j} (\dot{U}I^* - \dot{U}^*I).$$

3-16. Как переходят от мгновенных значений токов к комплексным?

3-17. На какую ось проектируют вращающийся вектор при переходе от комплексных выражений к тригонометрическим?



3-18. В чем заключается удобство комплексной формы расчета электрической цепи?

3-19. Построить синусоиды и векторы напряжений и токов по табл. 3-1.

3-20. Определить модули и аргументы (углы) комплексных сопротивлений и проводимостей, приведенных в табл. 3-2, и построить треугольники сопротивлений и проводимостей.

---

## ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СХЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

## 4-1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ И ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЯ

При расчете электрических цепей часто возникает целесообразность преобразования схем этих цепей в более простые и удобные для расчета. Так, при одном или нескольких источниках электрической энергии в ряде случаев удается преобразовать электрическую схему в одноконтурную или в схему с двумя узлами, что весьма упрощает последующий расчет.

*Описываемые ниже приемы преобразования схем электрических цепей применимы для цепей постоянного и переменного тока; ради общности изложения они приводятся в комплексной записи.*

Одним из основных видов преобразования электрических схем, часто применяемых на практике, является преобразование схемы со смешанным соединением элементов. Смешанное соединение элементов представляет собой сочетание более простых соединений — последовательного и параллельного, рассмотрению которых и посвящен данный параграф. Смешанное соединение разбирается в § 4-2.

### Последовательное соединение

На рис. 4-1 изображена ветвь электрической цепи, в которой последовательно включены комплексные сопротивления  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ . Через все участки цепи, соединенные последовательно, проходит один и тот же ток  $I$ .

Напряжения на отдельных участках цепи обозначены через  $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dots, \dot{U}_n$ .

По второму закону Кирхгофа

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dots + \dot{U}_n,$$

или, что то же,

$$\dot{U} = Z_1 \dot{I} + Z_2 \dot{I} + \dots + Z_n \dot{I}.$$

Сумма комплексных сопротивлений всех последовательно соединенных участков цепи

$$Z = \sum_{k=1}^n Z_k$$

называется эквивалентным комплексным сопротивлением.

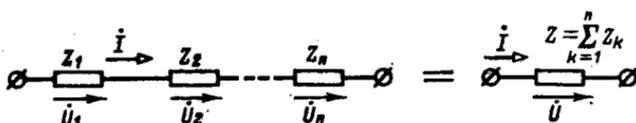


Рис. 4-1. Последовательное соединение.

Если мнимые части комплексов

$$Z_k = r_k + jx_k$$

представляют собой сопротивления одинакового характера— индуктивного или емкостного (рис. 4-2), то эквивалентное комплексное сопротивление  $Z$  находится в результате

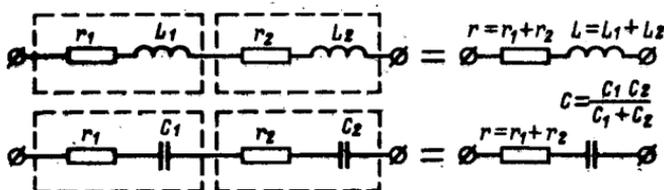


Рис. 4-2. Последовательное соединение однородных звеньев.

арифметического сложения в отдельности сопротивлений  $r_k$ , индуктивностей  $L_k$  или величин  $1/C_k$ , обратных емкостям:

$$Z = r + j\omega L.$$

или

$$Z = r - j \frac{1}{\omega C},$$

где

$$r = \sum_{k=1}^n r_k; \quad L = \sum_{k=1}^n L_k; \quad \frac{1}{C} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}.$$

Ток в цепи равен:

$$i = \frac{\dot{U}}{Z}.$$

Напряжения на участках цепи, соединенных последовательно, относятся как комплексные сопротивления этих участков: напряжение на  $k$ -м участке равно произведению суммарного напряжения  $\dot{U}$  на отношение комплексного сопротивления  $k$ -го участка к эквивалентному комплексному сопротивлению цепи:

$$\dot{U}_k = \dot{U} \frac{Z_k}{Z}.$$

Приведенные выше формулы справедливы при любых значениях  $Z_k$ .

### Параллельное соединение

На рис. 4-3 изображена схема электрической цепи с двумя узлами. Между этими узлами параллельно соединены ветви с комплексными проводимостями  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ . Напряжение на всех ветвях одинаковое, равно  $\dot{U}$ .

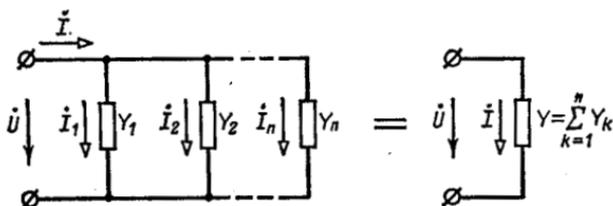


Рис. 4-3. Параллельное соединение.

Токи в ветвях обозначены через  $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dots, \dot{I}_n$ . По первому закону Кирхгофа

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dots + \dot{I}_n,$$

или, что то же,

$$\dot{I} = Y_1 \dot{U} + Y_2 \dot{U} + \dots + Y_n \dot{U}.$$

Сумма комплексных проводимостей всех ветвей, соединенных параллельно,

$$Y = \sum_{k=1}^n Y_k$$

называется эквивалентной комплексной проводимостью.

Если мнимые части комплексов  $Y_k = g_k - jb_k$  представляют собой проводимости одинакового характера — емкостного или индуктивного (рис. 4-4), то эквивалентная

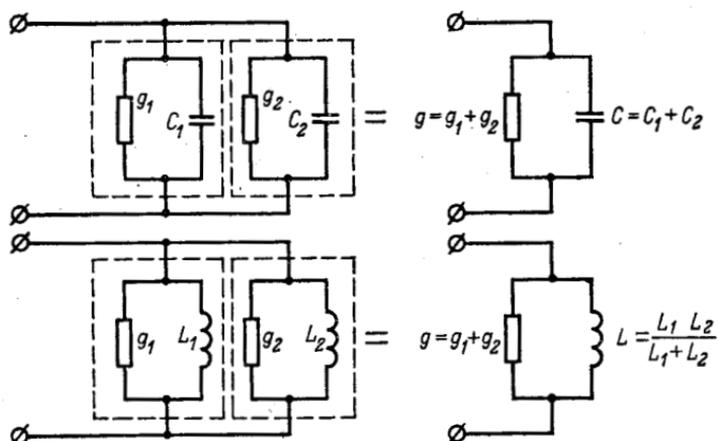


Рис. 4-4. Параллельное соединение однородных звеньев.

комплексная проводимость  $Y$  находится в результате арифметического сложения отдельных активных проводимостей  $g_k$ , емкостей  $C_k$  или величин  $1/L_k$ , обратных индуктивностям:

$$Y = g + j\omega C$$

или

$$Y = g - j\frac{1}{\omega L},$$

где

$$g = \sum_{k=1}^n g_k; \quad C = \sum_{k=1}^n C_k; \quad \frac{1}{L} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k}.$$

Суммарный ток в цепи равен:

$$i = Y\dot{U}.$$

Токи в ветвях относятся, как их комплексные проводимости: ток в  $k$ -й ветви равен произведению суммарного тока всех ветвей на отношение комплексной проводимости  $k$ -й ветви к эквивалентной комплексной проводимости:

$$i_k = i \frac{Y_k}{Y} = i \frac{Z}{Z_k}.$$

Данным выражением особенно удобно пользоваться при  $n > 2$ . При этом значения  $Y_k$  могут быть любыми.

В случае параллельного соединения двух ветвей ( $n = 2$ ) обычно пользуются выражениями, в которые входят сопротивления  $Z_1 = 1/Y_1$ , и  $Z_2 = 1/Y_2$  ветвей; эквивалентное комплексное сопротивление равно:

$$Z = \frac{1}{Y_1 + Y_2} = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Токи в параллельных ветвях:

$$i_1 = i \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}; \quad i_2 = i \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2},$$

т. е. ток одной из двух параллельных ветвей равен суммарному току, умноженному на сопротивление другой ветви и деленному на сумму сопротивлений обеих ветвей.

#### 4.2. СМЕШАННОЕ СОЕДИНЕНИЕ

Электрические схемы, имеющие смешанное соединение, могут быть преобразованы в более простую электрическую схему путем замены параллельных ветвей одной ветвью и соответственно последовательно соединенных участков цепи — одним участком.

На рис. 4-5 показан пример электрической цепи со смешанным соединением. Эта схема легко приводится к одноконтурной. Первоначально вычисляется эквивалентная комплексная проводимость параллельных ветвей; затем находится величина, обратная проводимости, т. е. общее комплексное сопротивление параллельных ветвей; найденное комплексное сопротивление суммируется с комплексным сопротивлением последовательно включенного участка. Полученное суммарное

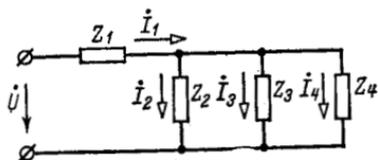


Рис. 4-5. Смешанное соединение.

комплексное сопротивление эквивалентно сопротивлению исходной цепи со смешанным соединением.

Расчетные выражения для рассматриваемого случая будут следующие:

$$Y_9 = Y_2 + Y_3 + Y_4 = \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4}.$$

Суммарное комплексное сопротивление всей цепи равно:

$$Z = Z_1 + \frac{1}{Y_9} = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3 Z_4}{Z_2 Z_3 + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4},$$

а суммарный ток

$$I_1 = \frac{\dot{U}}{Z}.$$

Токи в ветвях относятся, как комплексные проводимости ветвей:

$$I_2 = I_1 \frac{Y_2}{Y_9}; \quad I_3 = I_1 \frac{Y_3}{Y_9}; \quad I_4 = I_1 \frac{Y_4}{Y_9}.$$

Таким образом, многоконтурная электрическая схема со смешанным соединением приводится к одноконтурной,

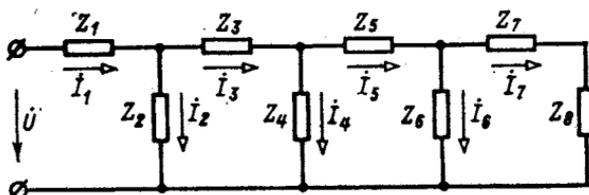


Рис. 4-6. Цепная схема.

имеющей суммарное комплексное сопротивление  $Z$  или соответственно суммарную комплексную проводимость  $Y$ . Распределение токов и напряжений в смешанной цепи подчиняется правилам, указанным в предыдущем параграфе.

Описанный выше порядок преобразования схемы и нахождения распределения токов принципиально применим и для так называемой цепной схемы, показанной на рис. 4-6. Просуммировав комплексные сопротивления  $Z_7$  и  $Z_8$  в последней ветви, найдем комплексную проводимость ветви, которую алгебраически сложим с  $1/Z_6$  и получим суммарную комплексную проводимость двух последних ветвей; вычислив обратную величину, т. е. комплексное сопротивление, прибавим к ней  $Z_5$ . Продолжая

таким образом дальше, получим в итоге результирующее комплексное сопротивление цепи и соответственно суммарный ток  $I_1$ , который может быть путем последовательных вычислений распределен между всеми ветвями сложной цепи.

Однако такой способ расчета цепной схемы является достаточно трудоемким и утомительным. Более целесообразно в этом случае воспользоваться другим методом, который известен под названием метода подобия или единичного тока.

Задавшись током в последней ветви, равным единице ( $I_7' = 1$ ), находим напряжение на комплексном сопротивлении  $Z_6$ , равное  $(Z_7 + Z_8) \cdot 1$ . При этом ток  $I_6' = \frac{Z_7 + Z_8}{Z_6}$ . Следовательно,

$$I_5' = I_6' + I_7' = \frac{Z_7 + Z_8}{Z_6} + 1.$$

Прибавив к напряжению на  $Z_6$  падение напряжения от тока  $I_5'$  в комплексном сопротивлении  $Z_5$ , получим напряжение на  $Z_4$ . Продолжая таким образом дальше, найдем в конечном итоге ток  $I_1'$  и напряжение  $U'$ . Ввиду того что ток  $I_7'$  был произвольно выбран равным единице, полученное напряжение не будет равно заданному напряжению  $U$  на выводах цепи. Для нахождения действительного распределения токов в схеме необходимо все вычисленные значения токов умножить на отношение  $U/U'$ .

#### 4-3. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ УЧАСТКИ ЦЕПИ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ СОЕДИНЕНИЯМИ

Обозначим комплексное сопротивление участка цепи, состоящего из двух последовательно соединенных элементов, через  $Z = r + jx$ . Комплексная проводимость данного участка цепи равна  $Y = 1/Z = g - jb$ , причем активная и реактивная проводимости:

$$g = \frac{r}{r^2 + x^2}; \quad b = \frac{x}{r^2 + x^2}.$$

Если два элемента с проводимостями  $g$  и  $b$ , вычисленными по этим формулам, соединить параллельно, то суммарная комплексная проводимость будет равна  $Y$  и соответственно комплексное сопротивление будет равно  $Z$ .



Такие две цепи с последовательным и параллельным соединениями, имеющие одинаковые сопротивления на выводах, называются эквивалентными.

Ввиду того что реактивное сопротивление  $x$ , входящее в расчетные формулы, в общем случае зависит от частоты, условие эквивалентности этих цепей выполняется только при той частоте, для которой вычислено  $x$ .

Пусть, например, задана схема с последовательным соединением сопротивления  $r_1$  и индуктивности  $L_1$  (рис. 4-7, а). Преобразуем ее в схему с параллельным соединением элементов (рис. 4-7, б).

Активная и реактивная проводимости исходной цепи:

$$g = \frac{r_1}{r_1^2 + (\omega L_1)^2}; \quad b = \frac{\omega L_1}{r_1^2 + (\omega L_1)^2}.$$

Из условия эквивалентности цепей следует, что параметры новой цепи будут:

$$r_2 = \frac{1}{g} = \frac{r_1^2 + (\omega L_1)^2}{r_1}; \quad \omega L_2 = \frac{1}{b} = \frac{r_1^2 + (\omega L_1)^2}{\omega L_1}.$$

Вычислив по этим формулам  $r_2$  и  $L_2$ , получим схему цепи, эквивалентной исходной при данной частоте  $\omega$ . При других значениях частоты  $\omega$  параметры  $r_2$  и  $L_2$  будут иметь другие значения, следовательно эквивалентность цепей нарушится.

При  $r_1^2 \ll (\omega L_1)^2$ , например, при достаточно высокой частоте:

$$r_2 \approx \frac{(\omega L_1)^2}{r_1} \quad \text{и} \quad L_2 \approx L_1.$$

Рис. 4-7. Активно-индуктивные цепи, эквивалентные при определенной частоте.

Если исходной является схема рис. 4-7, б и заданными параметрами являются  $r_2$ ,  $L_2$  и  $\omega$ , то параметры эквивалентной цепи (рис. 4-7, а) определяются из выражений:

$$r_1 = \frac{g}{g^2 + b^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{r_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L_2}\right)^2};$$

$$\omega L_1 = \frac{b}{g^2 + b^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{r_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L_2}\right)^2}.$$

Из полученных выражений видно, что числовые значения  $r_1$  и  $L_1$  эквивалентной цепи зависят от частоты.

Условия эквивалентности для цепей с последовательным и параллельным соединением сопротивления и емкости имеют вид:

$$r_2 = r_1 \left[ 1 + \frac{1}{(\omega C_1 r_1)^2} \right]; \quad C_2 = C_1 \frac{1}{1 + (\omega C_1 r_1)^2};$$

$$r_1 = r_2 \frac{1}{1 + (\omega C_2 r_2)^2}; \quad C_1 = C_2 \left[ 1 + \frac{1}{(\omega C_2 r_2)^2} \right].$$

При достаточно высокой частоте  $(\omega C_2 r_2)^2 \gg 1$ , и тогда

$$r_1 \approx \frac{1}{r_2 (\omega C_2)^2};$$

$$C_1 \approx C_2.$$

#### 4-4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА В ЭКВИВАЛЕНТНУЮ ЗВЕЗДУ

Преобразованием треугольника в эквивалентную звезду называется такая замена части цепи, соединенной по схеме треугольником, цепью, соединенной по схеме звезды, при которой токи и напряжения в остальной части цепи

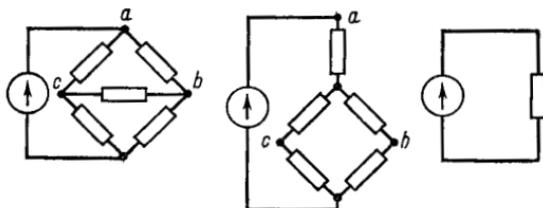


Рис. 4-8. Упрощение схемы преобразованием треугольника в звезду.

сохраняются неизменными. Иначе говоря, эквивалентность треугольника и звезды понимается в том смысле, что при одинаковых напряжениях между одноименными выводами токи, входящие в одноименные выводы, одинаковы. Это равносильно тому, что мощности в этих цепях одинаковы.

На рис. 4-8 показан случай, когда преобразование треугольника в эквивалентную звезду дает возможность преобразовать многоконтурную схему в одноконтурную.

Для вывода расчетных выражений, служащих для преобразования треугольника в эквивалентную звезду, ниже приняты следующие обозначения (рис. 4-9):

$Z_{12}$ ,  $Z_{23}$ ,  $Z_{31}$  — сопротивления сторон треугольника;

$Z_1, Z_2, Z_3$  — сопротивления лучей звезды;  
 $I_1, I_2, I_3$  — токи, подходящие к выводам 1, 2, 3;  
 $I_{12}, I_{23}, I_{31}$  — токи в ветвях треугольника.

Выразим токи в ветвях треугольника через проходящие токи.

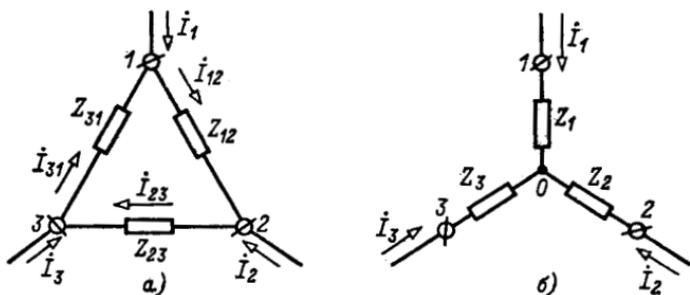


Рис. 4-9. Соединения треугольником (а) и звездой (б).

По второму закону Кирхгофа сумма напряжений в контуре треугольника равна нулю:

$$Z_{12} I_{12} + Z_{23} I_{23} + Z_{31} I_{31} = 0.$$

По первому закону Кирхгофа для узлов 2 и 1

$$I_{23} = I_{12} + I_2; \quad I_{31} = I_{12} - I_1.$$

Решение этих уравнений относительно  $I_{12}$  дает:

$$I_{12} = \frac{Z_{31} I_1 - Z_{23} I_2}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}.$$

Напряжение между выводами 1 и 2 схемы рис. 4-9, а будет:

$$\dot{U}_{12} = Z_{12} I_{12} = \frac{Z_{31} Z_{12} I_1 - Z_{12} Z_{23} I_2}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}},$$

а в схеме рис. 4-9, б оно равно:

$$\dot{U}_{12} = Z_1 I_1 - Z_2 I_2.$$

Для эквивалентности необходимо равенство напряжений  $\dot{U}_{12}$  при всяких токах  $I_1$  и  $I_2$ , т. е.

$$\frac{Z_{31} Z_{12}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} I_1 - \frac{Z_{12} Z_{23}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} I_2 = Z_1 I_1 - Z_2 I_2.$$

Это возможно при условии:

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= \frac{Z_{31}Z_{12}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}; \\ Z_2 &= \frac{Z_{12}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}; \\ Z_3 &= \frac{Z_{23}Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}. \end{aligned} \right\} \quad (4-1)$$

Третье выражение получается в результате круговой замены индексов.

Итак, комплексное сопротивление луча звезды равно произведению комплексных сопротивлений прилегающих сторон треугольника, деленному на сумму комплексных сопротивлений трех сторон треугольника.

Выше было получено выражение для тока в стороне 1—2 треугольника в зависимости от токов  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$ . Круговой заменой индексов можно получить токи в двух других сторонах треугольника:

$$\dot{I}_{23} = \frac{Z_{12}\dot{I}_2 - Z_{31}\dot{I}_3}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} \quad \text{и} \quad \dot{I}_{31} = \frac{Z_{23}\dot{I}_3 - Z_{12}\dot{I}_1}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}.$$

#### 4.5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗВЕЗДЫ В ЭКВИВАЛЕНТНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

В расчетах также возникает необходимость замены звезды эквивалентным треугольником. На рис. 4-10 показан, например, случай, когда такая замена позволяет

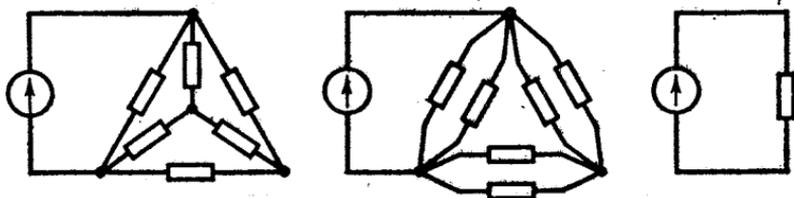


Рис. 4-10. Упрощение схемы преобразованием звезды в треугольник.

преобразовать сложную электрическую схему в одноконтурную.

При переходе от звезды к треугольнику заданными являются сопротивления звезды  $Z_1, Z_2, Z_3$ . Выражения для искомых сопротивлений треугольника находятся в результате совместного решения трех уравнений (4-1).

Деление третьего уравнения на первое, а затем на второе дает:

$$\frac{Z_3}{Z_1} = \frac{Z_{23}}{Z_{12}} \quad \text{и} \quad \frac{Z_3}{Z_2} = \frac{Z_{31}}{Z_{12}}.$$

Выражая отсюда  $Z_{23}$  и  $Z_{31}$  через  $Z_{12}$  и подставляя их в первое уравнение (4-1), получим:

$$Z_1 \left[ Z_{12} + Z_{12} \frac{Z_3}{Z_1} + Z_{12} \frac{Z_3}{Z_2} \right] = Z_{12}^2 \frac{Z_3}{Z_2},$$

откуда

$$Z_{12} = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3}. \quad (4-2)$$

Аналогично круговой заменой индексов получим:

$$Z_{23} = Z_2 + Z_3 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_1} \quad (4-2a)$$

и

$$Z_{31} = Z_3 + Z_1 + \frac{Z_3 Z_1}{Z_2}. \quad (4-2б)$$

Следовательно, *комплексное сопротивление стороны треугольника равно сумме комплексных сопротивлений прилегающих лучей звезды и произведения их, деленного на сопротивление третьего луча.*

Токи в лучах звезды легко выражаются через токи в сторонах треугольника. С учетом положительных направлений на рис. 4-9 имеем:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{12} - \dot{I}_{31}; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{23} - \dot{I}_{12}; \quad \dot{I}_3 = \dot{I}_{31} - \dot{I}_{23}.$$

#### 4-6. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ИСТОЧНИКИ Э. Д. С. И ТОКА

Два разнородных источника электрической энергии — источник э. д. с. и источник тока — считаются эквивалентными, если при замене одного источника другим токи и напряжения во внешней электрической цепи, с которой эти источники соединяются, остаются неизменными. На рис. 4-11 изображены эквивалентные источники тока, посылающие во внешнюю цепь ток  $\dot{I}_1$  и поддерживающие на своих выводах одинаковое напряжение  $\dot{U}$ .

Условием эквивалентности источников, именуемым в дальнейшем правилом об эквивалентных источниках э. д. с. и тока, служит следующее соотношение между э. д. с.  $\dot{E}$  источника э. д. с. и током  $\dot{I}$



источника тока:

$$\dot{E} = Z\dot{I}, \quad (4-3)$$

где  $Z$  — внутреннее комплексное сопротивление как источника э. д. с., так и источника тока.

Действительно, напряжение  $\dot{U}$  на источнике э. д. с. получается в результате вычитания из э. д. с.  $\dot{E}$  падения напряжения от тока  $\dot{I}_1$  в комплексном сопротивлении  $Z$  источника (рис. 4-11, а).

Соответственно напряжение  $\dot{U}$  на источнике тока при том же токе  $\dot{I}_1$ , посылаемом во внешнюю цепь, равно падению напряжения от тока  $\dot{I} - \dot{I}_1$  в комплексном сопротивлении  $Z$  источника (рис. 4-11, б).

В обоих случаях напряжения на выводах обоих источников одинаковы:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{E} - Z\dot{I}_1 = Z(\dot{I} - \dot{I}_1) = \\ &= Z\dot{I} - Z\dot{I}_1, \end{aligned}$$

т. е. получается условие (4-3), не зависящее от тока  $\dot{I}_1$  нагрузки.

При отсоединении эквивалентных источников э. д. с. и тока от внешней цепи ( $I_1 = 0$ ) напряжение на выводах обоих источников равно  $\dot{E}$ . Именно это обстоятельство и равенство внутренних комплексных сопротивлений обоих источников и обеспечивают их эквивалентность при любом режиме работы (см. § 7-9).

Следует заметить, что мощности, расходуемые во внутренних сопротивлениях эквивалентных источников э. д. с. и тока, неодинаковы. В первом случае полная мощность, расходуемая в источнике, равна  $z\dot{I}_1^2$ , во втором случае  $z|\dot{I} - \dot{I}_1|^2$ .

Например, при отсоединении источников от внешней цепи в первом случае мощность в источнике не расходуется, а во втором случае она составляет  $z\dot{I}^2$ .

Поэтому эквивалентность источников следует понимать только в смысле неизменности токов, напряжений и мощностей во внешней электрической цепи, присоединенной к источникам.

Если внутреннее сопротивление источника э. д. с. равно нулю, то непосредственное применение формулы (4-3) для нахождения эквивалентного источника тока по задан-

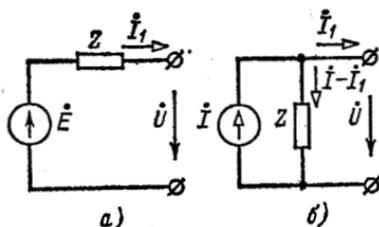


Рис. 4-11. Эквивалентные источники э. д. с. (а) и тока (б).

ной э. д. с. источника не представляется возможным. В таких случаях сопротивление внешней цепи, включенной последовательно с э. д. с., можно рассматривать в качестве внутреннего сопротивления источника, что позволит применить формулу (4-3).

В случае сложной электрической цепи замена источника э. д. с. эквивалентным источником тока или наоборот может иногда упростить расчет.

Целесообразность такой замены проиллюстрирована, в частности, в следующем параграфе.

#### 4-7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СХЕМ С ДВУМЯ УЗЛАМИ

Применим правило об эквивалентных источниках э. д. с. и тока к преобразованию схемы с параллельным соединением  $n$  ветвей, содержащих источники э. д. с. (рис. 4-12, а).

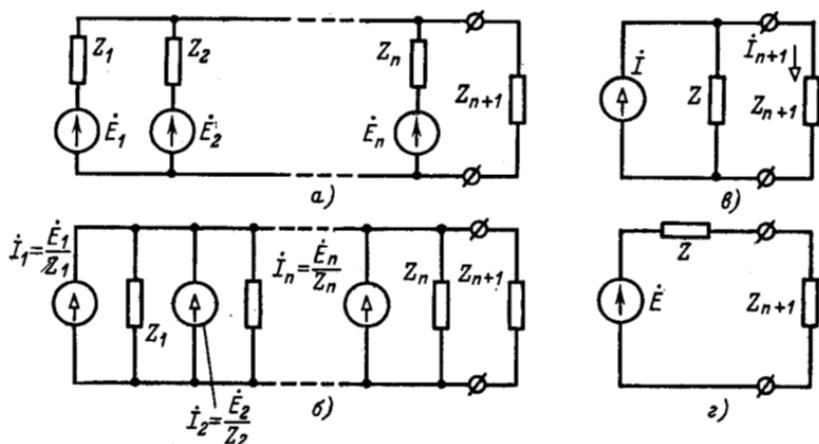


Рис. 4-12. Преобразования параллельного соединения ветвей с источниками э. д. с.

Заменяя заданные источники э. д. с. источниками тока, получаем схему рис. 4-12, б. Источники тока в совокупности образуют эквивалентный источник тока  $\dot{I}$  (рис. 4-12, в), причем

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dots + \dot{I}_n = \\ &= \frac{\dot{E}_1}{Z_1} + \frac{\dot{E}_2}{Z_2} + \dots + \frac{\dot{E}_n}{Z_n} = \sum_{k=1}^n Y_k \dot{E}_k \end{aligned}$$

и

$$Z = \frac{1}{\sum_{k=1}^n Y_k}$$

Пользуясь этим соотношением, можно в конечном итоге перейти от схемы рис. 4-12, *б* к схеме рис. 4-12, *г*, являющейся эквивалентом исходной схемы рис. 4-21, *а*. Здесь

$$\dot{E} = Zi = \frac{\sum_{k=1}^n Y_k \dot{E}_k}{\sum_{k=1}^n Y_k}$$

Таким образом,  $n$  параллельных ветвей с источниками э. д. с. между двумя узлами могут быть заменены одним источником тока (рис. 4-12, *б*) или источником э. д. с. (рис. 4-12, *г*).

Ток во внешней цепи (в ветви с сопротивлением  $Z_{n+1}$ ) равен:

$$i_{n+1} = i \frac{Z}{Z + Z_{n+1}} = \frac{\dot{E}}{Z + Z_{n+1}}$$

Напряжение между двумя узлами находится по формуле

$$\dot{U} = i \left[ \frac{ZZ_{n+1}}{Z + Z_{n+1}} \right] = i \frac{1}{\sum_{k=1}^{n+1} Y_k} = \frac{\sum_{k=1}^n Y_k \dot{E}_k}{\sum_{k=1}^{n+1} Y_k} \quad (4-4)$$

Выведенные здесь выражения широко используются для расчета электрических цепей с двумя узлами, а также более сложных цепей, приводящихся к двум узлам.

#### 4-8. ПЕРЕНОС ИСТОЧНИКОВ В СХЕМЕ

Расчет электрической цепи облегчается в ряде случаев в результате переноса в схеме источников э. д. с. или тока. Как это видно из уравнений Кирхгофа, токи в схеме определяются заданными величинами суммарных э. д. с. в контурах независимо от того, из каких отдельных слагающих они состоят. Поэтому изменение расположения



в схеме источников э. д. с., при котором суммарные э. д. с. во всех контурах сохраняются неизменными, не влияет на токи в ветвях. Аналогично напряжения на ветвях определяются заданными суммарными токами источников тока в узлах, и поэтому изменение расположения в схеме источников тока, при котором их суммарные токи во всех узлах сохраняются неизменными, не влияет на напряжения в схеме.

Если, например, требуется исключить источник э. д. с. из какой-либо ветви, то в данную ветвь вводится компенсирующая э. д. с., причем точно такая же э. д. с. вводится одновременно во все остальные ветви, сходящиеся

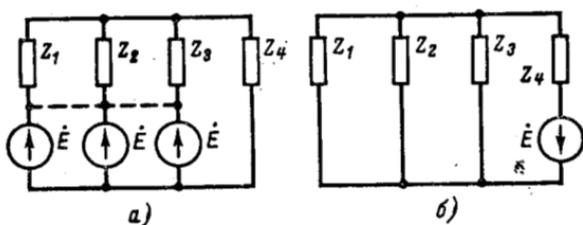


Рис. 4-13. Перенос источников э. д. с. в схеме.

в одном из узлов данной ветви. Компенсирующая и дополнительные э. д. с. имеют одинаковое направление по отношению к рассматриваемому узлу. В результате этого источник э. д. с. из ветви исключается и появляются источники э. д. с. в других ветвях схемы. Суммарные э. д. с. во всех контурах и соответственно токи в ветвях остаются прежними.

Итак, источник э. д. с. может быть перенесен из какой-либо ветви схемы во все другие ветви, присоединенные к узлу данной ветви, без изменения токов в схеме.

Справедливо и обратное положение: если во всех ветвях, кроме одной, сходящихся в узле, имеются одинаковые источники э. д. с. (рис. 4-13, а), направленные все к одному узлу или все от узла, то они могут быть заменены одним источником э. д. с. в ветви, в которой источник отсутствовал (рис. 4-13, б).

Это положение подтверждается тем, что суммарные э. д. с. в контурах схем на рис. 4-13, а и б одинаковы.

Имеется и другое доказательство данного положения: ввиду равенства э. д. с. всех источников вторые выводы

их могут быть объединены, как имеющие одинаковый потенциал. В результате такого объединения, показанного на рис. 4-13, а пунктиром, получается схема рис. 4-13, б.

В случае переноса источников тока они присоединяются к узлам схемы так, чтобы оставались неизменными их суммарные токи в узлах.

Так, например, несмотря на то, что источники тока размещены в схемах рис. 4-14, а и б различно, суммарные токи источников в узлах обеих схем одинаковы. Поэтому и напряжения между узлами не изменились.

Итак, источник тока может быть заменен источниками тока, подключенными параллельно всем ветвям, которые составляли контур с рассматриваемым источником.

Перенос источников в схеме успешно сочетается на практике с различными методами преобразований и расчетов (см. пример 4-1).

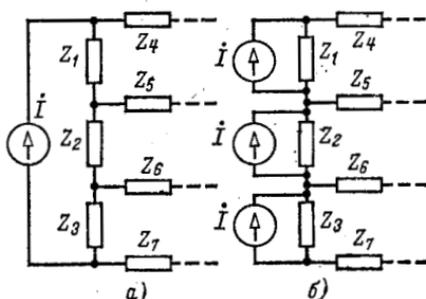


Рис. 4-14. Перенос источника тока в схеме.

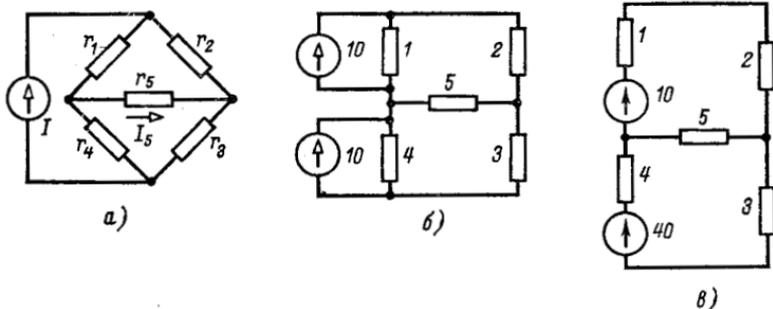


Рис. 4-15. Пример 4-1.

**Пример 4-1.** Вычислить ток в диагональной ветви  $r_5$  мостовой схемы рис. 4-15, а.

Дано:  $I = 10$  А;  $r_1 = 1$  Ом;  $r_2 = 2$  Ом;  $r_3 = 3$  Ом;  $r_4 = 4$  Ом;  $r_5 = 5$  Ом.

Заданный источник тока может быть заменен двумя источниками, подключенными параллельно сопротивлениям  $r_1$  и  $r_4$  (рис. 4-15, б). Пользуясь условием эквивалентности источников э. д. с. и тока, полу-

чаем схему рис. 4-15, *в* с двумя узлами. По формуле (4-4) напряжение на ветви  $r_5$  равно  $\frac{40 - 10}{\frac{1}{7} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}} = 3,52$  В. Искомый ток

$$I_5 = \frac{3,52}{5} = 0,704 \text{ А.}$$

#### 4-9. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ СХЕМ

Схема электрической цепи, в которой имеется ось симметрии, называется симметричной. Например, схема рис. 4-16, *а* симметрична относительно вертикальной оси. В симметричных схемах легко выявляются точки или узлы с одинаковым потенциалом. В ветвях, присоединенных к таким узлам, токи равны нулю. Поэтому эти ветви

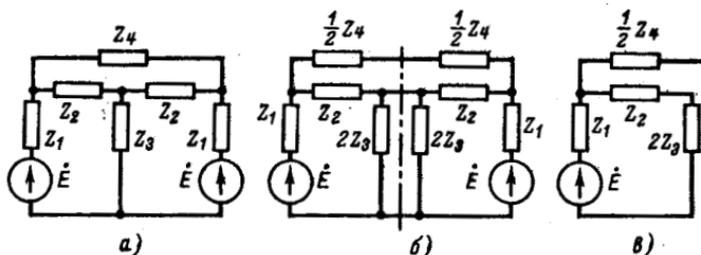


Рис. 4-16. Симметричная цепь (*а* и *б*) и ее отсеченная половина (*в*),

можно разрезать, не нарушая распределения токов и напряжений в схеме. Точки, имеющие одинаковый потенциал, могут быть объединены. Рассечение ветвей, по которым не проходит ток, и объединение точек равного потенциала упрощают схему и облегчают расчет.

Так, в симметричной схеме рис. 4-16, *б* токи в соединениях, пересекающих ось симметрии, отсутствуют. Разрезав схему по оси симметрии, получим с обеих сторон одноконтурную схему рис. 4-16, *в*, которая легко рассчитывается.

Допустим теперь, что полярность источников в симметричной схеме неодинакова (рис. 4-17, *а*). В этом случае (равенство э. д. с. источников и различие их полярности) токи в симметричных ветвях (например,  $I_1$  и  $I_2$ ) и напряжения между соответствующими парами выводов, симмет-

рично расположенными относительно оси, равны и противоположны по знаку. Отсюда следует, что напряжения между всеми точками, лежащими на оси симметрии, равны нулю ( $\dot{U} = -\dot{U}$ , т. е.  $\dot{U} = 0$ ). Поэтому все точки схемы на оси симметрии могут быть замкнуты накоротко (рис. 4-17, б).

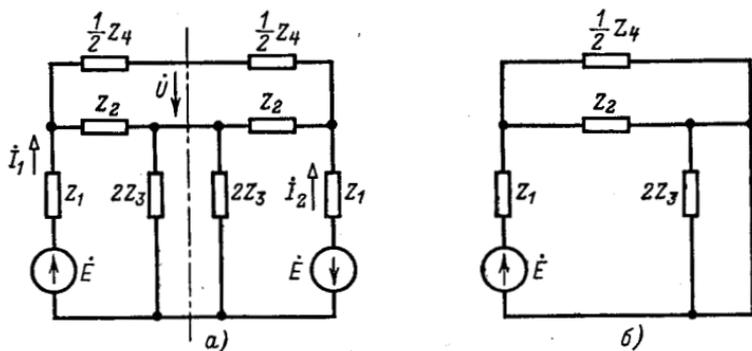


Рис. 4-17. Симметричная цепь с неодинаковой полярностью источников (а) и ее закороченная половина (б),

Таким образом, расчет сложных симметричных схем приводится к расчету более простых схем.

На рис. 4-18, а и б показана симметричная мостовая схема, имеющая две оси симметрии — вертикальную и

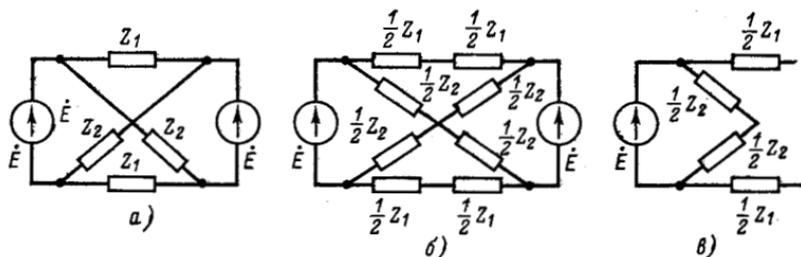


Рис. 4-18. Симметричная мостовая схема (а, б) и ее преобразованная часть (в),

горизонтальную. В продольных ветвях ток отсутствует; потенциалы средних точек поперечных (перекрещенных) ветвей одинаковы.

Поэтому продольные ветви могут быть рассечены, а средние точки поперечных ветвей — объединены. В ре-

зультате с обеих сторон получится одноконтурная схема (рис. 4-18, в), расчет которой крайне прост.

Если изменить полярность одного из источников (рис. 4-19, а), то роли продольных и поперечных ветвей поменяются и преобразованная часть схемы примет вид, показанный на рис. 4-19, б.

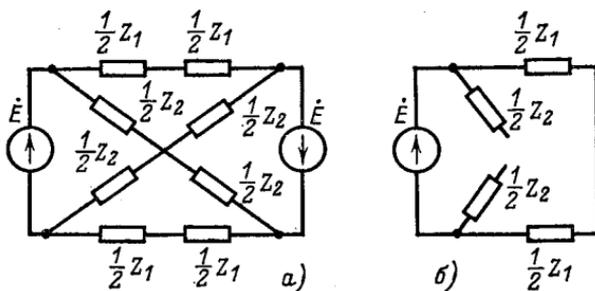


Рис. 4-19. Симметричная мостовая схема (а) и ее преобразованная часть (б).

В разобранных выше примерах э. д. с. источников были равны. В случае неравенства э. д. с. источников преобразование симметричной схемы удобно сочетается с методом наложения (см. пример 7-5).

#### 4-10. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

4-1. Сопротивление 2 Ом и емкость 0,191 мкФ соединены параллельно. Найти эквивалентную схему с последовательным соединением  $r$  и  $C$  при частотах  $f = 1; 1,5; 2$  МГц.

Ответ:  $r = 0,296; 0,143; 0,083$  Ом;  $C = 0,224; 0,206; 0,199$  мкФ.

4-2. Параллельно соединены ветви, одна из которых состоит из  $C = 10$  мкФ, а вторая — из последовательно соединенных  $r = 10$  Ом и  $L = 100$  мГ. Вычислить комплексное сопротивление цепи при  $\omega = 377$  рад/с.

Ответ:  $13,5 + j43,4$  Ом.

4-3. Добавив в схеме, взятой из предыдущей задачи, последовательно  $r = 10$  Ом, и подведя к цепи  $U = 100 \angle 0^\circ$  В, вычислить токи в ветвях и суммарный ток; построить векторную диаграмму.

Ответ:  $0,347 \angle 101^\circ 6'; 2,36 \angle -64^\circ; 2,02 \angle -61^\circ 30'$  А.

4-4. Индуктивная катушка, имеющая  $r = 8$  Ом и  $L = 0,05$  Г, соединена параллельно с  $C = 1$  мкФ. Найти частоту, при которой напряжение на данной цепи в фазе с суммарным током; определить сопротивление цепи.

Ответ: 713 Гц; 6250 Ом.

4-5. Параллельно соединены две ветви: первая ветвь состоит из последовательно соединенных  $r_1$  и  $L$  и ее сопротивление равно  $40 +$

+ j30 Ом; вторая состоит из последовательно соединенных  $r_2$  и  $C$  и ее сопротивление равно  $80 - j150$  Ом. Определить сопротивление и проводимость всей цепи, если частота возрастет в 1,5 раза; начертить на комплексной плоскости сопротивления и проводимости ветвей и всей цепи.

О т в е т:  $58,4 \angle 21^\circ 35'$  Ом;  $1,71 \cdot 10^{-2} \angle -21^\circ 35'$  См.

4-6. Параллельно соединены три ветви: первая состоит из  $r_1 = 25$  Ом, вторая — из  $C = 50$  мкФ, третья — из индуктивной катушки, имеющей  $r_2 = 10$  Ом и  $L = 50$  мГ. Напряжение на ветвях равно  $100 \sin 400 t$  В. Вычислить действующее значение суммарного тока и активную мощность цепи.

О т в е т: 4,47 А; 300 Вт.

4-7. Индуктивная катушка, имеющая  $r$  и  $L$ , соединена параллельно с емкостью  $C$ . Найти  $L$  и  $C$ , при которых сопротивление всей цепи равно  $500 \angle 0^\circ$  Ом, если  $r = 100$  Ом и угловая частота  $\omega = 10^5$  рад/с.

О т в е т:  $L = 2$  мГ,  $C = 0,04$  мкФ.

4-8. Последовательно с  $C$  подключена цепь, состоящая из  $r = 500$  Ом и  $L$ , соединенных параллельно. Приняв  $\omega = 10^5$  рад/с, найти  $L$  и  $C$ , при которых общее сопротивление равно  $100 \angle 0^\circ$  Ом.

О т в е т: 2,5 мГ; 0,05 мкФ.

4-9. Доказать, что полное сопротивление цепи, состоящей из параллельно соединенных индуктивной катушки ( $r$ ,  $L$ ) и емкости ( $C$ ), при угловой частоте  $\omega = 1/\sqrt{2LC}$  не зависит от  $r$ .

4-10. Сопротивления  $50 - j20$ ,  $100 + j0$  и  $40 + j60$  Ом соединены треугольником. Преобразовать данный треугольник в эквивалентную звезду.

О т в е т:  $18,5 + j7,7$ ;  $23,1 - j15,4$ ;  $26,5 + j26$  Ом.

4-11. Индуктивная катушка, имеющая сопротивление  $15 + j20$  Ом, последовательно подключена к участку цепи, состоящему из параллельно соединенных  $r = 10$  Ом и  $C = \frac{1}{30\omega}$  Ф. Определить действующие ток в индуктивной катушке и напряжения на  $r$  и  $C$ , если ко всей цепи приложено напряжение  $100 \angle 0^\circ$  В.

О т в е т: 2,76 — j1,96 А; 19 — j26 В.

4-12. Два генератора, имеющие одинаковую частоту, работают параллельно на общую нагрузку. Заданы: комплексные э. д. с. генераторов  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$ , комплексные сопротивления генераторов  $Z_1$  и  $Z_2$ , комплексное сопротивление нагрузки  $Z_3$ .

Определить ток в нагрузке.

О т в е т:

$$\frac{Z_2 \dot{E}_1 + Z_1 \dot{E}_2}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}$$

4-13. В чем заключается удобство расчета схемы с двумя узлами?

4-14. В каких случаях целесообразно применять метод единичного тока?

4-15. Привести пример, в котором требуется преобразовать звезду в треугольник (или треугольник в звезду).

4-16. Вывести условия эквивалентности (при определенной частоте) активно-емкостных цепей с последовательным и параллельным соединением сопротивления и емкости.

4-17. Пользуясь условиями (4-1), выразить токи в сторонах треугольника через токи эквивалентной звезды.

## РЕЗОНАНС В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

## 5-1. РЕЗОНАНСНЫЕ (КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ) ЦЕПИ

Резонансными или колебательными цепями называются электрические цепи, в которых могут возникать явления резонанса напряжений или токов.

Резонанс представляет собой такой режим пассивной электрической цепи, содержащей индуктивности и емкости, при котором реактивное сопротивление и реактивная проводимость цепи равны нулю; соответственно равна нулю реактивная мощность на выводах цепи.

Резонанс напряжения наблюдается в электрической цепи с последовательным соединением участков, содержащих индуктивности и емкости. Неразветвленная цепь, состоящая из последовательно соединенных элементов  $r$ ,  $L$  и  $C$ , рассмотренная в § 2-7, представляет собой один из простейших случаев такой цепи. В радиотехнике ее называют последовательным колебательным контуром.

При резонансе напряжений индуктивное сопротивление одной части цепи компенсируется емкостным сопротивлением другой ее части, последовательно соединенной с первой. В результате *реактивное сопротивление и реактивная мощность на выводах цепи равны нулю.*

В свою очередь резонанс токов наблюдается в электрической цепи с параллельным соединением участков, содержащих индуктивности и емкости. Один из простейших примеров такой цепи, состоящей из параллельно соединенных элементов  $r$ ,  $L$  и  $C$ , был рассмотрен в § 2-8. В радиотехнике такую цепь называют параллельным колебательным контуром.

При резонансе токов индуктивная проводимость одной части цепи компенсируется емкостной проводимостью другой ее части, параллельно соединенной с первой. В результате *реактивная проводимость и реактивная мощность на выводах цепи равны нулю.*

Частоты, при которых наблюдается явление резонанса, называются резонансными частотами.

Исследование резонансных режимов в электрических цепях заключается в нахождении резонансных частот,



зависимостей различных величин от частоты<sup>1</sup> или параметров  $L$  и  $C$ , а также в рассмотрении энергетических соотношений при резонансе.

Резонансные цепи очень широко применяются в электротехнике и представляют собой неотъемлемую часть всякого радиотехнического устройства. Изучению явления резонанса, свойств и частотных характеристик простейших резонансных цепей посвящена данная глава. Электрические фильтры, которые также являются резонансными цепями, рассмотрены в гл. 10.

## 5-2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР. РЕЗОНАНС НАПРЯЖЕНИЙ

Резонансная цепь с последовательным соединением  $r$ ,  $L$  и  $C$  (рис. 5-1) является простейшей цепью для изучения явления резонанса напряжений и подробно рассматривается ниже. Комплексное сопротивление такой цепи зависит от частоты:

$$Z = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \quad (5-1)$$

Резонанс напряжений наступает при частоте  $\omega_0$ , когда

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C};$$

отсюда

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (5-2)$$

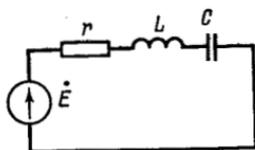


Рис. 5-1. Последовательный колебательный контур.

Мгновенные энергии выражаются формулами:

$$\omega_L = \frac{Li^2}{2}; \quad \omega_C = \frac{Cu_c^2}{2}.$$

Если принять  $i = I_m \sin \omega_0 t$ , то  $u_C = -U_{Cm} \cos \omega_0 t$ . Поэтому

$$\omega_L = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega_0 t$$

и

$$\omega_C = \frac{CU_{Cm}^2}{2} \cos^2 \omega_0 t.$$

<sup>1</sup> Такие зависимости называются частотными характеристиками.



Максимальные значения этих энергий равны друг другу, так как

$$\frac{CU_m^2}{2} = \frac{C}{2} \left( \frac{I_m}{\omega_0 C} \right)^2 = \frac{LI_m^2}{2}.$$

Это следует и из того, что реактивное сопротивление цепи, содержащей индуктивность и емкость, при любой схеме соединений пропорционально разности максимальных значений энергии, запасаемой в магнитном и электрическом полях (см. § 3-4):

$$x = \frac{\omega}{f^2} (W_{L \text{ макс}} - W_{C \text{ макс}}).$$

Поэтому условию резонанса ( $x = 0$ ) соответствует равенство

$$W_{L \text{ макс}} = W_{C \text{ макс}}.$$

Мгновенные значения  $\omega_L$  и  $\omega_C$  колеблются с удвоенной частотой около среднего значения  $LI_m^2/4$ , причем происходит непрерывное перераспределение энергии магнитного и электрического полей, суммарное значение которой постоянно:

$$\omega_L + \omega_C = \frac{LI_m^2}{2} [\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t] = \frac{LI_m^2}{2}.$$

В рассматриваемом случае (резонанс напряжений, рис. 5-1) в цепи не происходит обмена энергии между источником и реактивными элементами цепи, а вся электрическая энергия, поступающая от источника, расходуется в сопротивлении  $r$ .

Мы уже встречались с понятием добротности индуктивной катушки  $Q_L = \omega L/r$  (см. § 2-7) и конденсатора  $Q_C = \omega Cr$  (§ 2-8). Умножив и разделив выражение для  $Q_L$  на  $\frac{1}{2} I_m^2$ , получим:

$$Q_L = \omega \frac{\frac{1}{2} LI_m^2}{\frac{1}{2} r I_m^2} = 2\pi \frac{W_{L \text{ макс}}}{PT}.$$

Здесь  $W_{L \text{ макс}}$  — максимум энергии, периодически запасаемой индуктивностью  $L$ ;  $P$  — активная мощность, расходуемая в сопротивлении при амплитуде тока  $I_m$ .



Аналогично рассуждая, т. е. умножив и разделив выражение  $Q_C$  на  $\frac{1}{2} U_m^2$ , получим:

$$Q_C = \omega \frac{\frac{1}{2} C U_m^2}{\frac{1}{2} \frac{U_m^2}{r}} = 2\pi \frac{W_{C \text{ макс}}}{PT},$$

где  $W_{C \text{ макс}}$  — максимум энергии, периодически запасаемой емкостью  $C$ , а  $P$  — активная мощность потерь в параллельном сопротивлении  $r$  при амплитуде напряжения на емкости  $U_m$ . Следовательно, в обоих случаях добротность определяется в зависимости от отношения максимума энергии реактивного элемента к энергии  $PT$ , выделяемой в виде тепла за период.

В случае резонансной цепи также пользуются понятием добротности цепи, подразумевая под этим в общем случае величину

$$Q = \omega_0 \frac{\Sigma W_{\text{макс}}}{P}; \quad (5-3)$$

здесь  $\omega_0$  — резонансная частота;  $\Sigma W_{\text{макс}}$  — сумма максимальных значений энергии, периодически запасаемой при резонансе в индуктивных (или емкостных) элементах;  $P$  — активная мощность на выводах цепи при резонансе.

Знак  $\Sigma$  в (5-3) относится к случаю, когда число индуктивных (или емкостных) элементов превышает единицу. В рассматриваемом нами случае резонанса напряжений в цепи рис. 5-1 знак  $\Sigma$  опускается.

Для схемы рис. 5-1 на основании (5-3) получаем:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{r} = \frac{1}{\omega_0 C r} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{r} = \frac{\rho}{r}, \quad (5-4)$$

где

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

называется характеристическим (а также волновым) сопротивлением резонансного контура.

Условимся называть относительной расстройкой частоты по отношению к резонансной

частоте контура величину <sup>1</sup>

$$\delta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{\omega}{\omega_0} - 1. \quad (5-5)$$

Сопrotивление контура согласно (5-1) и с учетом (5-2) и (5-4)

$$Z = r \left[ 1 + j \frac{\omega_0 L}{r} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega \omega_0 LC} \right) \right] = r \left[ 1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right],$$

откуда, используя (5-5),  $\frac{\omega}{\omega_0} = \delta + 1$  или  $\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{1}{\delta + 1}$ , получаем:

$$Z = r \left[ 1 + jQ \left( \delta + 1 - \frac{1}{\delta + 1} \right) \right] = r \left( 1 + jQ\delta \frac{\delta + 2}{\delta + 1} \right). \quad (5-6)$$

Следовательно, полное сопротивление цепи

$$z = r \sqrt{1 + Q^2 \delta^2 \left( \frac{\delta + 2}{\delta + 1} \right)^2}$$

и угол

$$\varphi = \arctg \frac{Q\delta(\delta + 2)}{\delta + 1}.$$

Ток в цепи

$$I = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{\dot{E}}{r \left( 1 + jQ\delta \frac{\delta + 2}{\delta + 1} \right)}.$$

При частоте, близкой к резонансной,  $|\delta|$  значительно меньше единицы, и поэтому приближенно

$$\left. \begin{aligned} Z &\approx r(1 + j2Q\delta) = r\sqrt{1 + (2Q\delta)^2} < \varphi; \\ \varphi &\approx \arctg 2Q\delta; \\ I &\approx \frac{\dot{E}}{r(1 + j2Q\delta)}. \end{aligned} \right\} \quad (5-7)$$

Выражения (5-7) практически достаточно точны при  $|\delta| < 0,1$ . При  $|\delta| = 0,2$  погрешность в сопротивлении  $z$  меньше 10%.

На рис. 5-2 кривые даны в относительных значениях: по оси абсцисс отложена относительная расстройка ча-

<sup>1</sup> Следует обратить внимание на то, что частотам выше резонансной ( $\omega > \omega_0$ ) соответствуют положительные значения расстройки  $\delta$ , а частотам ниже резонансной ( $\omega < \omega_0$ ) — отрицательные значения  $\delta$ ; нулевой частоте ( $\omega = 0$ ) соответствует  $\delta = -1$ ; при резонансной частоте  $\delta = 0$ .



стоты  $\delta$ , по оси ординат — отношение полного сопротивления  $z$  к активному сопротивлению  $r$  (рис. 5-2, а) и угол  $\varphi$  (рис. 5-2, б).

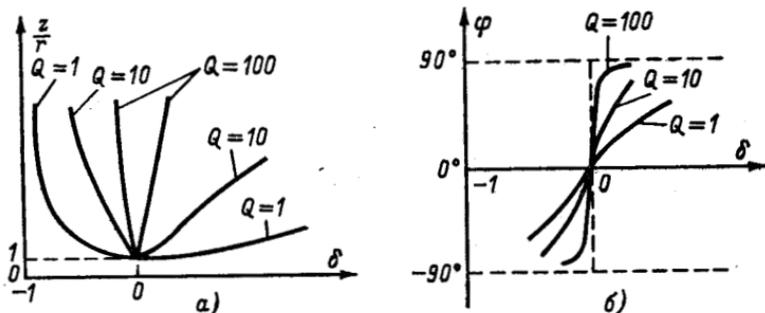


Рис. 5-2. Частотные зависимости сопротивления (а) и угла (б).

Полное сопротивление цепи минимально при резонансе напряжений; при этом ток в цепи достигает своего максимального значения  $I_0$ .

На рис. 5-3 изображены резонансные кривые тока в относительных значениях: по оси абсцисс, как и на предыдущих графиках, отложены значения  $\delta$ , по оси ординат — отношения токов к максимальному току при резонансе:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{E}{z} : \frac{E}{r} = \frac{r}{z} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \delta^2 \left( \frac{\delta + 2}{\delta + 1} \right)^2}} \quad (5-8)$$

Чем выше добротность цепи  $Q$ , тем острее резонансные кривые. Таким образом, величина  $Q$  характеризует остроту резонансной кривой («остроту настройки»); согласно (5-3) чем больше отношение максимума энергии поля реактивного элемента к количеству теплоты, рассеиваемой за один период в резонансном контуре, тем острее резонансная кривая.

Резонансные кривые были построены здесь в зависимости от относительной расстройки частоты  $\delta$ . Можно

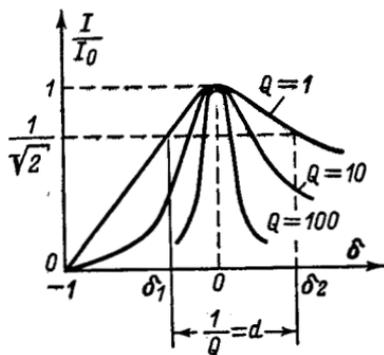


Рис. 5-3. Резонансные кривые тока в относительных единицах.

вывести расчетные выражения и построить резонансные кривые в зависимости от  $\omega$  или относительной частоты  $\omega/\omega_0$ . Следует заметить, что максимумы резонансных кривых на рис. 5-3 равны, так как по оси ординат отложено отношение  $I/I_0$ . Если откладывать ток  $I$ , то при разных  $r$  максимумы резонансных кривых, естественно, не совпадут в одной точке.

Полосу частот вблизи резонанса, на границах которой ток снижается до  $1/\sqrt{2} = 0,707$  максимального (резонансного) значения  $I_0$ , принято называть полосой пропускания резонансного контура. При токе  $I = I_0/\sqrt{2}$  мощность, расходуемая в сопротивлении  $r$ , равна:

$$r \left( \frac{I_0}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} r I_0^2,$$

т. е. составляет половину мощности, расходуемой при резонансе. Поэтому полосу пропускания характеризуют как полосу, границы которой соответствуют половине максимальной мощности. На границах полосы пропускания резонансного контура активное и реактивное сопротивления равны  $r_2 = |x|$ . Это следует из условия

$$r \frac{E^2}{r^2 + x^2} = \frac{1}{2} r \frac{E^2}{r^2},$$

что дает  $r^2 + x^2 = 2r^2$ .

Соответственно и фазовый сдвиг между напряжением на выводах цепи и током составляет  $45^\circ$ ; на нижней границе комплексное сопротивление цепи имеет емкостный характер (ток опережает напряжение) и  $\varphi = -45^\circ$ ; на верхней границе комплексное сопротивление цепи имеет индуктивный характер (ток отстает от напряжения) и  $\varphi = 45^\circ$ .

На основании (5-8) условие для границы полосы пропускания записывается в следующем виде:

$$\sqrt{1 + Q^2 \delta^2 \left( \frac{\delta + 2}{\delta + 1} \right)^2} = \sqrt{2},$$

или

$$Q\delta \frac{\delta + 2}{\delta + 1} = \mp 1,$$

откуда

$$\delta_{1,2} = -1 \mp \frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \quad (5-9)$$

(знак минус перед корнем, получающийся в результате решения квадратного уравнения, опускается, как не имеющий смысла). Индексы 1 и 2 и соответственно знаки минус и плюс в выражении (5-9) относятся к границам ниже и выше резонанса.

По определению полоса пропускания резонансного контура находится из условия

$$\delta_2 - \delta_1 = \frac{1}{Q},$$



или

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{Q} = d. \quad (5-10)$$

Величина  $d$ , обратная добротности контура, называется з а т у х а н и е м контура.

При достаточно высокой добротности резонансного контура ( $Q \gg 1$ ) подкоренное выражение (5-9) может быть приравнено единице, откуда  $\delta_{1,2} \approx \mp \frac{1}{2Q}$ ; т. е. полоса пропускания практически симметрична относительно резонансной частоты.

В радиотехнических устройствах к одному из реактивных элементов колебательного контура, например емкости, подключается нагрузка в виде сопротивления  $r_n$ . Вследствие этого возрастают потери в цепи и соответственно уменьшается добротность. Для определения добротности нагруженного контура параллельное соединение  $r_n$  и  $C$  может быть заменено эквивалентным при резонансной частоте последовательным соединением емкости и «вносимого сопротивления»  $r_{вн}$ . С этой целью используются условия эквивалентности цепей с последовательным и параллельным соединениями (см. § 4-3).

Так как обычно  $\omega_0 C r_n \gg 1$ , то  $r_{вн} \approx \frac{1}{r_n (\omega_0 C)^2}$ . С учетом того, что  $\frac{1}{\omega_0 C} = \rho$ , получаем:  $r_{вн} \approx \rho^2 / r_n$ . При этом, как отмечалось в конце § 4-3, емкости эквивалентных схем могут быть практически приравнены друг другу.

Таким образом, добротность нагруженного контура равна:

$$Q_n = \frac{\rho}{r + r_{вн}} \approx \frac{\rho}{r + \rho^2 / r_n},$$

а затухание увеличивается на вносимое затухание  $d_{вн}$ :

$$d_n = \frac{1}{Q_n} \approx \frac{r}{\rho} + \frac{\rho}{r_n} = d + d_{вн}.$$

Если вносимое сопротивление  $r_{вн}$  значительно превышает сопротивление  $r$ , то

$$Q_n \approx \frac{r_n}{\rho}; \quad d_n \approx \frac{\rho}{r_n} = d_{пн}.$$

Внутреннее сопротивление источника э. д. с.  $R_i$ , добавляемое к сопротивлению  $r$ , влияет на добротность и полосу пропускания колебательного контура: чем больше  $R_i$ , тем ниже добротность и шире полоса пропускания



контура. Поэтому с точки зрения сокращения полосы пропускания последовательного колебательного контура *выгоден источник напряжения с малым внутренним сопротивлением.*

*В условиях, близких к резонансу, напряжения на индуктивности и емкости могут быть весьма велики, что необходимо учитывать во избежание повреждения изоляции.*

На рис. 5-4 показана векторная диаграмма тока и напряжений при резонансе. Напряжения на реактивных элементах при резонансе определяются из выражения

$$\dot{U}_{L0} = -\dot{U}_{C0} = \frac{\dot{E}}{r} j\omega_0 L = j\dot{E}Q. \quad (5-11)$$

При  $Q > 1$  эти напряжения превышают напряжение  $U = E$ , приложенное к резонансному контуру. Однако значения, получаемые на основании (5-11), не являются максимальными: максимум напряжения  $U_L$  располагается

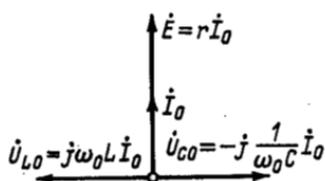


Рис. 5-4. Векторная диаграмма при резонансе напряжений.

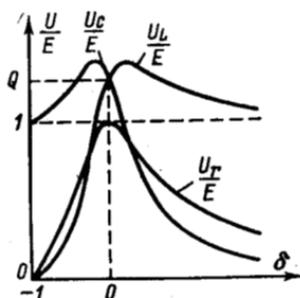


Рис. 5-5. Частотные зависимости напряжений на индуктивности и емкости в относительных единицах.

несколько выше (правее), а максимум  $U_C$  — ниже (левее) резонансной частоты (рис. 5-5).

Напряжение на индуктивности  $U_L = \omega LI$ , равное нулю при  $\omega = 0$ , с увеличением  $\omega$  может возрастать только до тех пор, пока ток не начнет снижаться быстрее, чем возрастает  $\omega$ . После этого  $U_L$  спадает, стремясь в пределе к  $E$ . Напряжение на емкости  $U_C = I/\omega C$ , равное при  $\omega = 0$  приложенному напряжению  $U = E$ , увеличивается, пока ток растет быстрее, чем  $\omega$ ; затем  $U_C$  спадает, стремясь в пределе к нулю. Кривые  $U_L$  и  $U_C$  пересекаются при резонансе, причем ордината точки пересечения в соответствии с (5-11) равна  $QE$ .

Это также вытекает из анализа следующих ниже выражений, полученных с учетом (5-5) и (5-6):

$$\dot{U}_L = \dot{E} \frac{j\omega L}{Z} = \dot{E} \frac{jQ(\delta+1)}{1+jQ\delta \frac{\delta+2}{\delta+1}}$$

и

$$\dot{U}_C = \dot{E} \frac{-j}{\omega C Z} = \dot{E} \frac{-j \frac{Q}{\delta+1}}{1+jQ\delta \frac{\delta+2}{\delta+1}}$$

Напряжение  $U_L$  достигает максимума при

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} - 1,$$

а напряжение  $U_C$  — при <sup>1</sup>

$$\delta = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} - 1.$$

Пренебрегая  $\delta$  по сравнению с единицей, получаем приближенную формулу

$$\dot{U}_L \approx -\dot{U}_C \approx \dot{E} \frac{jQ}{1+j2Q\delta}. \quad (5-12)$$

Возвращаясь к определению понятия добротности рассматриваемой резонансной цепи, мы видим, что наряду с формулами (5-3) и (5-4) добротность цепи характеризуется выражениями (5-10) и (5-11), а именно:

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}; \quad Q = \frac{U_{L0}}{E} = \frac{U_{C0}}{E}.$$

Последняя формула показывает, что добротность рассматриваемой цепи определяется как кратность перенапряжения на  $L$  и  $C$  при резонансной частоте.

Выше была рассмотрена неразветвленная электрическая цепь с последовательно соединенными  $r$ ,  $L$  и  $C$ . Для исследования явления резонанса в более сложных разветвленных цепях, где резонанс напряжений может воз-

<sup>1</sup> Следует отметить, что при  $Q \leq 1/\sqrt{2}$  максимум функции  $U_L$  наступает при  $\delta = \infty$ , т. е. в этом случае  $U_L$  с ростом частоты непрерывно стремится к значению приложенного напряжения  $U = E$ ; максимум же функции  $U_C$  в рассматриваемом случае имеет место при  $\delta = -1$ , т. е. при нулевой частоте ( $\omega = 0$ ), когда  $U_C = E$ .



никать на одной или нескольких частотах, наряду с аналитическим методом расчета, иллюстрированным выше, целесообразно также пользоваться методом геометрических мест (см. гл. 6).

### 5-3. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР. РЕЗОНАНС ТОКОВ

Явление резонанса токов удобно изучать применительно к электрической цепи с параллельно соединенными  $r$ ,  $L$  и  $C$  (рис. 5-6), так как при этом можно непосредственно воспользоваться результатами, полученными в предыдущем параграфе.

Действительно, выражение для комплексной проводимости такой цепи

$$Y = g - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) \quad (5-13)$$

по своей структуре аналогично выражению (5-1), причем резонансная частота определяется согласно (5-2).

Добротность резонансной цепи на основании (5-3)

$$Q = \omega_0 \frac{CU_m^2}{2U^2} = \omega_0 Cr = \frac{r}{\rho}.$$

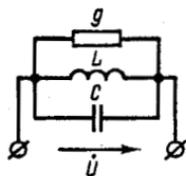


Рис. 5-6. Параллельный колебательный контур.

По аналогии с предыдущим выражением (5-13) приводится к виду:

$$Y = g\left(1 + jQ\delta \frac{\delta + 2}{\delta + 1}\right).$$

Сравнивая полученный результат с (5-6), убеждаемся в том, что выражение  $Y/g$  для схемы рис. 5-6 имеет тот же вид, что и выражение  $Z/r$  для схемы рис. 5-1.

Поэтому кривые рис. 5-2 применимы и в данном случае: кривые рис. 5-2, а выражают зависимость от  $\delta$  отношения  $y/g$ , а кривые рис. 5-2, б — зависимость угла  $\varphi$  от  $\delta$ .

Кривые рис. 5-2, а показывают, что при резонансе токов полная проводимость цепи минимальна, т. е. входное сопротивление достигает максимума.

При заданном напряжении  $\dot{U}$  на выводах цепи ток, идущий от источника в цепь, равен:

$$\dot{I} = Y\dot{U} = g\dot{U}\left(1 + jQ\delta \frac{\delta + 2}{\delta + 1}\right).$$

Этот ток достигает минимума при резонансной частоте, так как при этом

$$I_0 = g\dot{U}.$$

Следовательно, отношение токов  $I_0$  и  $I$  определяется из выражения

$$\frac{I_0}{I} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \delta^2 \left(\frac{\delta + 2}{\delta + 1}\right)^2}},$$

правая часть которого полностью совпадает с (5-8).

В связи с этим резонансные кривые рис. 5-3 выражают применительно к схеме рис. 5-6 зависимость  $I_0/I$  от  $\delta$ .

В случае резонанса токов токи в индуктивном и емкостном элементах схемы рис. 5-6 равны и противоположны по знаку:

$$I_{C_0} = -I_{L_0} = j\omega_0 C \dot{U} = jI_0 Q.$$

Полученное выражение показывает, что добротность рассматриваемой цепи определяется как кратность токов в  $L$  и  $C$  по отношению к суммарному току  $I_0$ .

При  $Q > 1$  эти токи превышают  $I_0$ .

Если параллельный колебательный контур питается от источника тока с внутренним сопротивлением  $R_i$ , то чем меньше сопротивление  $R_i$ , присоединяемое параллельно сопротивлению  $r$ , тем ниже добротность и шире полоса пропускания контура. Поэтому в отличие от последовательного колебательного контура с точки зрения сокращения полосы пропускания параллельного колебательного контура *выгоден источник тока с большим внутренним сопротивлением.*

Для схемы рис. 5-6 при резонансе токов остается в силе вывод, сделанный в предыдущем параграфе о непрерывном обмене энергией между индуктивным и емкостным элементами при резонансе напряжений.

Схема рис. 5-6 является идеализированной, так как она не учитывает активных потерь в ветвях  $L$  и  $C$ . Поэтому рассмотрим другие схемы, приняв во внимание активные сопротивления в ветвях  $L$  и  $C$  (рис. 5-7, *а* и *б*).

Условие резонанса токов для схемы рис. 5-7, *а* записывается в виде равенства реактивных проводимостей:

$$\frac{\omega_0 L}{r_1^2 + (\omega_0 L)^2} = \frac{\frac{1}{\omega_0 C}}{r_2^2 + \left(\frac{1}{\omega_0 C}\right)^2}, \quad (5-14)$$



откуда

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \cdot \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - r_1^2}{\frac{L}{C} - r_2^2}}. \quad (5-15)$$

Явление резонанса возможно при этом только в случае, если подкоренное выражение (5-15) имеет положительный знак или, что то же, величины  $\frac{L}{C} - r_1^2$  и  $\frac{L}{C} - r_2^2$  имеют одинаковый знак. Если  $r_1 = r_2 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ , то цепь резонирует на любой частоте.

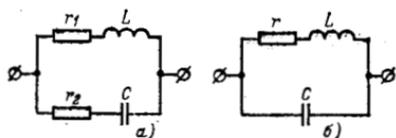


Рис. 5-7. Колебательные контуры с двумя параллельными ветвями.

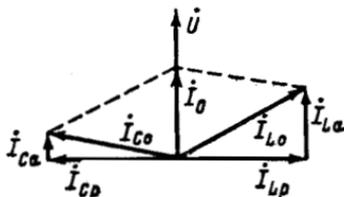


Рис. 5-8. Векторная диаграмма при резонансе токов.

На рис. 5-8 показана векторная диаграмма при резонансе токов в цепи рис. 5-7, а. Токи в индуктивной и емкостной ветвях складываются из активных ( $I_{La}$ ,  $I_{Ca}$ ) и реактивных ( $I_{Lp}$ ,  $I_{Cp}$ ) составляющих, причем

$$I_{Lp} = -I_{Cp}; \quad I_{La} + I_{Ca} = I_0.$$

Чем меньше  $r_1$  и  $r_2$  по сравнению с  $\omega_0 L$  и  $\frac{1}{\omega_0 C}$ , тем ближе к  $180^\circ$  угол фазового сдвига между  $I_{L0}$  и  $I_{C0}$ ; при этом токи в ветвях образуют как бы один контурный ток  $I_k \approx I_{L0} \approx I_{C0}$ , замыкающийся в колебательном контуре.

При резонансе вся цепь имеет только активную проводимость

$$Y_0 = g_0 = \frac{r_1}{r_1^2 + (\omega_0 L)^2} + \frac{r_2}{r_2^2 + \left(\frac{1}{\omega_0 C}\right)^2},$$

откуда с учетом (5-14)

$$Y_0 = \frac{r_1 + r_2 \omega_0^2 LC}{r_1^2 + (\omega_0 L)^2}.$$

Для колебательного контура с малыми потерями можно пренебречь слагаемым  $r_1^2$  по сравнению с  $(\omega_0 L)^2$  и считать,

что  $\omega_0^2 LC \approx 1$ . При этом проводимость колебательного контура приближенно выразится формулой, широко распространенной в практике радиотехнических расчетов:

$$Y_0 \approx \frac{r_1 + r_2}{(\omega_0 L)^2} \approx \frac{(r_1 + r_2) C}{L}.$$

При  $r_1 = r_2 = r$  согласно (5-15)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{и} \quad Y_0 = g_0 = \frac{2r}{r^2 + \frac{L}{C}}.$$

Кроме того, если  $r = \sqrt{\frac{L}{C}}$ , то  $Y = \sqrt{\frac{C}{L}}$  при любой частоте (резонанс в такой цепи называют «безразличным» резонансом).

Легко убедиться в том, что и в случае резонансной цепи с двумя параллельными ветвями (см. рис. 5-7) соблюдается условие  $W_{L\text{макс}} = W_{C\text{макс}}$ . Для этого достаточно умножить обе части уравнения (5-14) на  $\frac{1}{2\omega_0} U_m^2$ .

Выше отмечалось, что в схеме с параллельно соединенными  $r$ ,  $L$  и  $C$  (см. рис. 5-6) полная проводимость всей цепи имеет минимум при резонансной частоте.

Для схемы рис. 5-7, б нетрудно показать, что при изменении частоты  $\omega$  или индуктивности  $L$  минимум полной проводимости цепи, а также минимум общего тока наступают не при резонансной частоте. В том же случае, когда переменным параметром является емкость  $C$ , проводимость и общий ток достигают минимума при резонансе токов [Л. 2].

Добротность параллельного колебательного контура рис. 5-7, а на основании (5-3) равна:

$$Q = \omega_0 \frac{W_{L\text{макс}}}{P} = \frac{\omega_0 L U_m^2}{2z_1^2 g_0 U^2} = \frac{\omega_0 L}{z_1^2 g_0},$$

но

$$g_0 = \frac{r_1}{z_1^2} + \frac{r_2}{z_2^2} = \frac{r_1 + r_2 \omega_0^2 LC}{z_1^2},$$

откуда

$$Q = \frac{\omega_0 L}{r_1 + r_2 \omega_0^2 LC},$$

где резонансная частота  $\omega_0$  определяется по формуле (5-15).

Часто в ветви с емкостью сопротивлением  $r_2$  можно пренебречь. Тогда формулы значительно упрощаются.



Рассмотрим этот случай (см. рис. 5-7, б).  
Резонансная частота такого контура согласно (5-15)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{r}{L}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{\rho}\right)^2}, \quad (5-16)$$

а добротность цепи в соответствии с полученным выше выражением

$$Q = \frac{\omega_0 L}{r}. \quad (5-17)$$

Из сопоставления (5-16) и (5-2) видно, что при одних и тех же параметрах  $r$ ,  $L$  и  $C$  резонансные частоты для схем рис. 5-1 и 5-7, б отличаются множителем

$$\sqrt{1 - (r/\rho)^2}.$$

При  $r/\rho < 0,1$  разность резонансных частот не превышает 1%. Кроме того, выражение (5-16) показывает, что резонанс токов возможен в схеме рис. 5-7, б только при  $r/\rho < 1$ .

Общее сопротивление колебательного контура (см. рис. 5-7, б)

$$Z = \frac{(r + j\omega L) \left(-j \frac{1}{\omega C}\right)}{r + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{L}{rC} \frac{1 - j \frac{r}{\omega L}}{1 + j \frac{\omega L}{r} \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)}.$$

На основании соотношений (5-16) и (5-17) можно получить:

$$\left(\frac{\rho}{r}\right)^2 = \frac{L}{Cr^2} = 1 + Q^2.$$

Учитывая также соотношения

$$\frac{r}{\omega L} = \frac{\omega_0}{\omega} \frac{r}{\omega_0 L} = \frac{1}{Q(\delta + 1)};$$

$$\frac{1}{\omega^2 LC} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2 \omega_0^2 LC} = \frac{1}{\left(1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right)(\delta + 1)^2} = \frac{1 + Q^2}{Q^2(\delta + 1)^2},$$

получаем выражение для сопротивления колебательного контура:

$$Z = \frac{r(1 + Q^2) \left[1 - j \frac{1}{Q(\delta + 1)}\right]}{1 + jQ(\delta + 1) \left[1 - \frac{1 + Q^2}{Q^2(\delta + 1)^2}\right]}. \quad (5-18)$$

При резонансной частоте ( $\delta = 0$ )  $Z_0 = r(1 + Q^2)$ .

В тех случаях, когда  $Q^2$  весьма велико по сравнению с единицей выражение (5-18) упрощается:

$$Z \approx rQ^2 \frac{1 - j \frac{1}{Q(\delta + 1)}}{1 + jQ\delta \frac{\delta + 2}{\delta + 1}}.$$



В режиме, близком к резонансу, когда  $|\delta|$  несоизмеримо меньше единицы, данное выражение заменяется приближенным:

$$Z \approx rQ^2 \frac{1 - j \frac{1}{Q}}{1 + j2Q\delta}.$$

При высокой добротности колебательного контура

$$Z \approx \frac{rQ^2}{1 + j2Q\delta}.$$

При этом токи в ветвях

$$\left. \begin{aligned} I_L &= \frac{Z}{r + j\omega L} I \approx -I \frac{jQ}{1 + j2Q\delta}; \\ I_C &= j\omega CZ I \approx I \frac{jQ}{1 + j2Q\delta}. \end{aligned} \right\} \quad (5-19)$$

Здесь  $I$  — ток, входящий в цепь.

Напряжение на выводах цепи  $\dot{U}$  связано с током  $I$  следующим образом:

$$\dot{U} = ZI \approx I \frac{rQ^2}{1 + j2Q\delta}. \quad (5-20)$$

Приближенные выражения (5-19) и (5-20) аналогичны при заданном  $Q$  выражениям (5-12) и (5-7), выведенным для цепи рис. 5-1, при условии замены напряжений токами и обратно. Поэтому кривые сопротивлений, токов и напряжений, соответствующие схеме рис. 5-1, в известном масштабе приближенно выражают проводимости, напряжения и токи в схеме рис. 5-7, б.

Следует обратить внимание на то, что в схеме рис. 5-6 мгновенная мощность в цепи при резонансе токов равна мгновенной мощности, расходуемой в сопротивлении  $r$ ; в схемах с двумя параллельными ветвями (рис. 5-7) мгновенная мощность на выводах цепи отлична от мгновенной мощности, расходуемой в сопротивлениях ветвей. Например, в тот момент, когда ток, входящий в цепь, проходит через нулевое значение, мгновенная мощность на выводах цепи равна нулю; в этот момент токи в ветвях, сдвинутые по фазе относительно суммарного тока цепи, отличны от нуля и поэтому мгновенная мощность, расходуемая в сопротивлениях ветвей, также не равна нулю. Объясняется это тем, что в схемах рис. 5-7, а и б энергия, накапливаемая реактивными элементами, периодически преобразуется частично в теплоту (в сопротивлениях ветвей), а затем вновь пополняется за счет энергии источника.

Для повышения крутизны резонансных характеристик, необходимой для более четкого разделения колебаний разных частот, в радиотехнике широко применяются двухконтурные резонансные цепи: два резонансных контура, настроенных каждый в отдельности на одну и ту же частоту, связываются индуктивно или электрически. В отличие от «одногоорбой» резонансной кривой одиночного контура в свя-



занных цепях получают «двугорбые» кривые; например, ток в каждом контуре может иметь максимумы при двух частотах, расположенных ниже и выше резонансной частоты одиночного контура (см. § 8-9—8-11).

Индуктивно связанные резонансные контуры как фильтрующая система рассмотрены в § 10-5.

#### 5-4. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СОПРОТИВЛЕНИЙ И ПРОВОДИМОСТЕЙ РЕАКТИВНЫХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ

Двухполюсником называется любая электрическая цепь или часть электрической цепи, имеющая два вывода. Ниже рассматриваются только линейные двухполюсники, т. е. такие, которые состоят из линейных элементов.

Различают двухполюсники активные и пассивные.

Активным называется двухполюсник, содержащий источники электрической энергии, которые не компенсируются взаимно внутри двухполюсника.

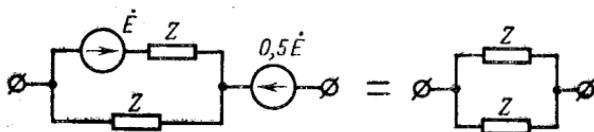


Рис. 5-9. Двухполюсник, внутренние источники которого взаимно компенсированы.

Пассивным называется двухполюсник, не содержащий источников электрической энергии; в случае линейного двухполюсника он может содержать источники электрической энергии, взаимно компенсирующиеся таким образом, что напряжение на его разомкнутых выводах равно нулю. Такой линейный двухполюсник относится к категории пассивных; его сопротивление, измеренное на выводах, не изменится, если источники электрической энергии внутри него заменить пассивными элементами — внутренними сопротивлениями источников э. д. с. или соответственно внутренними проводимостями источников тока. Пример двухполюсника, содержащего компенсированные источники, показан на рис. 5-9.

По числу элементов, входящих в двухполюсник, различают одноэлементный, двухэлементный и многоэлементный двухполюсники.

По характеру этих элементов двухполюсники делятся на реактивные, т. е. состоящие из индуктивностей и емкостей, и двухполюсники с потерями, содержащие активные сопротивления. Реактивные двухполюсники представляют собой идеализированные электрические системы, приближающиеся по своим свойствам к физически существующим цепям с малыми потерями.

Частотные характеристики сопротивлений или проводимостей двухполюсников, образующих электрическую цепь, определяют частотные и резонансные свойства цепи, т. е. зависимости амплитуд и фаз токов и напряжений от частоты.

Настоящий параграф посвящен изучению частотных характеристик пассивных реактивных двухполюсников.

### Одноэлементные реактивные двухполюсники

Индуктивность и емкость представляют собой простейшие одноэлементные реактивные двухполюсники. Знак комплексного сопротивления и комплексной проводимости каждого из этих двухполюсников не зависит от частоты; этим они существенно отличаются от других, более сложных реактивных двухполюсников, содержащих неоднородные реактивные элементы, т. е. индуктивность и емкость в разных сочетаниях.

Комплексное сопротивление индуктивного элемента во всем спектре частот имеет положительный знак, а комплексная проводимость — отрицательный:

$$Z_L = jx_L = j\omega L; \quad Y_L = -jb_L = -j \frac{1}{\omega L}.$$

Комплексное сопротивление емкостного элемента во всем спектре частот имеет отрицательный знак, а комплексная проводимость — положительный:

$$Z_C = -jx_C = -j \frac{1}{\omega C}; \quad Y_C = jb_C = j\omega C.$$

В рассматриваемом случае реактивных двухполюсников комплексные сопротивления и проводимости являются мнимыми. Поэтому для сохранения знаков частотные характеристики сопротивлений и проводимостей удобно рисовать в прямоугольной системе координат, в которой вверх откладываются мнимые величины со знаком плюс, а вниз — со знаком минус.

Частотные характеристики  $Z_L$  и  $Y_C$ , построенные в прямоугольной системе координат, представляют собой прямые линии, а частотные характеристики  $Z_C$  и  $Y_L$  — равнобочные гиперболы (рис. 5-10). Таким образом, кривые  $Z_L$  и  $Z_C$  аналогичны кривым  $Y_C$  и  $Y_L$ .

Следует заметить, что как сопротивления, так и проводимости рассматриваемых здесь одноэлементных реактив-

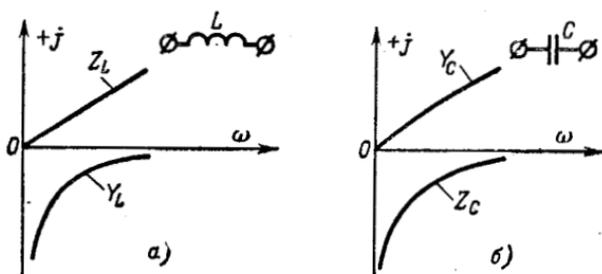


Рис. 5-10. Частотные характеристики индуктивного (а) и емкостного (б) элементов.

ных двухполюсников возрастают (с учетом знака) по мере повышения частоты, т. е.

$$\frac{dZ}{j d\omega} > 0; \quad \frac{dY}{j d\omega} > 0.$$

Это является общим свойством всех реактивных двухполюсников, а не только одноэлементных.

Двухполюсник, состоящий из последовательно или параллельно соединенных однородных элементов (индуктивностей или емкостей), относится к числу одноэлементных двухполюсников, так как последовательно или параллельно соединенные однородные элементы могут быть заменены одним эквивалентным реактивным элементом того же характера.

### Двухэлементные реактивные двухполюсники

Двухэлементные двухполюсники, составленные из индуктивности и емкости, представляют собой простейшие резонансные цепи.

При последовательном соединении индуктивности и емкости алгебраически складываются комплексные сопротивления. На рис. 5-11, а жирной линией показана частотная характеристика двухполюсника, полученная в резуль-

тате графического сложения кривых  $Z_L$  и  $Z_C$ . Она пересекает ось абсцисс при резонансной частоте  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  (резонанс напряжений). Эта частота, при которой функция  $Z = Z_L + Z_C$  обращается в нуль, называется нулем данной функции; точка на оси абсцисс, которая соответствует нулю функции, обозначается кружком.

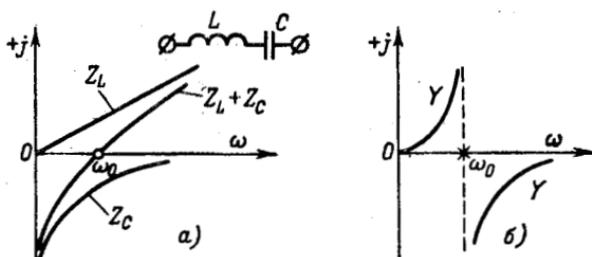


Рис. 5-11. Частотные характеристики двухэлементного двухполюсника последовательно соединенными индуктивностью и емкостью,

Частотная характеристика проводимости того же двухполюсника представляет собой функцию, обратную сопротивлению:  $Y = 1/Z$ .

Кривая  $Y$  показана на рис. 5-11, б.

При резонансной частоте проводимость рассматриваемого двухполюсника обращается в бесконечность; эта точка носит название полюса функции  $Y$  и обозначается на чертеже крестиком

Частотные характеристики  $Z$  и  $Y$ , построенные таким образом<sup>1</sup>, соответствуют уравнениям:

$$Z = jx = j(x_L - x_C) = jL \left( \omega - \frac{1}{\omega LC} \right)$$

и

$$Y = -jb = -j \frac{1}{L \left( \omega - \frac{1}{\omega LC} \right)},$$

или с учетом (5-2):

$$\left. \begin{aligned} x &= L \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega}; \\ b &= \frac{\omega}{L(\omega^2 - \omega_0^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (5-21)$$

<sup>1</sup> На осях ординат частотных характеристик чисто реактивных цепей откладываются мнимые значения сопротивлений и проводимостей.

В области частот ниже резонансной ( $\omega < \omega_0$ ) сопротивление емкостного элемента превышает по абсолютному значению сопротивление индуктивного элемента; при этом сопротивление двухполюсника имеет емкостный характер.

В области частот выше резонансной ( $\omega > \omega_0$ ) абсолютное значение емкостного сопротивления меньше, чем индуктивного; сопротивление двухполюсника имеет индуктивный характер.

При параллельном соединении индуктивности и емкости алгебраически складываются их комплексные проводимости. На рис. 5-12, а жирной линией показана частотная

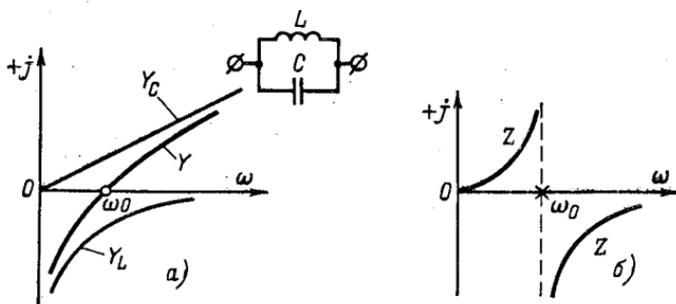


Рис. 5-12. Частотные характеристики двухэлементного двухполюсника с параллельно соединенными индуктивностью и емкостью.

характеристика двухполюсника, полученная в результате графического сложения  $Y_L$  и  $Y_C$ .

Частотная характеристика сопротивления того же двухполюсника представляет собой функцию, обратную проводимости:  $Z = 1/Y$ . Кривая  $Z$  показана на рис. 5-12, б.

Частота, при которой характеристика  $Y$  пересекает ось абсцисс (нуль функции  $Y$ ), а характеристика  $Z$  уходит в бесконечность (полюс функции  $Z$ ), является резонансной частотой (резонанс токов).

Частотные характеристики, построенные на рис. 5-12, соответствуют уравнениям:

$$Y = -jb = -j(b_L - b_C) = -j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) = -jC\left(\frac{1}{\omega LC} - \omega\right)$$

и

$$Z = jx = j \frac{1}{C\left(\frac{1}{\omega LC} - \omega\right)}$$

или с учетом (5-2):

$$\left. \begin{aligned} b &= C \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega}; \\ x &= \frac{\omega}{C(\omega_0^2 - \omega^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (5-22)$$

В области частот ниже резонансной проводимость индуктивного элемента перекомпенсирует проводимость емкостного элемента и сопротивление двухполюсника получается индуктивным. В области частот выше резонансной наблюдается обратное явление и сопротивление двухполюсника имеет емкостный характер.

Таким образом, в зависимости от частоты двухэлементный реактивный двухполюсник может иметь либо индуктивное, либо емкостное сопротивление. При этом, так же как и в случае одноэлементного реактивного двухполюсника, кривые  $Z$  и  $Y$  возрастают, т. е. производные от  $Z/j$  и  $Y/j$  по частоте положительны.

В отличие от сопротивлений одноэлементных двухполюсников, которые выражаются только через текущую частоту, сопротивления двухэлементных реактивных двухполюсников зависят также и от разности квадратов резонансной и текущей частот [формулы (5-21) и (5-22)].

Как видно из выражений (5-21), для построения частотных характеристик двухполюсника, состоящего из последовательно соединенных элементов  $L$  и  $C$ , достаточно знать нуль функции  $Z$  или, что то же, полюс функции  $Y$ . Параметр  $L$ , входящий в (5-21), влияет только на выбор масштаба  $Z$  и  $Y$  по оси ординат.

Аналогично в соответствии с (5-22) для построения частотных характеристик двухполюсника, состоящего из параллельно соединенных элементов  $L$  и  $C$ , достаточно знать полюс  $Z$  или, что то же, нуль  $Y$ , причем параметр  $C$  влияет только на масштаб  $Z$  и  $Y$ .

Двухполюсники, имеющие одинаковые частотные характеристики  $Z$  или  $Y$ , эквивалентны.

### **Многоэлементный реактивный двухполюсник**

Многоэлементный реактивный двухполюсник может быть получен в результате различных сочетаний одноэлементных и двухэлементных двухполюсников. Пользуясь частотными характеристиками, приведенными выше, можно построить частотные характеристики для трех-, четырех- и многоэлементных реактивных двухполюсников. При этом одно-



родные элементы (или группы элементов с одинаковыми резонансными частотами), соединенные параллельно или последовательно, должны быть сначала заменены одним элементом (или эквивалентной группой элементов, как это, например, показано на рис. 5-13).

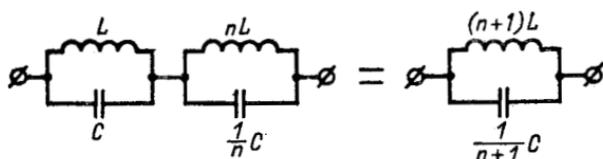


Рис. 5-13. Пример приведения схемы к двухэлементному двухполюснику.

Такие двухполюсники будем называть «приведенными».

Из свойства положительности производной  $dZ/jd\omega$  (или  $dY/jd\omega$ ) следует, что нули и полюсы функций  $Z$  (или  $Y$ ) должны чередоваться, так как при наличии двух последовательных нулей, не разделенных полюсом, имелся бы участок характеристики с отрицательной производной.

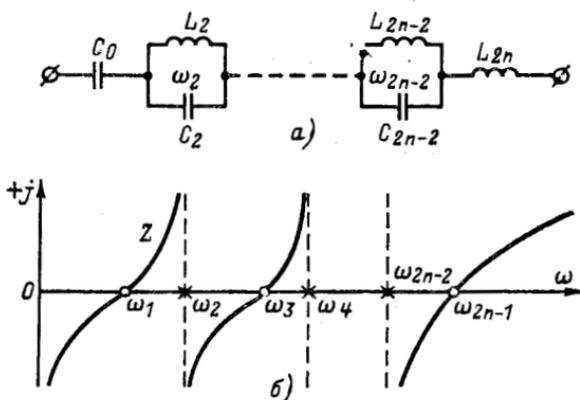


Рис. 5-14. Схема (а) и частотная характеристика (б) многоэлементного двухполюсника.

В общем случае, если при  $\omega = 0$  сопротивление реактивного двухполюсника равно нулю, т. е. имеется путь для постоянного тока, то первым наступает резонанс токов, за ним следует резонанс напряжений и т. д.

В противном случае порядок расположения резонансов обратный: первым наступает резонанс напряжений, вторым — резонанс токов и т. д.



На рис. 5-14, а дана схема многоэлементного двухполюсника, а на рис. 5-14, б — соответствующая ему частотная характеристика сопротивления.

У реактивных двухполюсников сумма чисел полюсов и нулей (не считая точек  $\omega = 0$  и  $\omega = \infty$ ) на единицу меньше числа элементов данного «приведенного» двухполюсника.

Расположение нулей и полюсов, как указывалось выше, поочередное, а все ветви частотной характеристики с увеличением  $\omega$  возрастают.

## 5-5. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

5-1. В цепи с последовательно соединенными  $r$ ,  $L$  и  $C$  наступает резонанс напряжений при угловой частоте 500 рад/с;  $r = 34$  Ом;  $L = 400$  мГ; напряжение на цепи  $\dot{U} = 120 \angle 0^\circ$  В. Определить  $C$  и мгновенные значения тока и напряжений на элементах цепи; построить векторную диаграмму.

Ответ: 10 мкФ;  $5 \sin 500 t$  А;  $170 \sin 500 t$  В;  $1000 \sin (500 t \pm \pi/2)$  В.

5-2. Цепь состоит из индуктивной катушки ( $r$ ,  $L$ ) и емкости, соединенных последовательно. Напряжение на цепи равно 120 В. Определить напряжение на катушке при резонансе, если при этом напряжении на емкости равно 208 В.

Ответ: 240 В.

5-3. Вычислить резонансную частоту и частоты, при которых напряжения на  $L$  и  $C$  максимальны в цепи с последовательно соединенными  $r = 50$  Ом,  $L = 10$  мГ и  $C = 1$  мкФ.

Ответ: 10 000, 10 700; 9350 рад/с.

5-4. Вычислить резонансную частоту и добротность контура, состоящего из последовательно соединенных  $r = 5,1$  Ом;  $L = 65 \cdot 10^{-6}$  Г;  $C = 1,56 \cdot 10^{-9}$  Ф. Определить сопротивление цепи при частоте, превышающей резонансную на 1%.

Ответ:  $5 \cdot 10^6$  Гц; 40;  $6,53 \angle 38^\circ 35'$  Ом.

5-5. Резонанс напряжений в контуре  $r$ ,  $L$  и  $C$  наступает при частоте 1 МГц. Полоса пропускания резонансного контура равна 5000 Гц, сопротивление цепи при резонансе 50 Ом. Найти  $r$ ,  $L$  и  $C$ .

Ответ: 50 Ом; 1,59 мГ; 15,9 пФ.

5-6. Резонанс напряжений в контуре  $r$ ,  $L$  и  $C$  наступает при 1,5 МГц, добротность контура равна 250. Вычислить частоты, соответствующие половинной мощности.

Ответ: 1,497 и 1,503 МГц.

5-7. Последовательно с  $L$  включен участок цепи, состоящий из параллельно соединенных  $r$  и  $C$ . При 1000 Гц индуктивное и емкостное сопротивления элементов  $L$  и  $C$  равны каждое 100 Ом;  $r = 200$  Ом. Вычислить резонансную частоту и проводимость цепи при резонансе; пояснить явление резонанса в заданной цепи.

Ответ: 866 Гц; 0,02 См.

5-8. Если в цепи на рис. 5-7, б сопротивление  $r$  превысит определенное значение, то резонанс токов будет невозможен. Пояснить это физически и привести условие, при котором резонанс невозможен.

Ответ:  $r \geq \sqrt{L/C}$ .

5-9. Индуктивная катушка и последовательно соединенная с нею емкость питаются от источника синусоидальной э. д. с.; частота равна 1 кГц. Максимальное значение тока в цепи 1,1 А достигается при  $C = 10,4$  мкФ, при этом напряжение на емкости в 11,1 раза превышает приложенное к цепи напряжение. Вычислить сопротивление и индуктивность катушки и напряжение на емкости при токе 1,1 А.

О т в е т: 1,38 Ом; 2,44 мГ; 16,3 В.

5-10. Контур, состоящий из  $r = 100$  Ом,  $L = 10$  мГ и  $C = 1$  мкФ питается от источника переменной частоты. Найти наибольшее отношение напряжения на  $L$  (или  $C$ ) к приложенному к контуру напряжению.

О т в е т: 1,155.

5-11. Цепь состоит из  $r = 100$  Ом,  $L = 10$  мГ и  $C$ , соединенных последовательно; угловая частота равна  $10^4$  рад/с. При каком значении  $C$  напряжение на  $C$  максимально? Во сколько раз оно превышает приближенное к цепи напряжение?

О т в е т: 0,5 мкФ; 1,41.

5-12. Найти минимальное значение  $C$ , при котором наступит резонанс в цепи на рис. 5-7, а, если  $r_1 = 10$  Ом;  $L = 50$  мГ;  $r_2 = 5$  Ом;  $f = 50$  Гц, определить сопротивление цепи при резонансе.

О т в е т: 152 мкФ; 25,2 Ом.

5-13. Резонанс напряжений в контуре  $r$ ,  $L$ ,  $C$  наступает при 500 кГц. При этом сопротивление контура равно 75 Ом; полоса пропускания равна 3 кГц. Найти  $L$  и  $C$ .

О т в е т: 3,98 мГ; 25,4 пФ.

5-14. Что такое приведенный реактивный двухполюсник?

5-15. Чем определяется число нулей и полюсов приведенного реактивного двухполюсника, а также их последовательность на характеристике?

5-16. Разобрать резонансные явления в трехэлементном реактивном двухполюснике.

5-17. Доказать эквивалентность схем, изображенных на рис. 5-13.

---

## ГЛАВА ШЕСТАЯ

### ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

#### 6-1. ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ЗАВИСИМОСТЕЙ КОМПЛЕКСНЫХ ВЕЛИЧИН ОТ ПАРАМЕТРА

Исследование зависимости какой-либо комплексной величины (или отношения комплексных величин) от переменного параметра сводится к нахождению зависимостей модуля и угла от параметра.

При пользовании прямоугольной системой координат строятся кривые модуля и угла, которые в совокупности и характеризуют изменение исследуемой величины. Вместо



зависимостей модуля и угла в прямоугольной системе координат могут быть построены зависимости от параметра действительной и мнимой частей исследуемой комплексной величины.

Таким образом, графическое изображение исследуемой зависимости в прямоугольной системе координат осуществляется с помощью двух кривых: модуля и угла или соответственно действительной и мнимой частей.

При комплексной форме записи полное представление о зависимости исследуемой величины от параметра может быть достигнуто с помощью одной кривой, изображаемой на комплексной плоскости. Сущность такого графического изображения заключается в том, что *исследуемое комплексное выражение представляется на комплексной плоскости вектором, геометрическое место конца которого при изменении входящего в это выражение параметра изображается кривой*. Эта кривая, называемая также годографом, наглядно показывает изменение модуля и фазы рассматриваемой комплексной величины в зависимости от параметра.

Такой графический метод применим к комплексным амплитудам — напряжениям, токам, мощностям — и комплексным сопротивлениям, проводимостям, передаточным функциям и т. п.

Переменным параметром электрической цепи может служить какая-либо из величин, характеризующих источник электрической энергии или пассивный элемент: модуль или фаза э. д. с. (или тока) источника, частота  $\omega$ , сопротивление  $r$ , индуктивность  $L$ , взаимная индуктивность  $M$ , емкость  $C$  или соответственно реактивная составляющая сопротивления или проводимости и т. д.

В качестве переменного параметра может рассматриваться полное сопротивление  $z$  при неизменном значении аргумента  $\varphi$ , или, наоборот, переменным параметром может служить угол  $\varphi$  при постоянном  $z$ .

Изменение каждого из этих параметров может быть графически представлено на комплексной плоскости. Например, изменение активного или реактивного сопротивления изображается прямой, параллельной соответственно действительной или мнимой оси. Изменение полного сопротивления при постоянном угле  $\varphi$  изображается прямой линией, образующей с действительной осью угол  $\varphi$ . В свою очередь изменение угла  $\varphi$  при неизменном  $z$  изображается окружностью радиусом  $z$ .

## 6-2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВИДА $Y=1/Z$

Положим, что вектор  $Z$  при изменении соответствующего параметра описывает на комплексной плоскости окружность или прямую. Требуется построить геометрическое место конца вектора  $Y = 1/Z$ .

Пусть точка  $Z_0$  на комплексной плоскости  $Z$  служит центром окружности, радиус которой равен  $R$ . Комплексная форма уравнения такой окружности может быть представлена так:

$$(Z - Z_0)(\bar{Z} - \bar{Z}_0) = R^2,$$

или

$$Z\bar{Z} - Z\bar{Z}_0 - \bar{Z}Z_0 + Z_0\bar{Z}_0 = R^2. \quad (6-1)$$

Подстановка  $Z = 1/Y$  дает:

$$Y\bar{Y} - Y \frac{Z_0}{Z_0\bar{Z}_0 - R^2} - \frac{\bar{Y}Z_0}{Z_0\bar{Z}_0 - R^2} + \frac{1}{Z_0\bar{Z}_0 - R^2} = 0$$

или, что то же,

$$Y\bar{Y} - Y \frac{Z_0}{Z_0\bar{Z}_0 - R^2} - \bar{Y} \frac{\bar{Z}_0}{Z_0\bar{Z}_0 - R^2} + \frac{Z_0\bar{Z}_0}{(Z_0\bar{Z}_0 - R^2)^2} = \frac{R^2}{(Z_0\bar{Z}_0 - R^2)^2}. \quad (6-2)$$

Из сопоставления (6-2) с (6-1) следует, что вектор  $Y$  описывает окружность радиусом  $\rho = \frac{R}{Z_0\bar{Z}_0 - R^2}$  с центром

в точке  $\frac{\bar{Z}_0}{Z_0\bar{Z}_0 - R^2}$  комплексной плоскости  $Y$ .

Наиболее удаленной от начала координат точке  $b$  окружности  $Z$  соответствует наиболее близко расположенная к началу координат точка  $b'$  окружности  $Y$ , и наоборот. Диаметры соответствующих окружностей, проходящие через начало координат, образуют с действительной осью одинаковые углы, отсчитываемые в противоположных направлениях (рис. 6-1). Следует заметить, что координаты центров окружностей векторов  $Z$  и  $Y$  не подчиняются условию  $Y = 1/Z$ ; иначе говоря,  $Y_0 \neq 1/Z_0$ .

В случае, когда окружность проходит через начало координат,  $Z_0\bar{Z}_0 = R^2$  и на основании (6-1)

$$Z\bar{Z} - Z\bar{Z}_0 - \bar{Z}Z_0 = 0. \quad (6-3)$$

Вектор  $Y$  описывает при этом прямую, находящуюся на расстоянии  $1/2R$  от начала координат (рис. 6-2). Диаметр

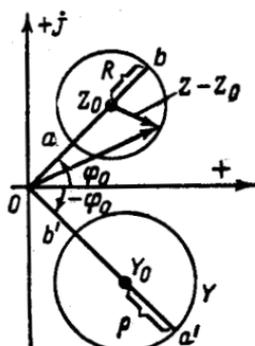


Рис. 6-1. Преобразование окружности  $Z$  в окружность  $Y$ .

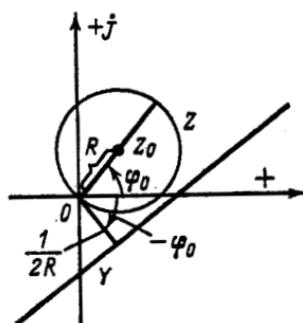


Рис. 6-2. Преобразование окружности  $Z$  в прямую  $Y$ .

окружности  $Z$ , проходящий через начало координат, и перпендикуляр, опущенный из начала координат на прямую  $Y$ , образуют с действительной осью одинаковые углы (отсчитываемые в противоположные стороны).

Уравнение прямой  $Y$  получается, если обе части уравнения (6-2) умножить на  $ZZ_0^* - R^2$  и затем перейти к пределу  $ZZ_0^* - R^2 \rightarrow 0$ . Тот же результат можно получить непосредственно из (6-3), заменяя  $Z = 1/Y$ :

$$YZ_0 + Y^*Z_0^* - 1 = 0. \quad (6-4)$$

В свою очередь уравнение прямой линии в плоскости  $Z$ , не проходящей через начало координат, записывается по аналогии с (6-4):

$$ZY_0 + Z^*Y_0^* - 1 = 0.$$

При этом уравнение окружности, описываемой вектором  $Y$ , имеет вид:

$$Y\dot{Y} - Y\dot{Y}_0 - \dot{Y}Y_0 = 0.$$

Если геометрическим местом вектора  $Z$  служит прямая, проходящая через начало координат под углом  $\varphi$  к действительной оси, то прямая  $Y$  будет перпендикулярна ей (рис. 6-3).

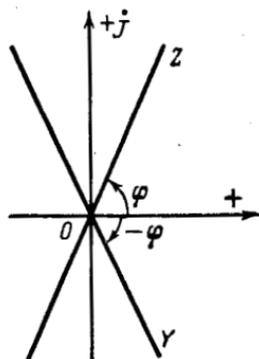


Рис. 6-3. Преобразование прямой  $Z$  в прямую  $Y$ .

вительной оси, то геометрическое место вектора  $Y$  представляет собой прямую, также проходящую через начало координат и образующую с действительной осью угол  $-\varphi$  (рис. 6-3).

Преобразования прямой в окружность и окружности в окружность иллюстрированы ниже на примерах простейших электрических цепей.

### 6-3. ДИАГРАММЫ СОПРОТИВЛЕНИЙ И ПРОВОДИМОСТЕЙ ПРОСТЕЙШИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Рассмотрим диаграммы сопротивления и проводимости цепи с последовательным, параллельным или смешанным соединением при изменении одного параметра.

#### Последовательное соединение

При изменении сопротивления  $r$  (рис. 6-4, а) геометрическим местом комплексного сопротивления  $Z = r + jx$  служит прямая, параллельная действительной оси

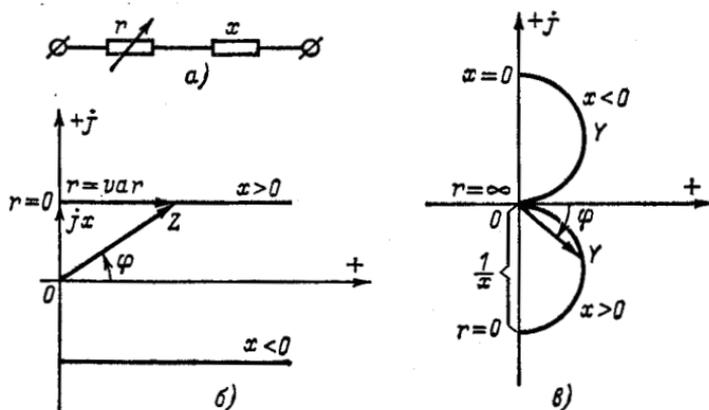


Рис. 6-4. Переменное активное сопротивление при последовательном соединении.

а — схема; б — диаграмма  $Z$ ; в — диаграмма  $Y$ .

(рис. 6-4, в). Геометрическим местом комплексной проводимости  $Y = \frac{1}{r + jx}$  является полуокружность, проходящая через начало координат комплексной плоскости  $Y$ , диаметр которой равен  $1/|x|$  (рис. 6-4, в).

Вторая половина окружности, соответствующая отрицательным значениям  $r$ , из рассмотрения исключается.

Значению  $r = 0$  соответствует наиболее удаленная точка окружности  $Y$ , а значению  $r = \infty$  — точка  $O$  в плоскости  $Y$ .

При  $x > 0$  геометрическое место конца вектора  $Z$  располагается в первой четверти, а при  $x < 0$  — в четвертой четверти комплексной плоскости.

Соответственно полуокружность  $Y$  при  $x > 0$  располагается в четвертой четверти, а при  $x < 0$  — в первой четверти.

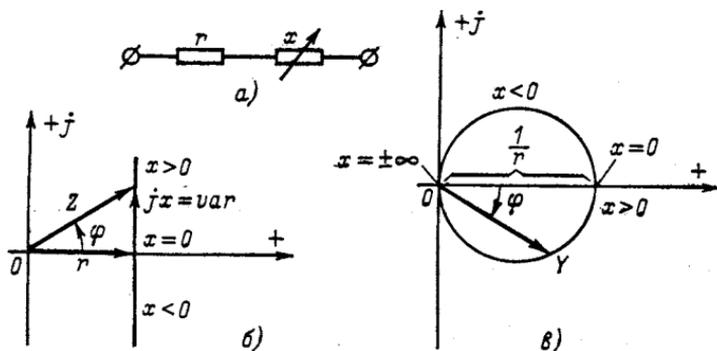


Рис. 6-5. Переменное реактивное сопротивление при последовательном соединении.

$a$  — схема;  $b$  — диаграмма  $Z$ ;  $c$  — диаграмма  $Y$ .

При изменении реактивного сопротивления  $x$  (рис. 6-5,  $a$ ) геометрическим местом вектора  $Z$  служит прямая, параллельная мнимой оси (рис. 6-5,  $b$ ). Геометрическим местом конца вектора  $Y = 1/Z$  является окружность, проходящая через начало координат комплексной плоскости; диаметр окружности равен  $1/r$  (рис. 6-5,  $c$ ).

Значениям  $x > 0$  соответствует нижняя, а  $x < 0$  — верхняя полуокружность.

При  $x = 0$  цепь имеет только активное сопротивление и соответственно активную проводимость. При  $x = \pm\infty$  проводимость цепи равна нулю.

### Параллельное соединение

При изменении сопротивления  $r$  (рис. 6-6,  $a$ ) геометрическим местом конца вектора  $Y = \frac{1}{r} - j\frac{1}{x}$  служит прямая, параллельная действительной оси (рис. 6-6,  $b$ ). Геометриче-



ским местом конца вектора  $Z = 1/Y$  является полуокружность (рис. 6-6, в); верхняя при  $x > 0$  и нижняя при  $x < 0$ ;

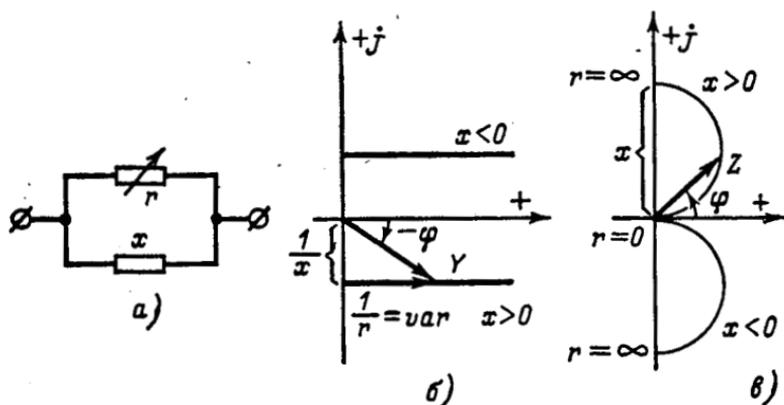


Рис. 6-6. Переменное активное сопротивление при параллельном соединении.

а — схема; б — диаграмма  $Y$ ; в — диаграмма  $Z$ .

диаметр окружности равен  $|x|$ . Значению  $r = 0$  соответствует начало координат, а значению  $r = \infty$  — диаметрально противоположная точка окружности.

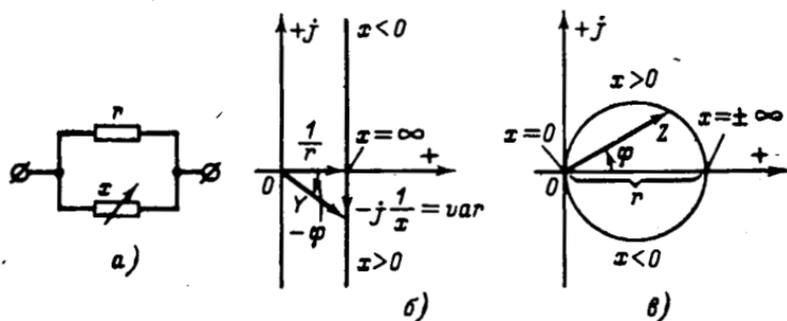


Рис. 6-7. Переменное реактивное сопротивление при параллельном соединении.

а — схема; б — диаграмма  $Y$ ; в — диаграмма  $Z$ .

При изменении реактивного сопротивления  $x$  (рис. 6-7, а) геометрическим местом конца вектора  $Y$  служит прямая, параллельная мнимой оси (рис. 6-7, б), а геометрическим местом конца вектора  $Z = 1/Y$  — окружность диаметром  $r$ ,

проходящая через начало координат (рис. 6-7, в). Значениям  $x > 0$  соответствует верхняя, а  $x < 0$  — нижняя полуокружность. При  $x = 0$  полное сопротивление цепи равно нулю, а полная проводимость бесконечно велика.

При  $x = \pm \infty$  сопротивление и проводимость цепи являются активными.

### Смешанное соединение

Рассмотрим в качестве примеров две схемы цепи со смешанным соединением элементов.

На рис. 6-8, а показана схема цепи, в которой переменным параметром является реактивное сопротивление  $x$ .

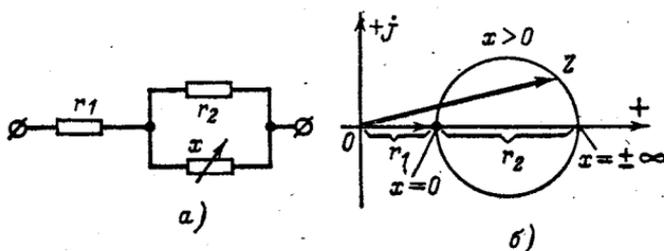


Рис. 6-8. Переменное реактивное сопротивление при смешанном соединении.

а — схема; б — диаграмма.

Диаграмма  $Z$  такой цепи (рис. 6-8, б) отличается от диаграммы  $Z$  (рис. 6-7, в), тем, что окружность смещена относительно начала координат на величину сопротивления  $r_1$ . Изменение  $x$  может быть обусловлено изменением частоты или параметра  $L$  и  $C$ .

На рис. 6-9, а показана схема цепи, в которой переменным параметром является емкость  $C$ . Проводимость ветви  $r$ ,  $L$  равна:

$$\frac{1}{r + j\omega L} = \frac{r - j\omega L}{r^2 + (\omega L)^2};$$

проводимость ветви с емкостью равна  $j\omega C$ . Следует отметить, что резонанс токов наступает при  $\omega C = \frac{\omega L}{r^2 + (\omega L)^2}$ . При этом комплексная проводимость всей цепи равна  $Y = \frac{r}{r^2 + (\omega L)^2}$ , а комплексное сопротивление  $Z = r + \frac{(\omega L)^2}{r}$ .

Геометрическим местом конца вектора  $Y$  служит прямая, параллельная мнимой оси (рис. 6-9, б), а геометрическим местом конца вектора  $Z$  — окружность, проходящая через начало координат; диаметр окружности равен  $r +$

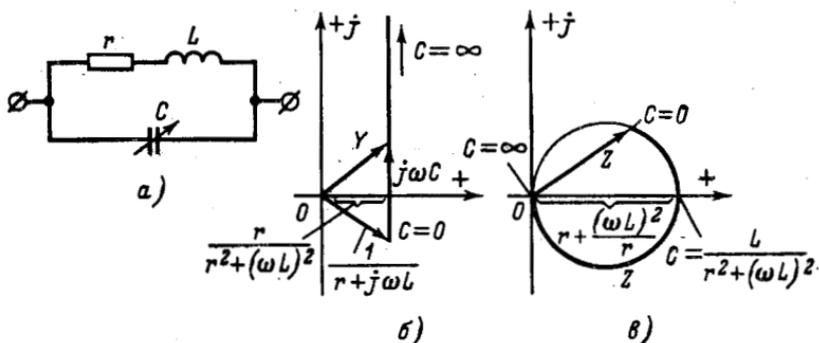


Рис. 6-9. Переменная емкость при смешанном соединении.

а — схема; б — диаграмма  $Y$ ; в — диаграмма  $Z$ .

$+ (\omega L)^2 / r$  (рис. 6-9, в). Часть окружности, начерченная тонкой линией, исключается из рассмотрения, так как она соответствует отрицательным значениям  $C$ .

Рассмотренные здесь диаграммы сопротивлений и проводимостей изображают в определенном масштабе и диаг-

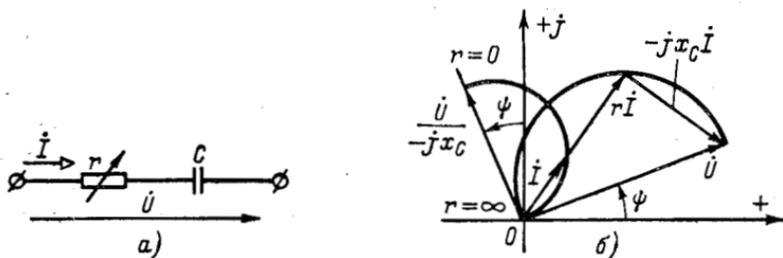


Рис. 6-10. Пример 6-1.

раммы: 1) тока  $I = Y\dot{U}$  — при заданном напряжении  $\dot{U}$  на зажимах цепи; 2) напряжения  $\dot{U} = ZI$  — при заданном токе  $I$ , проходящем через цепь; 3) комплексной мощности  $\tilde{S} = U^* \dot{Y} = I^2 Z$  — при заданных  $U$  или  $I$ .

Если начальная фаза заданного напряжения (или тока) отлична от нуля, то диаграмма тока (или напряжения) поворачивается на соответствующий угол (см. пример 6-1).

**Пример 6-1.** Напряжение на выводах участка цепи, состоящего из последовательно соединенных сопротивления  $r$  и емкости  $C$ , задано  $\dot{U} = U \angle \psi$  (рис. 6-10, а). Построить круговые диаграммы тока и напряжения на сопротивлении при изменении  $r$  от нуля до бесконечности.

Круговая диаграмма тока  $\dot{I} = Y\dot{U}$  повернута относительно диаграммы проводимости, изображенной на рис. 6-4, в (для случая  $x < 0$ ), на угол  $\psi$ , равный начальной фазе приложенного напряжения.

Диаметр круговой диаграммы тока равен току  $\frac{\dot{U}}{-jx_C}$ , соответствующему значению  $r = 0$  и опережающему  $\dot{U}$  на  $\pi/2$  (рис. 6-10, б).

Напряжение на сопротивлении совпадает по фазе с током. В силу равенства  $r\dot{I} - jx_C\dot{I} = \dot{U}$  конец вектора  $r\dot{I}$  описывает окружность, диаметром которой служит  $\dot{U}$ .

#### 6-4. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

6-1. Найти с помощью круговой диаграммы емкость  $C$  в цепи, изображенной на рис. 5-7, а, при которой сопротивление всей цепи максимально. Дано:  $r_1 = 10$  Ом;  $r_2 = 5$  Ом;  $L = 50$  мГ;  $\omega = 377$  рад/с.

О т в е т: 85 мкФ.

6-2. Найти наименьшее из двух значений емкости  $C$ , которые соответствуют резонансу токов в цепи предыдущей задачи.

О т в е т: 115 мкФ.

6-3. Показать с помощью круговой диаграммы, как изменяются напряжения на элементах  $r$  и  $L$ , включенных последовательно, если  $r$  изменяется от нуля до бесконечности, при неизменном напряжении 200 В на цепи. Построить линию переменного параметра  $r$  и найти графически напряжение на  $L$  и фазовый сдвиг тока относительно приложенного напряжения при  $f = 400$  Гц;  $L = 31,8$  мГ и  $r = 60$  Ом.

О т в е т: 160 В;  $53^\circ$ .

6-4. Найти с помощью круговой диаграммы комплексного сопротивления емкость  $C$ , соединенную последовательно с  $r = 34$  Ом и  $L = 400$  мГ, при которой наступает резонанс напряжений;  $\omega = 500$  рад/с.

О т в е т: 10 мкФ.

6-5. Найти с помощью круговой диаграммы значения индуктивности  $L$  катушки, имеющей сопротивление  $r = 10$  Ом и включенной параллельно емкости 10,5 мкФ, при которых наступает резонанс токов. Частота  $f = 400$  Гц.

О т в е т: 14 и 1 мГ.

6-6. Построить в зависимости от частоты геометрическое место для комплексного сопротивления (или комплексной проводимости) цепи, изображенной на рис. 5-7, а, и найти резонансную частоту, приняв  $r_1 = 8$  Ом;  $r_2 = 6$  Ом;  $L = 5$  мГ;  $C = 50$  мкФ. Найти значения  $C$ , при которых резонанс невозможен.

О т в е т: 1500 рад/с;  $80 \leq C \leq 140$  мкФ.

6-7. Решить задачи 5-3, 5-8 и 5-10 графически.

6-8. Пояснить ход построения круговой диаграммы по заданному комплексному выражению.

6-9. Пояснить ход построения линии переменного параметра.

6-10. Как определяется рабочая часть круговой диаграммы?

6-11. В чем заключается преимущество метода геометрических мест перед аналитическими методами?



## МЕТОДЫ РАСЧЕТА СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

## 7.1. ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНОВ КИРХГОФА ДЛЯ РАСЧЕТА СЛОЖНЫХ ЦЕПЕЙ

В предыдущих главах рассматривались простейшие схемы электрических цепей — одноконтурные схемы, цепная схема с одним источником электрической энергии и схемы с двумя узлами. Были описаны методы преобразования схем, с помощью которых в ряде случаев удается упростить расчет разветвленной электрической цепи. При этом под расчетом цепи подразумевается вычисление значений электрических величин или их отношений при заданных схеме и параметрах цепи.

В случае, когда схема электрической цепи достаточно сложна и не приводится к схеме одноконтурной цепи или цепи с двумя узлами, пользуются более общими методами расчета.

*Описываемые ниже методы и теоремы применимы для цепей постоянного и переменного тока; ради общности изложения они приводятся в комплексной форме.*

В общем случае искомые значения электрических величин и их соотношения могут быть найдены в результате совместного решения системы уравнений, выражающих первый и второй законы Кирхгофа для заданной электрической цепи.

Положим, что в схеме, содержащей  $p$  ветвей и  $q$  узлов, заданными являются источники э. д. с., а искомыми — токи в ветвях. Следовательно, число неизвестных равно числу ветвей.

По первому закону Кирхгофа, выражающему равенство нулю алгебраической суммы токов в узле, может быть записано  $q - 1$  независимых уравнений; уравнение для последнего,  $q$ -го, узла является следствием предыдущих  $q - 1$  уравнений. Действительно, ввиду того, что каждая ветвь связывает два узла, ток каждой ветви входит дважды с различными знаками в уравнения, записанные для  $q$  узлов. Поэтому если просуммировать  $q$  уравнений, то получится тождество вида  $0 = 0$ . Следовательно, одно из этих уравнений является зависимым, т. е. вытекающим из всех остальных уравнений.

Узлы, для которых записываются независимые уравнения по первому закону Кирхгофа, можно назвать независимыми узлами. Из сказанного следует, что из общего числа  $q$  узлов любые  $q - 1$  узлов являются независимыми, а оставшийся последний узел является зависимым.

По второму закону Кирхгофа, выражающему равенство алгебраической суммы э. д. с. в контуре алгебраической сумме падений напряжения в нем, может быть записано  $p - q + 1$  независимых уравнений. В самом деле, если ко всем ветвям применить закон Ома, то получатся  $p$  уравнений вида:

$$\dot{U}_{ik} = \dot{U}_i - \dot{U}_k = -E_n + Z_n I_n; \quad (7-1)$$

здесь  $\dot{U}_{ik}$  — комплексное напряжение между узлами  $i$  и  $k$ ;  $E_n, I_n$  — комплексные э. д. с. источника и ток в  $n$ -й ветви, направленные от узла  $i$  к узлу  $k$ ;  $Z_n$  — комплексное сопротивление той же ветви.

В систему уравнений вида (7-1) входят  $p$  неизвестных токов  $I_n$  и  $q - 1$  неизвестных потенциалов  $\dot{U}_i, \dot{U}_k$  и т. д. (потенциал одного из узлов принимается равным нулю). Если из имеющейся системы уравнений исключить эти неизвестные потенциалы, останется  $p - q + 1$  уравнений, связывающих комплексные э. д. с. источников с напряжениями на комплексных сопротивлениях; полученные таким путем уравнения выражают второй закон Кирхгофа.

Итак, расчет электрической цепи с помощью первого и второго законов Кирхгофа сводится к решению  $(q - 1) + (p - q + 1) = p$  уравнений — по числу ветвей.

Контур, для которых уравнения, записанные по второму закону Кирхгофа, являются независимыми, называются независимыми контурами.

На рис. 7-1 в виде примера показана электрическая схема с числом ветвей  $p = 9$  и числом узлов  $q = 6$ . Соответственно число уравнений по первому закону Кирхгофа равно  $9 - 6 = 3$  и по второму закону Кирхгофа  $9 - 6 + 1 = 4$ . В схеме рис. 7-1 независимыми являются четыре контура. На рис. 7-1 показан один из многих возможных вариантов выбора независимых контуров.

Для того чтобы уравнения по второму закону Кирхгофа, а следовательно, и сами контуры были независимыми, достаточно, чтобы каждый последующий контур отличался от предыдущих хотя бы одной новой ветвью. Например, если в схеме рис. 7-1 обходить контур 4 не в последнюю



очередь, то каждый последующий контур будет содержать новую ветвь.

Независимый контур в отдельных случаях может не содержать новой ветви схемы, например контур 4 в схеме рис. 7-1, если обходить контуры в порядке их нумерации. При выборе независимых контуров заданную схему цепи удобно изображать в виде графа, в котором ветви представляются отрезками линий; идеальный источник э. д. с. учитывается как короткозамкнутая ветвь, а идеальный

источник тока — как разомкнутая ветвь. На рис. 7-2, а показан граф схемы рис. 7-1.

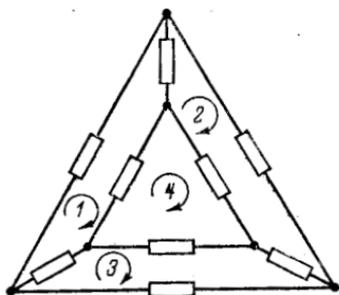


Рис. 7-1. Электрическая схема с четырьмя независимыми контурами.

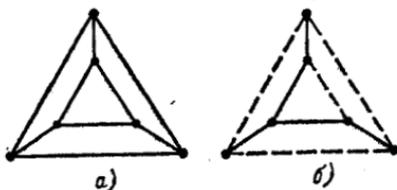


Рис. 7-2. Граф схемы на рис. 7-1 (а) и одно из его возможных деревьев (б).

Граф содержит всю информацию, относящуюся к геометрической структуре соединения ветвей.

Часть графа, содержащая все узлы, но не содержащая ни одного замкнутого контура, называется **деревом графа**.

Легко показать, что число ветвей дерева на единицу меньше числа узлов схемы, т. е. равно  $q - 1$ .

Ветви графа, не входящие в состав дерева, называются **главными ветвями** дерева или **хордами**. Подключение к дереву каждой из главных ветвей создает по одному независимому контуру. Совокупность главных ветвей дерева называется **дополнением** дерева. Так как граф содержит  $p$  ветвей, а дерево  $q - 1$ , то число главных ветвей дерева равно  $p - (q - 1) = p - q + 1$ , т. е. числу независимых контуров.

На рис. 7-2, б сплошными линиями показано одно из возможных деревьев графа, а пунктиром — главные ветви дерева.

Из сказанного следует способ выбора независимых контуров: чертится дерево схемы и затем поочередно добав-

ляются главные ветви. Любой контур, образуемый добавлением новой ветви, является независимым, так как он отличается от предыдущих контуров новой ветвью. В итоге когда к дереву добавятся все главные ветви, получится граф схемы и число независимых контуров станет достаточным для расчета цепи. См. также § 10-8 — 10-13.

Предлагаем читателям выбрать таким способом независимые контуры в схеме рис. 7-1.

Для получения независимых контуров, достаточных для расчета цепи, можно начать и не с построения дерева, а с самого графа схемы, а затем поочередным размыканием главных ветвей дойти до дерева. В этом случае руковождаются следующим правилом: в заданной схеме выбирается какой-либо контур, размыкается одна из ветвей этого контура и в оставшейся части схемы выбирается новый контур, затем размыкается одна ветвь этого нового контура и т. д. до тех пор, пока в схеме не останется ни одного контура.

Предлагаем читателям применить для выбора независимых контуров и это правило.

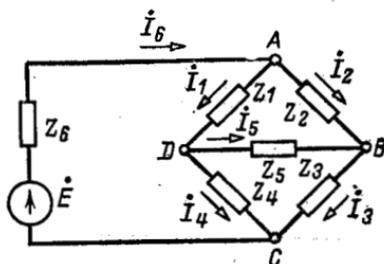


Рис. 7-3. Пример 7-1.

**Пример 7-1.** [Л. 9]. В мостовой схеме, представленной на рис. 7-3, заданы все комплексные сопротивления и э. д. с.  $\dot{E}$ . Требуется определить ток  $I_5$  в ветви  $Z_5$  (ток в диагонали мостовой схемы).

Схема содержит четыре узла и шесть ветвей. Следовательно, могут быть составлены три уравнения по первому закону Кирхгофа и три уравнения по второму закону Кирхгофа:

для узла А

$$-i_1 - i_2 + i_6 = 0;$$

для узла В

$$i_2 - i_3 + i_5 = 0;$$

для узла С

$$i_3 + i_4 - i_6 = 0;$$

для контура  $ABDA$

$$-Z_1 i_1 + Z_2 i_2 - Z_5 i_5 = 0;$$

для контура  $BCDB$

$$Z_3 i_3 - Z_4 i_4 + Z_5 i_5 = 0;$$

для контура  $ABCA$

$$Z_2 i_2 + Z_3 i_3 + Z_6 i_6 = \dot{E}.$$

В полученной системе из шести уравнений неизвестными являются токи в ветвях. Решая систему уравнений относительно искомого тока, находим:

$$I_3 = \frac{\dot{E}}{M} (Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3),$$

где

$$M = Z_3 [(Z_1 + Z_4)(Z_2 + Z_3) + Z_6(Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4)] + Z_1 Z_4 (Z_2 + Z_3) + Z_2 Z_3 (Z_1 + Z_4) + Z_6 (Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4).$$

Полученное выражение показывает, что ток в диагонали равен нулю, если выполнено условие  $Z_1 Z_3 = Z_2 Z_4$  (условие равновесия мостовой схемы).

## 7.2. МЕТОД КОНТУРНЫХ ТОКОВ

Метод контурных токов является одним из основных методов расчета сложных электрических цепей, которым широко пользуются на практике. Этот метод заключается в том, что вместо токов в ветвях определяются на основании второго закона Кирхгофа так называемые контурные токи, замыкающиеся в контурах.

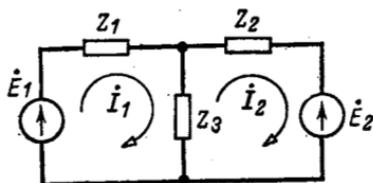


Рис. 7-4. Иллюстрация к методу контурных токов.

На рис. 7-4 в виде примера показана двухконтурная электрическая цепь, в которой  $I_1$  и  $I_2$  — контурные токи. Токи в сопротивлениях  $Z_1$  и  $Z_2$  равны соответствующим

контурным токам; ток в сопротивлении  $Z_3$ , являющемся общим для обоих контуров, равен разности контурных токов  $I_1$  и  $I_2$ , так как эти токи направлены в ветви  $Z_3$  встречно<sup>1</sup>. При этом если положительное направление искомого тока в ветви  $Z_3$  принять совпадающим с направлением контурного тока  $I_1$ , то ток в ветви будет равен  $I_1 - I_2$ . В противном случае он будет равен  $I_2 - I_1$ .

Число уравнений, записываемых для контурных токов по второму закону Кирхгофа, равно числу независимых контуров, т. е. для электрической схемы с числом узлов  $q$  и числом ветвей  $p$  задача нахождения контурных токов сведется к решению системы  $p - q + 1$  уравнений. Так, в схеме рис. 7-4  $q = 2$ ,  $p = 3$ ; следовательно, число уравнений равно  $3 - 2 + 1 = 2$  (число независимых контуров).

<sup>1</sup> Следует отметить, что если положительное направление одного из контурных токов ( $I_1$  или  $I_2$ ) изменить на обратное, то ток в ветви  $Z_3$  будет равен сумме этих токов.





Здесь  $\Delta_{ik}$  — алгебраическое дополнение элемента  $Z_{(ik)}$  определителя системы, т. е. умноженный на  $(-1)^{i+k}$  минор элемента  $Z_{ik}$  (минор образуется из определителя системы исключением из него  $i$ -й строки и  $k$ -го столбца).

Сокращенно система уравнений (7-3) записывается в виде:

$$I_k = \frac{1}{\Delta_z} \sum_{i=1}^n E_i \Delta_{ik}. \quad (7-4)$$

Первый индекс алгебраического дополнения  $i$ , обозначающий номер строки, вычеркиваемой в определителе системы, соответствует номеру контура, контурная э. д. с. которого умножается на данное алгебраическое дополнение. Второй индекс  $k$ , обозначающий номер столбца, вычеркиваемого в определителе системы, соответствует номеру контура, для которого вычисляется контурный ток.

Уравнения (7-2), выражающие второй закон Кирхгофа, записаны в предположении, что источниками электрической энергии служат источники э. д. с. При наличии в электрической схеме источников тока они могут быть заменены эквивалентными источниками э. д. с.

Если проводимости источников тока равны нулю, то целесообразно выбрать заданные токи в качестве контурных; тогда число неизвестных контурных токов и соответственно число уравнений сократятся на число заданных токов.

Если в заданной электрической схеме имеются параллельные ветви, то замена их эквивалентным комплексным сопротивлением сокращает число контуров (за счет тех, которые образованы параллельными ветвями).

Электрические цепи могут быть планарными или непланарными.

**П л а н а р н а я**, или плоская, электрическая цепь может быть вычерчена на плоскости в виде схемы с неперекрывающимися ветвями. В некоторых случаях пересечение ветвей в электрической схеме, являющееся результатом принятого способа начертания схемы, устраняется при другом способе изображения данной планарной электрической цепи, как это, например, представлено на рис. 7-5.

Электрическая цепь, приведенная на рис. 7-5, а, планарна, так как имеющееся пересечение ветвей устранимо в соответствии с рис. 7-5, б.



Непланарная электрическая цепь не может быть вычерчена на плоскости в виде схемы с неперекрещивающимися ветвями. Примером такой электрической цепи служит приведенная на рис. 7-5, в непланарная цепь, пересечение ветвей в которой не может быть устранено.

Если направление контурных токов во всех контурах планарной электрической цепи одинаково, например совпадает с ходом часовой стрелки, то общие сопротивления смежных контуров входят в систему уравнений (7-2) со знаком минус, так как контурные токи смежных контуров

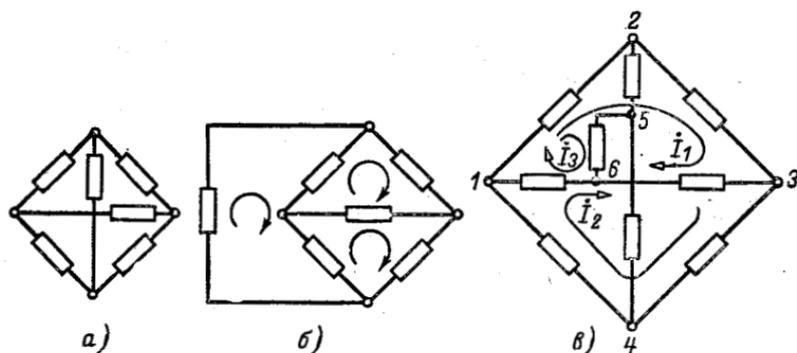


Рис. 7-5. Планарные (а и б) и непланарная (в) электрические цепи.

направлены в общих ветвях встречно. Направление контурных токов по ходу часовой стрелки принимается во всех контурах, кроме внешнего, охватывающего всю схему. В последнем контурный ток направляется против часовой стрелки (см. пример 7-2). Это правило, однако, не является обязательным.

В случае непланарной электрической цепи не представляется возможным иметь в общих ветвях только разности контурных токов, как это, например, видно из схемы рис. 7-5, в.

**Пример 7-2.** [Л. 9]. Пользуясь методом контурных токов, определить ток в диагонали мостовой схемы рис. 7-6.

Выбранные положительные направления контурных токов  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  указаны на схеме стрелками. Число уравнений, записываемых по второму закону Кирхгофа, равно трем (по числу независимых контуров):

$$\begin{aligned} 0 &= (Z_1 + Z_2 + Z_5) I_1 - Z_5 I_2 - Z_2 I_3; \\ 0 &= -Z_5 I_1 + (Z_3 + Z_4 + Z_5) I_2 - Z_3 I_3; \\ -\dot{E} &= -Z_2 I_1 - Z_3 I_2 + (Z_2 + Z_3 + Z_6) I_3. \end{aligned}$$

Решение полученной системы уравнений относительно контурных токов  $I_1$  и  $I_2$  дает:

$$i_1 = -\frac{\dot{E}}{M} [Z_3 Z_6 + Z_2 (Z_3 + Z_4 + Z_5)];$$

$$i_2 = -\frac{\dot{E}}{M} [Z_2 Z_5 + Z_3 (Z_1 + Z_2 + Z_6)],$$

где  $M$  имеет то же значение, что и в примере 7-1.

Искомый ток в диагонали мостовой схемы равен разности контурных токов:

$$i_5 = i_2 - i_1 = \frac{\dot{E}}{M} (Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3),$$

что совпадает с полученным в примере 7-1 ответом.

Следует заметить, что если в заданной схеме контуры выбрать так, чтобы через ветвь  $Z_5$  проходил только один контурный ток, то искомый ток в ветви  $Z_5$  будет равен именно этому контурному току, т. е. задача сведется к нахождению только одного контурного тока (вместо двух).

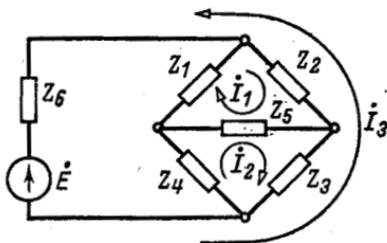


Рис. 7-6. Пример 7-2.

### 7-3. МЕТОД УЗЛОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Метод узловых напряжений заключается в том, что на основании первого закона Кирхгофа определяются потенциалы в узлах электрической цепи относительно некоторого базисного узла. Эти разности потенциалов называются узловыми напряжениями, причем направление их указывается стрелкой от рассматриваемого узла к базисному.

Напряжение на какой-либо ветви равно, очевидно, разности узловых напряжений концов данной ветви; произведение же этого напряжения на комплексную проводимость данной ветви равно току в этой ветви. Таким образом, зная узловые напряжения в электрической цепи, можно найти токи в ветвях.

Если принять потенциал базисного узла равным нулю, то напряжения между остальными узлами и базисным узлом будут равны также потенциалам этих узлов. Поэтому данный метод называется также методом узловых потенциалов.

На рис. 7-7 в виде примера изображена электрическая схема с двумя источниками тока, имеющая три узла: 1, 2 и 3. Выберем в данной схеме в качестве базиса узел 3 и





лами  $i$  и  $k$ , входящая со знаком минус при выбранном направлении всех узловых напряжений к базису, независимо от того, является ли данная электрическая цепь планарной или непланарной.

Решив систему уравнений (7-5) при помощи определителей<sup>1</sup>, получим формулу для  $k$ -го узлового напряжения относительно базиса:

$$\dot{U}_k = \frac{1}{\Delta_y} \sum_{i=1}^{q-1} \dot{I}_i \Delta_{ik}, \quad (7-6)$$

где  $\Delta_y$  — определитель системы<sup>2</sup>:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} Y_{(11)} & Y_{(12)} & \dots & Y_{(1, q-1)} \\ Y_{(21)} & Y_{(22)} & \dots & Y_{(2, q-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{(q-1, 1)} & Y_{(q-1, 2)} & \dots & Y_{(q-1, q-1)} \end{vmatrix};$$

$\Delta_{ik}$  — алгебраическое дополнение элемента  $Y_{(ik)}$  данного определителя.

Первый индекс  $i$  алгебраического дополнения, обозначающий номер строки, вычеркиваемой в определителе системы, соответствует номеру узла, заданный ток источника тока которого умножается на данное алгебраическое дополнение. Второй индекс  $k$ , обозначающий номер столбца, вычеркиваемого в определителе системы, соответствует номеру узла, для которого вычисляется узловое напряжение.

Уравнения (7-5), выражающие первый закон Кирхгофа, записаны в предположении, что в качестве источников электрической энергии служат источники тока. При наличии в электрической схеме источников э. д. с. последние должны быть заменены эквивалентными источниками тока.

Если в схеме имеются ветви, содержащие только э. д. с. (проводимости таких ветвей бесконечно велики), то эти ветви следует рассматривать как источники неизвестных токов, которые затем исключаются при сложении соответствующих уравнений. Дополнительными связями между неизвестными узловыми напряжениями будут являться известные напряжения между узлами, равные заданному э. д. с.

<sup>1</sup> См. сноску 2 на с. 160.

<sup>2</sup> Определитель снабжен индексом  $y$ , так как его элементами являются комплексные проводимости.



При наличии только одной ветви с э. д. с. и бесконечной проводимостью целесообразно принять за базисный узел один из узлов, к которому примыкает данная ветвь; тогда напряжение другого узла становится известным и число неизвестных сокращается на одно.

Метод узловых напряжений имеет преимущество перед методом контурных токов в том случае, когда число уравнений, записанных по первому закону Кирхгофа, меньше числа уравнений, записанных по второму закону Кирхгофа. Если заданная электрическая схема имеет  $q$  узлов и  $p$  ветвей, то в соответствии со сказанным выше, метод узловых напряжений представляет преимущество при  $q - 1 < p - q + 1$ , или, что то же, при  $2(q - 1) < p$ .

Здесь имеется в виду общий случай, когда число уравнений не сокращается за счет известных контурных токов или узловых напряжений.

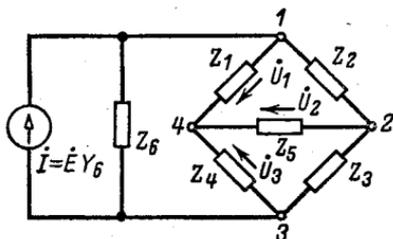


Рис. 7-8. Пример 7-3.

**Пример 7-3.** [Л. 9]. Пользуясь методом узловых напряжений определить ток в диагонали мостовой схемы (см. рис. 7-6).

В результате замены заданного источника э. д. с. эквивалентным источником тока получается схема (рис. 7-8), содержащая четыре узла. Для этой схемы по первому закону Кирхгофа записывают  $4 - 1 = 3$  уравнения (по числу независимых

узлов). Если выбрать в данной схеме в качестве базиса узел 4 и направить узловые напряжения к базису, то уравнения примут вид: для узла 1

$$Y_6 \dot{E} = (Y_1 + Y_2 + Y_6) \dot{U}_1 - Y_2 \dot{U}_2 - Y_6 \dot{U}_3;$$

для узла 2

$$0 = -Y_2 \dot{U}_1 + (Y_2 + Y_3 + Y_5) \dot{U}_2 - Y_3 \dot{U}_3;$$

для узла 3

$$-Y_6 \dot{E} = -Y_6 \dot{U}_1 - Y_3 \dot{U}_2 + (Y_3 + Y_4 + Y_6) \dot{U}_3.$$

Решение полученной системы уравнений относительно  $\dot{U}_2$  даст

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{E}}{N} Y_6 (Y_2 Y_4 - Y_1 Y_3),$$

где

$$N = Y_6 [(Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_4) + Y_6(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)] + Y_1 Y_4 (Y_2 + Y_3) + Y_2 Y_3 (Y_1 + Y_4) + Y_6 (Y_1 + Y_4)(Y_2 + Y_3).$$

Умножив найденное узловое напряжение  $\dot{U}_2$  на проводимость  $Y_5$  диагональной ветви мостовой схемы и изменив знак в соответствии с выбранным ранее направлением тока  $I_5$  (см. рис. 7.3), найдем иско-мый ток:

$$I_5 = \frac{\dot{E}}{N} Y_5 Y_6 (Y_1 Y_3 - Y_2 Y_4)$$

#### 7.4. МЕТОД НАЛОЖЕНИЯ

В линейной электрической цепи, содержащей источники э. д. с., контурные токи (и соответственно токи в вет-вях) представляют собой линейные функции контурных э. д. с. Математически они выражаются формулой (7-4):

$$I_k = \frac{1}{\Delta_z} \sum_{i=1}^n \dot{E}_i \Delta_{ik}.$$

Физический смысл этой формулы заключается в том, что ток в любом контуре линейной электрической цепи может быть получен как алгебраическая сумма токов, вызы-ваемых в этом контуре каждой из э. д. с. в отдельности.

Метод расчета токов, основанный на определении токов в одном и том же контуре (или ветви) при поочередном воз-действии э. д. с. и последующем алгебраическом сложении этих токов, называется методом наложения.

При определении частичных слагающих токов по методу наложения необходимо считать включенными внутренние сопротивления тех источников э. д. с., которые принимаются отсутствующими при вычислении слагающих токов. Если в цепи заданы идеальные источники э. д. с., т. е. внутрен-ние сопротивления источников равны нулю, то при опреде-лении токов, вызываемых какой-либо э. д. с., все осталь-ные источники э. д. с. закорачиваются.

В свою очередь в линейной электрической цепи, содер-жащей источники тока, узловые напряжения (и соответст-венно напряжения на ветвях) представляют собой линейные функции задающих токов источников. Математически они выражаются формулой (7-6):

$$\dot{U}_k = \frac{1}{\Delta_y} \sum_{i=1}^{q-1} I_i \Delta_{ik}.$$

Физический смысл этой формулы заключается в том, что узловое напряжение для любого узла линейной электри-ческой цепи может быть получено как алгебраическая сумма напряжений, вызываемых в этом узле каждым из задающих



токов в отдельности. Таким образом, формула (7-6), так же как и (7-4), представляет собой математическую запись метода наложения, справедливого для линейных электрических цепей.

При определении частичных слагающих узловых напряжений по методу наложения необходимо считать включенными внутренне проводимости тех источников тока, которые принимаются отсутствующими при вычислении слагающих напряжений. Если источники тока заданы без внутренних проводимостей, т. е. проводимости их равны нулю, то при пользовании методом наложения ветви с неучтенными источниками тока рвутся.

Если в линейной электрической цепи заданными являются одновременно источники э. д. с. и источники тока, то метод наложения применим и в этом случае. Например, ток в каком-либо контуре данной цепи может быть получен в результате алгебраического сложения токов, вызываемых в этом контуре поочередным действием источников э. д. с. и тока. При этом отсутствующие источники э. д. с. заменяются внутренними сопротивлениями, а отсутствующие источники тока — внутренними проводимостями.

**Пример 7-4.** Пользуясь методом наложения, определить ток в ветви  $Z_3$  схемы рис. 7-4.

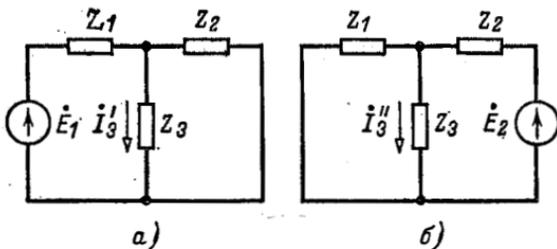


Рис. 7-9. Пример 7-4.

Искомый ток  $I_3$  определяется как сумма токов  $I_3'$  и  $I_3''$ , проходящих через ветвь  $Z_3$  под воздействием источников э. д. с.  $\dot{E}_1$  (рис. 7-9, а) и  $\dot{E}_2$  (рис. 7-9, б), взятых порознь.

Токи  $I_3'$  и  $I_3''$  суммируются, а не вычитаются, так как положительные направления их выбраны совпадающими:

$$I_3' = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} \frac{\dot{E}_1}{Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}} = \frac{Z_2 \dot{E}_1}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1};$$

$$I_3'' = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_3} \frac{\dot{E}_2}{Z_2 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3}} = \frac{Z_1 \dot{E}_2}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1};$$

следовательно,

$$I_3 = I'_3 + I''_3 = \frac{Z_2 \dot{E}_1 + Z_1 \dot{E}_2}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}.$$

**Пример 7-5.** Задана симметричная схема с неравными э. д. с.:  $E_1 = 12$  В и  $E_2 = 8$  В (рис. 7-10, а). Значения сопротивлений (в омах) указаны по схеме. Вычислить токи  $I_1$  и  $I_2$ . Заметив, что  $E_1 = \frac{1}{2}(E_1 + E_2) + \frac{1}{2}(E_1 - E_2)$  и  $E_2 = \frac{1}{2}(E_1 + E_2) - \frac{1}{2}(E_1 - E_2)$ , можно вместо заданной схемы рассмотреть две симметричные схемы, в каждой из которых э. д. с. источников равны. В первой схеме источники имеют э. д. с.  $\frac{1}{2}(E_1 + E_2) = 10$  В и полярность их одинакова; во второй схеме источники имеют э. д. с.  $\frac{1}{2}(E_1 - E_2) = 2$  В и полярность различна.

Пользуясь методикой, описанной в § 4-9, произведем соответствующие рассечения и замыкания накоротко по оси симметрии (рис. 7-10, б и в).

Искомые токи найдутся методом наложения:

$$I_1 = \frac{10}{4} + \frac{2}{6} = 2,83 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{10}{4} - \frac{2}{6} = 2,17 \text{ А}.$$

### 7-5. ВХОДНЫЕ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ПРОВОДИМОСТИ И СОПРОТИВЛЕНИЯ

В электротехнике, радиотехнике и теории автоматического регулирования широко используются понятия о входных и передаточных функциях.

Условимся называть источник э. д. с. независимым или автономным (самостоятельным), если э. д. с. источника не зависит от напряжений и токов в цепи (с понятием «зависимый» источник мы встретимся в § 7-7).

Пусть в какую-либо ветвь контура электрической цепи включен независимый источник э. д. с.  $\dot{E}_i$  (рис. 7-11, а), причем данная ветвь не является общей, а принадлежит

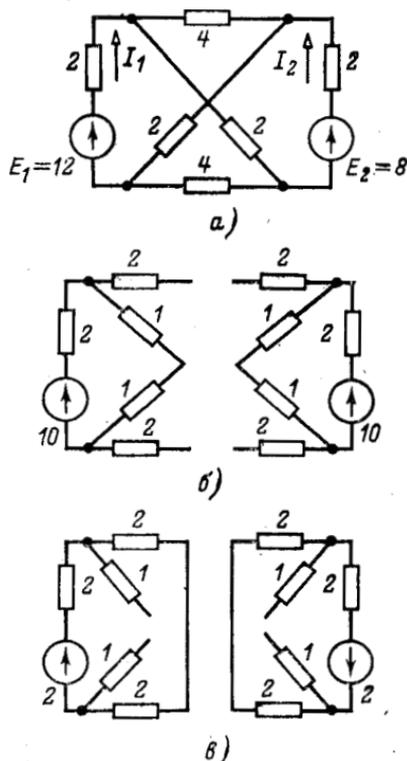


Рис. 7-10. Пример 7-5.



только контуру  $i$ . Если вся остальная часть электрической цепи не содержит независимых источников электрической энергии, то в соответствии с формулой (7-4) заданная э. д. с.  $\dot{E}_i$  вызовет в данном контуре  $i$  и в каком-либо другом контуре  $k$  токи

$$\dot{I}_i = \frac{\Delta_{ii}}{\Delta_z} \dot{E}_i \quad (7-7)$$

и

$$\dot{I}_k = \frac{\Delta_{ik}}{\Delta_z} \dot{E}_i. \quad (7-8)$$

На рис. 7-11, а показаны контуры  $i$  и  $k$  заданной электрической цепи.

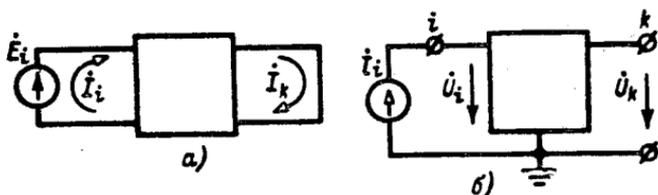


Рис. 7-11. Определение понятий входных и передаточных проводимостей и сопротивлений.

Отношение контурного тока к э. д. с., действующей в том же контуре, при отсутствии независимых источников во всех остальных контурах называется **входной проводимостью** электрической цепи:

$$\frac{I_i}{\dot{E}_i} = \frac{\Delta_{ii}}{\Delta_z} = Y_{ii}. \quad (7-9)$$

В свою очередь отношение контурного тока к э. д. с., действующей в другом контуре, при отсутствии независимых источников во всех остальных контурах называется **передаточной (или взаимной) проводимостью** контуров:

$$\frac{I_k}{\dot{E}_i} = \frac{\Delta_{ik}}{\Delta_z} = Y_{ki}. \quad (7-10)$$

Элементами определителя системы и алгебраических дополнений в выражениях (7-9) и (7-10) служат собственные и общие сопротивления контуров заданной электрической цепи. Определитель  $\Delta_z$  имеет размерность сопротивления в степени  $n$ , где  $n$  — порядок определителя (равный числу независимых контуров данной цепи); алгебраические до-

полнения  $\Delta_{ii}$  и  $\Delta_{ik}$  имеют размерность сопротивления в степени  $n - 1$ . В результате деления алгебраического дополнения на определитель системы получается величина, имеющая размерность проводимости.

На основании (7-9) и (7-10) заключаем, что входная и передаточная проводимости численно равны токам в контурах  $i$  и  $k$ , когда в контуре  $i$  действует э. д. с., равная 1 В.

С учетом обозначений (7-9) и (7-10) выражения для токов (7-4) принимают вид:

$$I_k = \sum_{i=1}^n Y_{ki} \dot{E}_i. \quad (7-11)$$

Аналогичные рассуждения могут быть проведены и в отношении узлов  $i$  и  $k$  электрической цепи в предположении, что к узлу  $i$  подключен независимый источник тока  $^1 I_i$ , а вся остальная часть цепи не содержит независимых источников (рис. 7-11, б). В соответствии с (7-6) заданный ток  $I_i$ , обусловит появление узловых напряжений для узлов  $i$  и  $k$ :

$$\dot{U}_i = \frac{\Delta_{ii}}{\Delta_y} I_i \quad (7-12)$$

и

$$U_k = \frac{\Delta_{ik}}{\Delta_y} I_i. \quad (7-13)$$

Отношение напряжения в узле к току, заданному в том же узле, при отсутствии в схеме других независимых источников называется **входным сопротивлением** электрической цепи:

$$\frac{\dot{U}_i}{I_i} = \frac{\Delta_{ii}}{\Delta_y} = Z_{ii}; \quad (7-14)$$

соответственно отношение напряжения в узле к току, заданному в другом узле, при отсутствии в схеме других источников называется **передаточным** (или **взаимным**) **сопротивлением** узлов:

$$\frac{\dot{U}_k}{I_i} = \frac{\Delta_{ik}}{\Delta_y} = Z_{ki}. \quad (7-15)$$

Элементами определителя системы и алгебраических дополнений в (7-14) и (7-15) служат собственные и общие проводимости узлов заданной электрической цепи. Опреде-

<sup>1</sup> Источник тока называется независимым, или автономным, если ток источника не зависит от напряжений и токов в цепи.



литель  $\Delta_y$  имеет размерность проводимости в степени  $m$ , где  $m$  — порядок определителя (на единицу меньше числа узлов в заданной схеме); алгебраические дополнения  $\Delta_{ii}$  и  $\Delta_{ik}$  имеют размерность проводимости в степени  $m - 1$ . В результате деления алгебраического дополнения на определитель системы получается величина, имеющая размерность сопротивления.

На основании (7-14) и (7-15) заключаем, что входное и передаточное сопротивления узлов численно равны напряжениям в узлах  $i$  и  $k$  (относительно базисного узла), когда в узле  $i$  задан ток, равный 1 А.

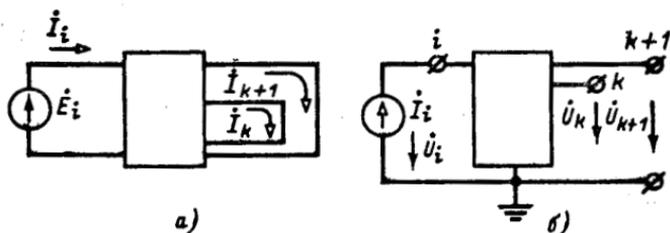


Рис. 7-12. Отношение токов (а) и напряжений (б).

С учетом обозначений (7-14) и (7-15) выражения для напряжений (7-6) принимают вид:

$$\dot{U}_k = \sum_{i=1}^{q-1} Z_{ki} \dot{I}_i. \quad (7-16)$$

Следует иметь в виду, что входным сопротивлением может также называться величина, обратная выражению (7-9), а входной проводимостью — величина, обратная выражению (7-14).

Очевидно, что для одной и той же пары выводов электрической цепи, не содержащей источников, величины  $Y_{ii}$  и  $Z_{ii}$ , определяемые из (7-9) и (7-14), взаимно обратны, т. е.

$$Z_{ii} = 1/Y_{ii}.$$

Отношение двух контурных токов  $\dot{I}_k$  и  $\dot{I}_{k+1}$ , вызываемых в контурах  $k$  и  $k + 1$  источником э. д. с.  $\dot{E}_i$ , включенным в контур  $i$  (рис. 7-12, а), определяется на основании (7-10), отношением соответствующих передаточных проводимостей, а именно:

$$\frac{\dot{I}_k}{\dot{I}_{k+1}} = \frac{Y_{ki} \dot{E}_i}{Y_{k+1, i} \dot{E}_i} = \frac{Y_{ki}}{Y_{k+1, i}}.$$

Аналогично отношение двух узловых напряжений  $\dot{U}_k$  и  $\dot{U}_{k+1}$ , обусловливаемых в узлах  $k$  и  $k+1$  источником тока  $I_i$ , заданным в узле  $i$  (рис. 7-12, б), определяется на основании (7-15) отношением соответствующих передаточных сопротивлений:

$$\frac{\dot{U}_k}{\dot{U}_{k+1}} = \frac{Z_{ki} I_i}{Z_{k+1, i} I_i} = \frac{Z_{ki}}{Z_{k+1, i}}.$$

Входные и передаточные сопротивления и проводимости, а также отношения одноименных электрических величин (токов, напряжений) подробнее рассмотрены в гл. 9.

## 7-6. ТЕОРЕМА ОБРАТИМОСТИ (ИЛИ ВЗАИМНОСТИ)

Пассивные линейные электрические цепи обладают важным свойством, известным под названием **о б р а т и м о с т и**. Основанная на этом свойстве теорема обратимости (или взаимности) может быть сформулирована в двух вариантах: применительно к источникам э. д. с. и тока. Ограничимся рассмотрением первого варианта.

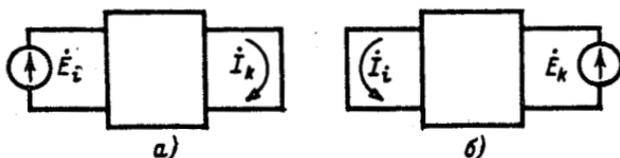


Рис. 7-13. Теорема обратимости (вариант с источником э. д. с.).

**В а р и а н т с и с т о ч н и к о м э. д. с.** На рис. 7-13 условно показана электрическая цепь с выделенными контурами  $i$  и  $k$ . Электродвижущая сила  $\dot{E}_i$  в контуре  $i$  (рис. 7-13, а) вызывает ток в контуре  $k$ , который согласно (7-10) равен:

$$I_k = Y_{ki} \dot{E}_i.$$

Соответственно э. д. с.  $\dot{E}_k$  в контуре  $k$  (рис. 7-13, б) вызывает ток в контуре  $i$ .

$$I_i = Y_{ik} \dot{E}_k.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{I_k}{I_i} = \frac{Y_{ki}}{Y_{ik}} \frac{\dot{E}_i}{\dot{E}_k}.$$

Алгебраические дополнения  $\Delta_{ik}$  и  $\Delta_{ki}$ , входящие в выражения  $Y_{ki}$  и  $Y_{ik}$ , различаются только тем, что в них

строки заменены столбцами с учетом того, что их элементы — общие сопротивления контуров заданной цепи — не изменяются от перестановки индексов.

Поэтому  $\Delta_{ik} = \Delta_{ki}$  и, следовательно,

$$Y_{ki} = Y_{ik}. \quad (7-17)$$

Электрические цепи, для которых выполняется условие (7-17), называются обратимыми цепями. Для таких цепей имеем:

$$\frac{I_k}{I_l} = \frac{\dot{E}_l}{\dot{E}_k}.$$

Если принять  $E_l = E_k$ , то  $I_l = I_k$ .

Таким образом, для обратимых цепей справедливо следующее положение: *если некоторая э. д. с., находящаяся*

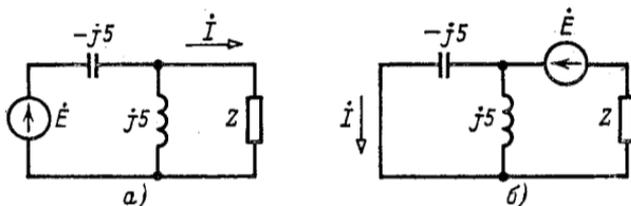


Рис. 7-14. Пример 7-6.

*в каком-либо контуре электрической цепи, вызывает ток в другом контуре данной цепи, то та же э. д. с., будучи перенесенной во второй контур, вызовет в первом контурный ток с такими же модулем и фазой.*

При соответствующем выборе контурных токов ток в ветви равен контурному току. Поэтому данная теорема справедлива также для токов в ветвях.

Использование свойства обратимости пассивных линейных электрических цепей в ряде случаев упрощает расчеты. С этим важным свойством пассивных линейных цепей нам придется неоднократно встречаться далее, особенно в гл. 9.

Практическое применение теоремы обратимости иллюстрировано в примерах 7-6 и 7-7.

**Пример 7-6.** Воспользовавшись теоремой обратимости, вычислить ток  $I$  в схеме рис. 7-14, а при любом конечном значении сопротивления  $Z$ . Дано:  $\dot{E} = 10 \angle 0^\circ \text{ В}$ .

Применение теоремы обратимости облегчает в данном случае расчет тем, что после переноса э. д. с. в ветвь  $Z$  (рис. 7-14, б) получается

схема резонанса токов, в которой ток источника равен нулю; поэтому искомый ток, равный току в емкости схемы рис. 7-14, б, находится как отношение э. д. с. к сопротивлению емкостей ветви:

$$I = \frac{10 \angle 0^\circ}{-j5} = j2 \text{ А.}$$

## 7-7. ТЕОРЕМА КОМПЕНСАЦИИ

Токи в электрической цепи не изменятся, если любой участок цепи заменить э. д. с., равной напряжению на данном участке и направленной навстречу току, проходящему по данному участку.

Справедливость этого положения, носящего название теоремы компенсации, вытекает из того, что любое из слагающих падения напряжений, входящих в уравнение по второму закону Кирхгофа, может быть

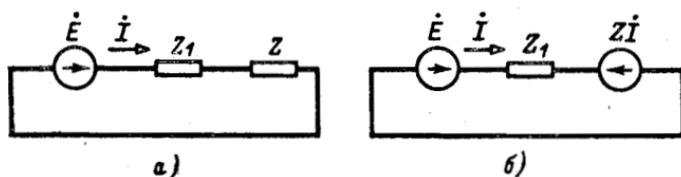


Рис. 7-15. Теорема компенсации.

перенесено в другую сторону уравнения с противоположным знаком, т. е. может рассматриваться как дополнительная э. д. с., направленная навстречу току.

Иллюстрацией сказанного выше служит рис. 7-15; уравнение по второму закону Кирхгофа, записанное для схемы рис. 7-15, а как  $\dot{E} = Z_1 \dot{I} + Z \dot{I}$ , может быть представлено в виде  $\dot{E} - Z \dot{I} = Z_1 \dot{I}$ .

Последней записи уравнения соответствует схема рис. 7-15, б, в которой вместо сопротивления  $Z$  включена э. д. с.  $Z \dot{I}$ , направленная противоположно току  $\dot{I}$ .

Данная теорема справедлива и для разветвленных электрических цепей. Рисунки 7-16, а и б иллюстрируют возможность замены комплексного сопротивления  $Z$  источником э. д. с.  $\dot{E} = Z (\dot{I}_1 - \dot{I}_2)$ , действующим навстречу току  $\dot{I}_1 - \dot{I}_2$ , проходящему через сопротивление  $Z$ .

Вместо источника э. д. с. может быть включен источник тока (рис. 7-16, в), обуславливающий прохождение между

узлами 1 и 2 того же тока, что и в схеме рис. 7-16, а; токи и напряжения в остальной части цепи при этом не меняются.

Следует заметить, что э. д. с. или ток источника, заменяющего собой участок цепи, определяется в зависимости от тока, проходящего через данный участок. При изменении параметров остальной части цепи ток на данном участке в общем случае изменяется, и поэтому указанный выше источник не является самостоятельным, а представляет собой так называемый *з а в и с и м ы й*, или неавтономный, источник.

Применение теоремы компенсации облегчает изучение свойств линейных электрических цепей. Так, заменяя какой-либо участок цепи зависимым источником э. д. с. или тока

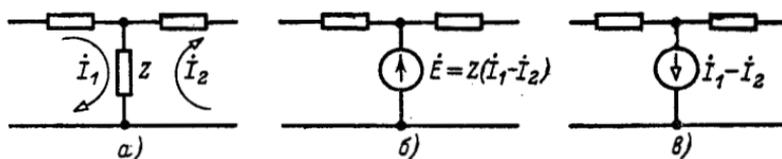


Рис. 7-16. Замена пассивной ветви (а) зависимым источником э. д. с. (б) или зависимым источником тока (в).

и пользуясь методом наложения, легко убедиться в том, что напряжения и токи в остальной части цепи являются линейными функциями напряжения на данном участке или тока, проходящего через него. Например, если при изменении комплексного сопротивления  $Z$  в какой-либо ветви изменяется ток  $I_1$  в этой ветви, то ток  $I_2$  в какой-либо другой ветви связан с  $I_1$  линейной функциональной зависимостью

$$I_2 = I_{2(Z=\infty)} + KI_1;$$

здесь  $I_{2(Z=\infty)}$  — значение тока  $I_2$  при  $Z = \infty$ , т. е. при разомкнутой первой ветви.

Комплексный коэффициент  $K$  находится из условия, что при  $Z = 0$

$$I_{2(Z=0)} = I_{2(Z=\infty)} + KI_{1(Z=0)};$$

поэтому

$$I_2 = I_{2(Z=\infty)} + \frac{I_{2(Z=0)} - I_{2(Z=\infty)}}{I_{1(Z=0)}} I_1.$$

## 7-8. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ ТОКОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ В ОДНОЙ ВЕТВИ

На основании методов наложения и теоремы компенсации вытекает следующая теорема об изменении токов в электрической цепи, вызываемом изменением параметра в одной ветви данной цепи.

*Если комплексное сопротивление какой-либо ветви электрической цепи изменится на  $\pm Z'$ , то изменение токов в цепи будет таким же, какое вызывается действием в ветви*

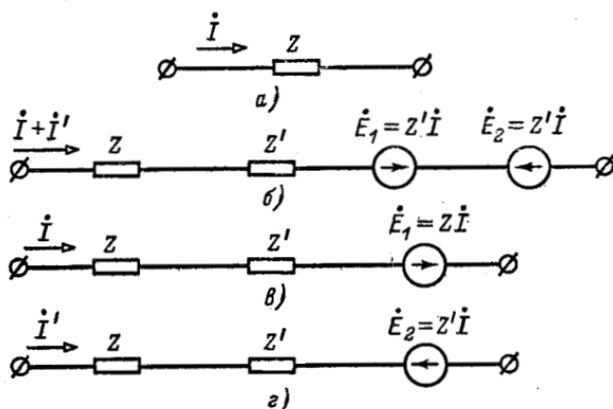


Рис. 7-17. Изменение сопротивления ветви.

$Z \pm Z'$  э. д. с., направленной противоположно первоначальному току  $\dot{I}$  в данной ветви и равной по модулю и знаку  $\pm Z'\dot{I}$ .

Сказанное поясняется на рис. 7-17.

Положим, что в ветви, комплексное сопротивление которой равно  $Z$ , проходит ток  $\dot{I}$  (рис. 7-17, а). Спрашивается, как изменится ток, если сопротивление ветви изменится на  $+Z'$ , т. е. станет равным  $Z + Z'$ .

На рис. 7-17, б показана ветвь с измененным сопротивлением; предполагается, что в результате изменения сопротивления  $Z$  на  $Z'$  первоначальный ток  $\dot{I}$  изменился на  $\dot{I}'$ , т. е. стал равным  $\dot{I} + \dot{I}'$ .

Включим в данную ветвь две противоположно направленные э. д. с.  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$ , равные  $Z'\dot{I}$  каждая (ток в цепи при этом не изменится), и, пользуясь методом наложения, рассмотрим действие этих э. д. с. поочередно. При отсутствии  $\dot{E}_2$  получаются условия, тождественные первоначальным, так как схемы рис. 7-17, а и в эквивалентны: падение

напряжения от тока  $I$  в  $Z'$  компенсируется на основании теоремы компенсации дополнительной э. д. с.  $\dot{E}_1 = Z'I$ . Следовательно, изменение тока в цепи обуславливается действием э. д. с. с  $\dot{E}_2 = Z'I$ , направленной навстречу  $I$  (рис. 7-17, з), что и требовалось доказать.

Применение данной теоремы бывает целесообразным в тех случаях, когда известны токи в цепи до изменения параметров ветви.

Кроме того, измерив ток в электрической цепи с помощью амперметра, сопротивление которого известно, можно, основываясь на этой теореме, уточнить значение тока в цепи, т. е. исключить погрешность, вызванную сопротивлением прибора. Дополнительный ток, обусловленный сопротивлением прибора, согласно теореме равен:

$$I' = \frac{-\dot{E}_2}{Z_3} = \frac{-IZ'}{Z_3},$$

где  $I$  — истинный ток (без амперметра);  $Z'$  — сопротивление амперметра;  $Z_3$  — эквивалентное сопротивление пассивной цепи (с амперметром).

Через амперметр проходит ток

$$I_a = I + I' = I \left( 1 - \frac{Z'}{Z_3} \right).$$

Следовательно, имея показание амперметра  $I_a$ , можно вычислить искомый ток по формуле

$$I = I_a \left| \frac{Z_3}{Z_3 - Z'} \right|.$$

Следует заметить, что размыкание какой-либо ветви заданной электрической цепи соответствует предельному случаю  $Z' = \infty$ , когда решение по приведенной выше теореме становится неопределенным. В этом случае применим любой из следующих приемов:

1. Включим между разомкнутыми точками два источника тока  $I$ , соединенных параллельно. При принятом на рис. 7-18, а направлении этих источников ток в данной ветви в соответствии с первым законом Кирхгофа равен нулю. Применяя метод наложения и считая, что ток  $I$  выбран равным току в ветви до ее размыкания, приходим к выводу, что размыкание ветви равносильно добавлению к токам предшествующего режима новой системы токов, обусловленных действием в данной ветви пассивной электрической цепи источника тока, равного току, протекавшему в той же ветви перед ее размыканием.



2. Обозначим через  $\dot{U}_x$  напряжение между разомкнутыми выводами электрической цепи (напряжение холостого хода) и присоединим к ним источник э. д. с.  $\dot{E} = \dot{U}_x$ ; токи и напряжения в цепи при этом не изменятся. Применяв метод наложения, получим, что распределение токов и напряжений в исходной цепи складывается из соответствующих электрических величин двух схем (рис. 7-18, б): активной цепи с замкнутыми выводами и пассивной цепи с источником э. д. с.  $\dot{U}_x$ , присоединенным к указанным выводам.

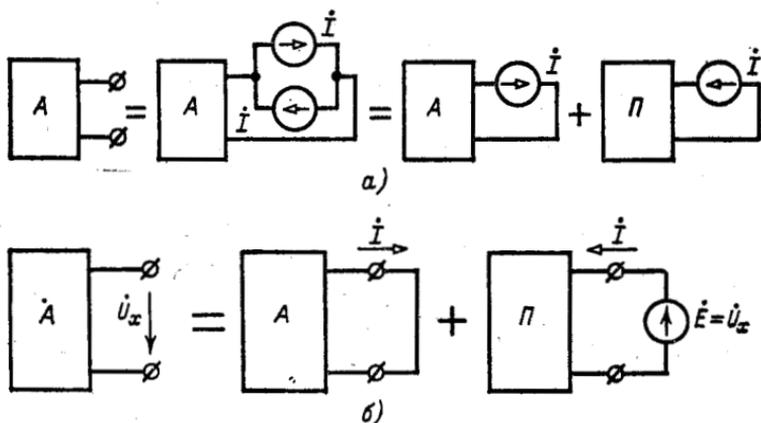


Рис. 7-18. Размыкание ветви.

а — вариант с источником тока; б — вариант с источником э. д. с.

На рис. 7-18 буквой *A* обозначена заданная цепь, содержащая источники электрической энергии (активная цепь), а буквой *П* — та же цепь в предположении, что на месте источников оставлены только комплексные сопротивления или проводимости (пассивная цепь). Знаки сложения и равенства на рис. 7-18 относятся к токораспределениям.

Практическое применение теоремы об изменении токов в электрической цепи проиллюстрировано ниже на примере расчета несбалансированной мостовой схемы.

**Пример 7-7.** Найти ток в диагональной ветви мостовой схемы рис. 7-19, а, если сопротивления в трех плечах моста равны 10 Ом каждое и сопротивление в четвертом плече равно 10,1 Ом; сопротивление диагональной ветви 1 Ом.

При равенстве сопротивлений всех плеч (10 Ом) ток в диагональной ветви отсутствовал бы и через каждое плечо проходил бы ток, равный  $10/20 = 0,5$  А. Увеличение сопротивления одного плеча на 0,1 Ом равносильно на основании указанной выше теоремы введению в изме-

ненное плечо дополнительной э. д. с.  $0,1 \cdot 0,5 = 0,05$  В (рис. 7-19, б). Последняя вызывает в диагональной ветви ток, который может быть вычислен по теореме об эквивалентном источнике э. д. с. (см. § 7-9). Искомый ток равен  $0,00225$  А.

Для вычисления этого тока можно также воспользоваться теоремой обратимости (вариант с э. д. с.), согласно которой искомый

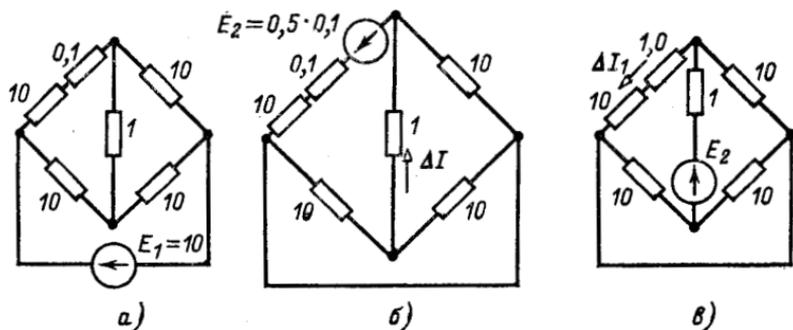


Рис. 7-19. Пример 7-7.

ток равен тому току, который проходил бы через плечо с сопротивлением  $10,1$  Ом, если бы источник э. д. с.  $0,05$  В был перенесен в диагональную ветвь (рис. 7-19, в).

В этом случае расчет может быть упрощен, если пренебречь разницей в сопротивлениях плеч мостовой схемы; приближенное значение искомого тока получается равным  $0,05/2,11 = 0,00227$  А.

## 7-9. ТЕОРЕМА ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОМ ИСТОЧНИКЕ

Теорема об эквивалентном источнике часто применяется в расчетах электрических цепей. С помощью этой важной теоремы сложная электрическая схема с произвольным числом источников электрической энергии приводится к схеме с одним источником, благодаря чему расчет электрической цепи упрощается.

Существуют два варианта теоремы об эквивалентном источнике: вариант с источником э. д. с. и вариант с источником тока.

### Теорема об эквивалентном источнике э. д. с.

*Ток в любой ветви  $tn$  линейной электрической цепи не изменится, если электрическую цепь, к которой подключена данная ветвь, заменить эквивалентным источником э. д. с., которая должна быть равна напряжению на выводах разомкнутой цепи  $tn$ , а внутреннее сопротивление источника*

должно равняться входному сопротивлению пассивной электрической цепи со стороны выводов  $m$  и  $n$  при разомкнутой ветви  $mn$ .

Данная теорема доказывается следующим образом: в ветвь  $mn$  вводятся две равные и противоположно направленные э. д. с.  $\dot{U}_{mn}$  при условии, что  $\dot{U}_{mn}$  равно напряжению между выводами  $m$  и  $n$  при разомкнутой ветви  $mn$ , т. е. напряжению холостого хода (рис. 7-20).

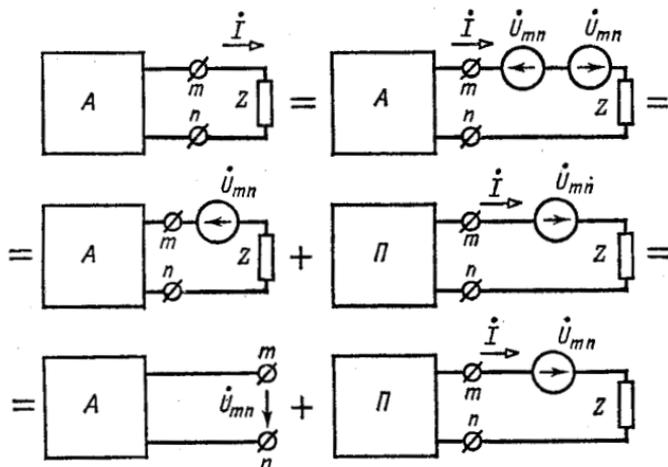


Рис. 7-20, Теорема об эквивалентном источнике напряжения,

Применение метода наложения в соответствии с рис. 7-20 приводит к выводу, что ток в ветви  $Z$  равен:

$$i = \frac{\dot{U}_{mn}}{Z_0 + Z}, \quad (7-18)$$

где  $Z_0$  — комплексное сопротивление всей пассивной цепи  $\Pi$ . Таким образом, ток в ветви  $Z$  получается в предположении, что данная ветвь подключена к источнику э. д. с., которая равна  $\dot{U}_{mn}$ , а внутреннее сопротивление равно  $Z_0$ . Следует заметить, что в соответствии с рис. 7-20 ток в какой-либо другой ветви заданной электрической цепи может быть получен в результате алгебраического сложения тока, проходящего через эту ветвь при разомкнутых выводах  $m$  и  $n$ , с током, возникающим в ней под воздействием э. д. с.  $\dot{U}_{mn}$  в ветви  $Z$  (когда остальная цепь пассивна). Поэтому, если известно распределение токов в электрической цепи при разомкнутой ветви  $Z$ , то последующее распределение

токов при включенной ветви находится весьма легко наложением на предыдущий режим тех токов, которые обуславливаются воздействием на пассивную цепь э. д. с.  $\dot{U}_{mn}$  в ветви  $Z$ .

Как уже указывалось выше, метод наложения применим не только к токам, но и к напряжениям. Поэтому, пользуясь описанным приемом, можно находить также и распределение напряжений.

При наличии в электрической цепи нескольких источников э. д. с. и тока одинаковой частоты напряжение холостого хода является линейной функцией заданных э. д. с. и токов источников.

Для доказательства теоремы об эквивалентном источнике в ветвь вводились две противоположно направленные э. д. с., равные напряжению холостого хода в этой ветви. Такой же прием может быть применен одновременно и к двум ветвям любой сложной активной цепи. Тогда действительное токораспределение в цепи получится как сумма токораспределений в двух схемах:

- 1) в активной схеме — при разомкнутых двух ветвях;
- 2) в пассивной схеме — при питании ее из двух ветвей источниками э. д. с., равными напряжениям холостого хода на этих ветвях и направленными по токам, т. е. так же, как напряжения холостого хода.

Указанный прием представляет удобство в том случае, когда известно токораспределение при режиме холостого хода для обеих ветвей. Тогда при замыкании этих ветвей достаточно лишь наложить токи, полученные из второй схемы с двумя э. д. с.

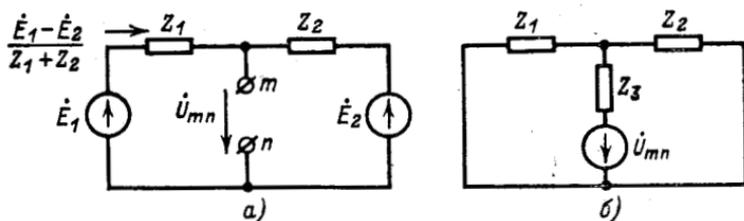


Рис. 7-21. Пример 7-8.

**Пример 7-8.** Пользуясь теоремой об эквивалентном источнике э. д. с., определить токи в ветвях схемы рис. 7-4.

Размыкание ветви и соответственно нахождение напряжения холостого хода могут быть произведены в любой из трех ветвей заданной электрической цепи. Рисунок 7-21 показан для случая размыкания ветви  $Z_3$ .

Напряжение холостого хода  $\dot{U}_{mn}$  находится в этом случае как разность э. д. с.  $\dot{E}_1$  и падения напряжения от тока  $\frac{\dot{E}_1 - \dot{E}_2}{Z_1 + Z_2}$  в комплексном сопротивлении  $Z_1$  (рис. 7-21, а):

$$\dot{U}_{mn} = \dot{E}_1 - Z_1 \frac{\dot{E}_1 - \dot{E}_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{Z_2 \dot{E}_1 + Z_1 \dot{E}_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Под воздействием э. д. с.  $\dot{U}_{mn}$  в схеме рис. 7-21, б через комплексное сопротивление  $Z_3$  идет ток

$$I_3 = \frac{\dot{U}_{mn}}{Z_3 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}} = \frac{Z_2 \dot{E}_1 + Z_1 \dot{E}_2}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1},$$

который разветвляется в  $Z_1$  и  $Z_2$ : через  $Z_1$  проходит ток

$$\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} I_3,$$

а через  $Z_2$  — ток

$$\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} I_3.$$

Искомые токи в ветвях  $Z_1'$  и  $Z_2$  определяются в результате сложения токов, проходящих в схемах рис. 7-21, а и б, т. е.

$$I_1 = \frac{\dot{E}_1 - \dot{E}_2}{Z_1 + Z_2} + \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \frac{Z_2 \dot{E}_1 + Z_1 \dot{E}_2}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} = \frac{(Z_2 + Z_3) \dot{E}_1 - Z_3 \dot{E}_2}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1};$$

$$I_2 = \frac{\dot{E}_1 - \dot{E}_2}{Z_1 + Z_2} - \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \frac{Z_2 \dot{E}_1 + Z_1 \dot{E}_2}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} = \frac{-(Z_1 + Z_3) \dot{E}_2 + Z_3 \dot{E}_1}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}.$$

Данный пример иллюстрирует применение теоремы об эквивалентном источнике э. д. с. для вычисления токов в разных ветвях, причем не ставится цель получить решение кратчайшим путем.

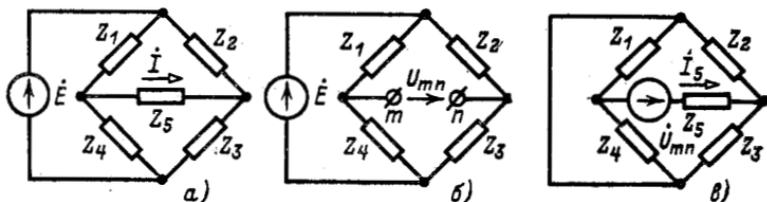


Рис. 7-22. Пример 7-9.

**Пример 7-9.** Пользуясь теоремой об эквивалентном источнике э. д. с., определить ток в диагональной ветви мостовой схемы рис. 7-22, а.

Разомкнув ветвь  $Z_5$ , находим напряжение холостого хода  $\dot{U}_{mn}$  как разность напряжений на участках  $Z_4$  и  $Z_3$  (рис. 7-22, б):

$$\dot{U}_{mn} = Z_4 \frac{\dot{E}}{Z_1 + Z_4} - Z_3 \frac{\dot{E}}{Z_2 + Z_3} = \frac{Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3}{(Z_1 + Z_4)(Z_2 + Z_3)} \dot{E}.$$

Сопротивление между  $m$  и  $n$  при  $E = 0$  и разомкнутой ветви  $Z_1$  равно (рис. 7-22, в):

$$Z_0 = \frac{Z_1 Z_4}{Z_1 + Z_4} + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}.$$

На основании (7-18)

$$\dot{i}_5 = \frac{\dot{U}_{mn}}{Z_0 + Z_5}.$$

### Теорема об эквивалентном источнике тока

Ток в любой ветви  $mn$  линейной электрической цепи не изменится, если электрическую цепь, к которой подключена данная ветвь, заменить эквивалентным источником тока; ток этого источника должен быть равен току, проходящему между выводами  $m$  и  $n$ , замкнутыми накоротко, а внутренняя проводимость источника должна равняться входной проводимости пассивной электрической цепи со стороны выводов  $m$  и  $n$  при разомкнутой ветви  $mn$ .

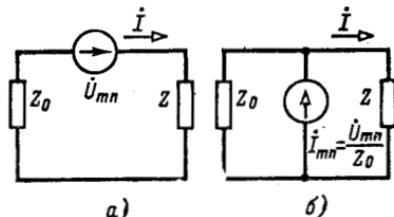


Рис. 7-23. Теорема об эквивалентном источнике тока.

внутреннее сопротивление равно  $Z_0$  (рис. 7-23, а), может быть заменен источником тока (рис. 7-23, б)

$$i_{mn} = \frac{\dot{U}_{mn}}{Z_0} = Y_0 \dot{U}_{mn}.$$

Последнее выражение есть не что иное, как ток, проходящий между выводами  $m$  и  $n$ , замкнутыми накоротко (ток короткого замыкания). Искомый ток в цепи равен:

$$i = \frac{Z_0}{Z_0 + Z} i_{mn} = \frac{Y_0}{Y_0 + Y} i_{mn}, \quad (7-19)$$

где

$$Y = \frac{1}{Z}.$$

Если известно распределение токов в электрической цепи при замкнутых выводах  $m$  и  $n$ , то распределение токов в цепи при включенной ветви  $Z$  может быть найдено посредством наложения на предыдущий режим тех токов, которые получаются в результате присоедине-

ния источника тока  $\dot{I}_{mn}$  к ветви  $Z$  (когда остальная часть цепи пассивна).

При наличии в электрической цепи нескольких источников э. д. с. и тока одинаковой частоты ток короткого замыкания является линейной функцией заданных э. д. с. и токов источников.

**Пример 7-10.** Пользуясь теоремой об эквивалентном источнике тока, определить ток  $\dot{I}_3$  в ветви  $Z_3$  схемы рис. 7-4.

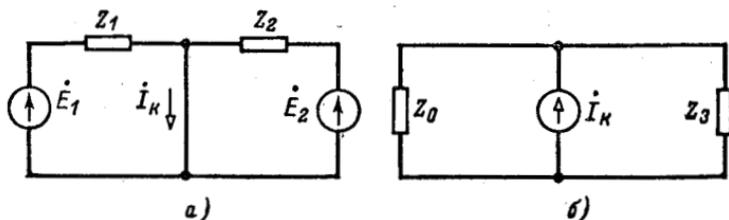


Рис. 7-24, Пример 7-10.

Ток эквивалентного источника равен току короткого замыкания ( $Z_3 = 0$ , рис. 7-24, а):

$$\dot{I}_{mn} = \dot{I}_k = \frac{\dot{E}_1}{Z_1} + \frac{\dot{E}_2}{Z_2} = Y_1 \dot{E}_1 + Y_2 \dot{E}_2.$$

Комплексная проводимость эквивалентного источника равна  $Y_0 = Y_1 + Y_2$ . Следовательно, на основании (7-19) искомый ток равен:

$$\dot{I}_3 = \frac{Y_3}{Y_0 + Y_3} \dot{I}_k = \frac{Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \dot{I}_k = \frac{Z_2 \dot{E}_1 + Z_1 \dot{E}_2}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}.$$

## 7-10. ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЦ К РАСЧЕТУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Математическая символика и правила матричной алгебры позволяют упростить запись систем уравнений, получающихся при расчете сложных электрических цепей. В этом отношении матричную алгебру можно сравнить со стенографией, которая облегчает и ускоряет запись.

Напомним, что матрица представляет собой совокупность величин, называемых ее элементами и расположенных в виде прямоугольной таблицы<sup>1</sup>. Если число строк равно числу столбцов, то матрица называется квадратной. Матрица, содержащая один столбец, называется столбцовой или матрицей-столбцом.

Приведенная в § 7-2 система уравнений, записанных по второму закону Кирхгофа для контурных э. д. с. и контурных токов, может быть представлена в виде произведений квадратной матрицы собственных и общих сопротивлений контуров на столбцовую матрицу контур-

<sup>1</sup> Матрицу не следует смешивать с определителем. Определитель может быть вычислен, матрица же не может быть приравнена числу, а может равняться только матрице. Две матрицы считаются равными, если они содержат одинаковое число строк и столбцов и если равны все их соответственные элементы.



ных токов. При этом следует помнить, что произведением двух матриц называется матрица, элементы которой равны сумме произведений всех элементов соответствующей строки первой матрицы на соответствующие элементы столбца второй матрицы. Итак, уравнения (7-2) в матричной форме имеют вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \dots \\ \dot{E}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{(11)} & Z_{(12)} & \dots & Z_{(1n)} \\ Z_{(21)} & Z_{(22)} & \dots & Z_{(2n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{(n1)} & Z_{(n2)} & \dots & Z_{(nn)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_n \end{pmatrix},$$

или сокращенно

$$\|\dot{E}\| = \|Z\| \cdot \|I\|.$$

Данное матричное уравнение может быть решено относительно матрицы  $\|I\|$ . Для этого обе стороны уравнения должны быть умножены на матрицу, обратную матрице  $\|Z\|$ :

$$\|Z\|^{-1} \cdot \|\dot{E}\| = \|Z\|^{-1} \cdot \|Z\| \cdot \|I\|.$$

Как известно, для получения обратной матрицы необходимо заменить в исходной матрице каждый элемент его алгебраическим дополнением, затем заменить строки соответствующими столбцами<sup>1</sup> и полученную таким образом матрицу разделить на определитель исходной матрицы. Напомним, что алгебраическим дополнением элемента квадратной матрицы называется умноженный на  $(-1)^{i+k}$  определитель, получающийся из элементов матрицы после исключения  $i$ -й строки и  $k$ -го столбца. В свою очередь определителем матрицы называется определитель, составленный из элементов квадратной матрицы, расположенных в том же порядке, что и в матрице. Итак, обратная матрица имеет вид:

$$\|Z\|^{-1} = \frac{1}{\Delta_z} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \dots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \dots & \Delta_{nn} \end{pmatrix};$$

здесь  $\Delta_z$  — тот же определитель системы, что и в § 7-2.

Произведение обратной матрицы на исходную матрицу равно единичной матрице, т. е. квадратной матрице, у которой все элементы главной диагонали (идущей от левого верхнего угла к правому нижнему) равны единице, а остальные элементы равны нулю,

Следовательно,

$$\|Z\|^{-1} \cdot \|Z\| = \|1\|$$

и

$$\|Z\|^{-1} \cdot \|\dot{E}\| = \|1\| \cdot \|I\|,$$

где  $\|1\|$  — единичная матрица.

<sup>1</sup> Матрица, получающаяся в результате замены строк соответствующими столбцами, называется сопряженной или транспонированной относительно исходной матрицы,



Произведение единичной матрицы на матрицу  $\|I\|$  равно матрице  $\|I\|$ , поэтому

$$\|I\| = \|Z\|^{-1} \cdot \|\dot{E}\|,$$

или в развернутой форме

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_z} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \dots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \dots & \Delta_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \dots \\ \dot{E}_n \end{pmatrix}.$$

В результате умножения матриц получаются выражения для контурных токов вида (7-4).

Аналогично решается матричное уравнение для узловых напряжений

$$\|I\| = \|Y\| \cdot \|\dot{U}\|,$$

где  $\|I\|$  и  $\|\dot{U}\|$  — столбцовые матрицы токов, заданных в узлах, и искоемых узловых напряжений;  $\|Y\|$  — квадратная матрица собственных и общих проводимостей узлов;

$$\|Y\|^{-1} \cdot \|I\| = \|Y\|^{-1} \cdot \|Y\| \cdot \|\dot{U}\|,$$

откуда

$$\|\dot{U}\| = \|Y\|^{-1} \cdot \|I\|.$$

В результате умножения матрицы  $\|Y\|^{-1}$  на матрицу  $\|I\|$  получаются выражения для узловых напряжений вида (7-6).

Матричная алгебра широко применяется для расчета сложных четырехполюсников (см. гл. 9).

В случае относительно простой электрической схемы без взаимной индукции матрица контурных сопротивлений легко записывается непосредственно по заданной схеме. В более сложных случаях матрица контурных сопротивлений может быть получена с помощью матрицы сопротивлений ветвей. Ниже показана связь, существующая между матрицами контурных сопротивлений и сопротивлений ветвей<sup>1</sup>. Вывод, сделанный в общей форме, проиллюстрирован на примере простой схемы рис. 7-25, легко решаемом обычным способом.

Обозначим токи, напряжения, э. д. с. и сопротивления ветвей индексом «в», а соответствующие контурные величины — индексом «к». Связь между токами в ветвях и контурными токами выражается зависимостью

$$\|I_v\| = \|C\| \cdot \|I_k\|. \quad (7-20)$$

Здесь  $\|C\|$  — матрица контуров (инциденций). Число ее строк равно числу ветвей, а число столбцов числу контурных токов. Элементами матрицы контуров служат числа  $+1$ ,  $-1$ , и  $0$ ,  $+1$  означает, что выбранные на схеме положительные направления тока в ветви и контурного тока совпадают;  $-1$  берется, когда их направления различны; наконец,  $0$  означает, что данная ветвь не входит в рассматриваемый контур.

<sup>1</sup> Существует также и зависимость между матрицами проводимостей [Л. 9, 15 и 16];



Например, для схемы рис. 7-25 имеем:

$$\begin{pmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_d \\ I_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}.$$

Уравнения вида (1-12) по второму закону Кирхгофа в матричной форме записываются так:

$$\|C\|_T \cdot \|\dot{U}_B\| = \|0\|, \quad (7-21)$$

где  $\|C\|_T$  — матрица, транспонированная относительно матрицы контуров  $\|C\|$  и отличающаяся от последней тем, что строки заменены столбцами.

Строка  $\|C\|_T$ , так же как и столбец  $\|C\|$ , содержит кроме нулей единицы на местах, соответствующих ветвям данного контура; поэтому «произведение» ее на  $\|\dot{U}_B\|$  дает алгебраическую сумму напряжений ветвей этого контура. Согласно второму закону Кирхгофа алгебраическая сумма напряжений на ветвях в любом контуре равна нулю, т. е. «произведение» любой строки  $\|C\|_T$  на столбец  $\|\dot{U}_B\|$  должно равняться нулю, что и выражает (7-21).

Например, для схемы рис. 7-25 имеем:

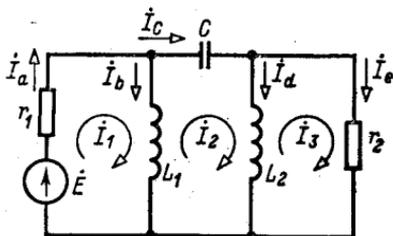


Рис. 7-25. Схема к примеру расчета матричным методом.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_a \\ \dot{U}_b \\ \dot{U}_c \\ \dot{U}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Считая, что направления э. д. с. и токов в ветвях совпадают, получаем матрицу напряжений на ветвях в виде

$$\|\dot{U}_B\| = \|Z_B\| \cdot \|I_B\| - \|\dot{E}_B\|. \quad (7-22)$$

Подстановка (7-20) и (7-22) дает:

$$\|Z_B\| \cdot \|C\| \cdot \|I_K\| - \|\dot{E}_B\| = \|\dot{U}_B\|, \quad (7-23)$$

а подстановкой (7-23) в (7-21) получаем:

$$\|C\|_T \cdot \|Z_B\| \cdot \|C\| \cdot \|I_K\| - \|C\|_T \cdot \|\dot{E}_B\| = 0,$$

откуда

$$\|C\|_T \cdot \|Z_B\| \cdot \|C\| \cdot \|I_K\| = \|C\|_T \cdot \|\dot{E}_B\|.$$

Сопоставив это уравнение с уравнением для контурных токов

$$\|Z_K\| \cdot \|I_K\| = \|\dot{E}_K\|,$$

приходим к выводу, что э. д. с. в ветвях и контурные э. д. с. связаны матричным уравнением

$$\|C\|_T \cdot \|\dot{E}_B\| = \|\dot{E}_K\|, \quad (7-24)$$

а матрица контурных сопротивлений получается по формуле

$$\|Z_K\| = \|C\|_T \cdot \|Z_B\| \cdot \|C\|. \quad (7-25)$$

Для схемы рис. 7-25 матрица сопротивлений ветвей записывается в виде

$$\|Z_B\| = \begin{vmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j\omega L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{j\omega C_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j\omega L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_2 \end{vmatrix}. \quad (7-26)$$

Матрица контурных сопротивлений согласно (7-25) равна:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j\omega L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{j\omega C} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j\omega L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 + j\omega L_1 & & & & \\ -j\omega L_1 & j\omega(L_1 + L_2) + \frac{1}{j\omega C} & & & \\ 0 & & -j\omega L_2 & & \\ & & & r_2 + j\omega L_2 & \\ & & & & 0 \end{vmatrix}. \quad (7-27)$$

## 7-11. ДУАЛЬНЫЕ ЦЕПИ

Под условием дуальности понимается такое соответствие электрических цепей, при котором закон изменения контурных токов в одной цепи подобен закону изменения узловых напряжений в другой цепи.

Для элементов электрической цепи, изображенных на рис. 7-26 (слева и справа), зависимости между напряжениями и токами имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} u_r &= r i_r; \\ u_L &= L \frac{di_L}{dt}; \\ u_C &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C dt; \end{aligned} \right\} \quad (7-28)$$

$$\left. \begin{aligned} i_r &= g' u_r; \\ i_C &= C' \frac{du_C}{dt}; \\ i_L &= \frac{1}{L'} \int_{-\infty}^t u_L dt. \end{aligned} \right\} \quad (7-29)$$



Следует иметь в виду, что входящие в уравнения (7-28) и (7-29) напряжения и токи, имеющие одинаковые буквенные обозначения, не равны друг другу.

Из сравнения уравнений (7-28) с уравнениями (7-29) видно, что условию дуальности удовлетворяют следующие элементы:

- 1) сопротивление и проводимость;
- 2) индуктивность и емкость;
- 3) источник э. д. с. и источник тока.

Элементы цепи, удовлетворяющие условию дуальности, называются аналогами или дуальными элементами.

При последовательном соединении элементов цепи суммируются напряжения, при параллельном соединении элементов цепи — токи. Поэтому последовательному соединению элементов соответствует параллельное соединение их аналогов, а параллельному соединению элементов — последовательное соединение их аналогов.

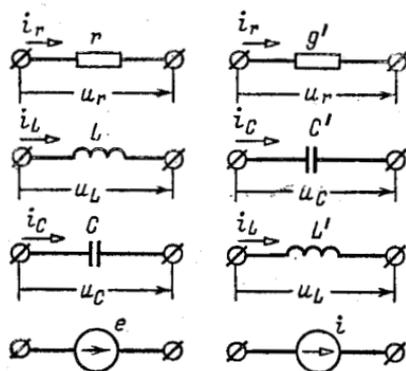


Рис. 7-26. Дуальные элементы.

Например, при замене последовательно соединенных элементов  $r$ ,  $L$  и  $C$  (рис. 7-27, а) их аналогами  $g'$ ,  $C'$  и  $L'$ , соединенными параллельно (рис. 7-27, б), получаем дуальные цепи.

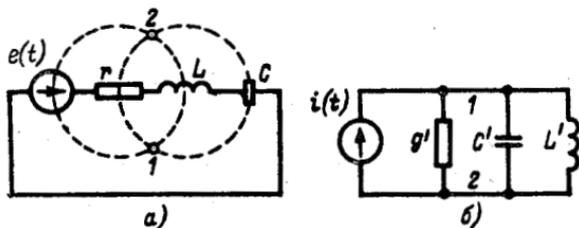


Рис. 7-27. Дуальные цепи.

Уравнение напряжений для исходной цепи

$$e(t) = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt \quad (7-30)$$

подобно уравнению токов для второй цепи

$$i(t) = g'u + C' \frac{du}{dt} + \frac{1}{L'} \int_{-\infty}^t u dt. \quad (7-31)$$

Контурному току  $i$  в уравнении (7-30) соответствует узловое напряжение  $u$  в уравнении (7-31).

Если э. д. с. и ток источников подчинены одному и тому же закону, например синусоидальны, и имеют одинаковую начальную фазу, то законы изменения контурного тока в схеме рис. 7-27, а и узлового напряжения в схеме рис. 7-27, б совпадают при соблюдении пропорции

$$\frac{r}{g'} = \frac{L}{C'} = \frac{L'}{C}. \quad (7-32)$$

В случае сложной электрической цепи каждой ее области, ограниченной независимым контуром, с учетом также области, внешней по отношению ко всей цепи, соответствует узел дуальной цепи. Следовательно, число областей заданной цепи равно числу узлов дуальной цепи.

При построении дуальной цепи по отношению к заданной планарной цепи удобно пользоваться следующим графическим приемом (рис. 7-27).

В каждой области, ограниченной независимым контуром заданной цепи, наносится точка, рассматриваемая в качестве будущего узла дуальной цепи.

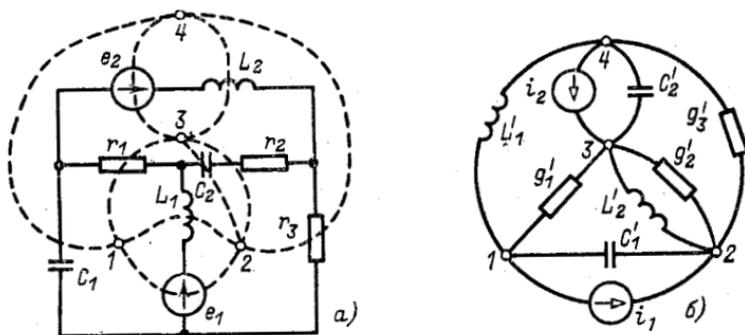


Рис. 7-28. Графический прием построения дуальных цепей,

Узлы, соответствующие каждой паре смежных областей, соединяются параллельными ветвями, число которых равно числу элементов, последовательно включенных в цепь, граничащую с указанными областями. Элементами параллельных ветвей являются аналоги элементов заданной цепи.

Графический способ построения дуальной цепи иллюстрирован ниже на примере рис. 7-28.

Исходная цепь (рис. 7-28, а) содержит три независимых контура. Внутри этих контуров фиксируем три точки (1, 2 и 3), соответствующие узлам исходной дуальной цепи. Четвертую точку, соответствующую узлу 4, фиксируем в области, внешней по отношению к заданной цепи. Проводим между этими точками пунктирные линии, пересекающие элементы цепи и представляющие собой ветви дуальной цепи; пересекаемые элементы заменяются их аналогами, включенными между соответствующими узлами дуальной цепи.

При согласовании направлений э. д. с. и токов дуальных источников руководствуются следующим правилом; если э. д. с. источника действует в положительном направлении контура (по ходу часовой

стрелки), то ток источника тока в дуальной цепи направлен к узлу, соответствующему данному контуру исходной схемы.

Следует заметить, что если графический способ построения дуальной цепи повторно применить к схеме рис. 7-28, б, то получится исходная схема рис. 7-28, а.

Существуют дуальные электрические цепи, имеющие одинаковую схему, например мостового типа (автодуальные схемы).

При соблюдении пропорции (7-32) комплексное сопротивление цепи, общей для двух смежных контуров схемы, пропорционально комплексной проводимости цепи, соединяющей два соответствующих узла дуальной цепи. Например, в схеме рис. 7-27, а комплексное сопротивление цепи равно:

$$Z = r + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right),$$

а в схеме рис. 7-28, б комплексная проводимость цепи

$$Y' = g' - j \left( \frac{1}{\omega L'} - \omega C' \right).$$

Полагая

$$g' = \frac{r}{k^2}; \quad L' = k^2 C; \quad C' = \frac{L}{k^2},$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности, имеющий размерность сопротивления, получаем:

$$Z = k^2 Y'.$$

Аналогичная пропорциональность получается и между входным сопротивлением и проводимостью более сложных дуальных цепей. Это свойство используется, в частности, в теории электрических фильтров (см. гл. 10).

## 7-12. ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ

Явления, исследуемые на основе законов физики, описываются математически при помощи систем уравнений. Исходя из единства уравнений, соответствующих некоторым двум явлениям, происходящим в различных областях, например в электрической цепи и механической системе, можно установить аналогию между этими явлениями. «Единство природы обнаруживается в «паразитальной аналогичности» дифференциальных уравнений, относящихся к различным областям явлений»<sup>1</sup>.

Благодаря единству уравнений электрических и механических систем исследование явлений в механической системе может быть заменено исследованием процессов в электрической цепи. Выполнение электрических цепей обычно сопряжено с меньшими трудностями, чем выполнение механических систем; они более компактны и, что особенно важно, измерения в них более точны и удобны. Процессы в электромеханических системах, представляющих совокупность элект-

<sup>1</sup> В. И. Ленин. Материализм и эмпириокритицизм, Полн. собр. соч., 5-е изд., т. 18, с. 306.



рических и механических устройств, также могут с успехом исследоваться с помощью электромеханических аналогий.

Механические системы с сосредоточенными параметрами, которые по аналогии с электрическими цепями будем называть механическими цепями, состоят из активных элементов (источников энергии) и пассивных элементов.

Рассмотрим идеализированные элементы простейших линейных механических цепей, совершающих поступательное или вращательное движение (комбинированное поступательно-вращательное движение опустим).

В случае поступательного движения заданная внешняя сила, приложенная к цепи, рассматривается как источник силы, а заданная скорость какой-либо точки цепи — как источник скорости.

В случае вращательного движения заданный вращающий момент, приложенный к цепи, рассматривается как источник момента, а заданная угловая скорость какой-либо точки — как источник угловой скорости.

Роль пассивных элементов в механических цепях выполняют массы, моменты инерции, пружины и механические (демпфирующие) сопротивления.

Массой называется идеализированный элемент механической цепи, обладающий инерцией. В нем накапливается кинетическая энергия. При этом термин «масса» и соответствующее ему условное обозначение  $m$  применяются для обозначения как самого инерционного элемента, так и его количественной характеристики. Сила  $F$  (ньютон — Н), приложенная к центру тяжести свободного твердого тела, сообщает ему линейную скорость  $v$  (м/с) и линейное ускорение  $dv/dt$  (м/с<sup>2</sup>), совпадающие по направлению с силой. Если масса неизменна, то

$$F = m \frac{dv}{dt}, \quad (7-33)$$

т. е. масса  $m$  (кг) представляет собой коэффициент пропорциональности между силой и ускорением.

На вращение тела влияет не только масса, но и распределение ее относительно оси вращения. Поэтому вращающийся инерционный элемент характеризуется моментом инерции  $J = mr^2$ , где  $r$  — радиус инерции тела относительно оси вращения. Это пассивный элемент, в котором накапливается кинетическая энергия вращения.

Момент  $M$  (Н·м), приложенный к свободному твердому телу, сообщает ему угловую скорость  $\omega$  (рад/с) и угловое ускорение  $d\omega/dt$  (рад/с<sup>2</sup>). Если момент инерции постоянен, то

$$M = J \frac{d\omega}{dt}, \quad (7-34)$$

т. е. момент инерции  $J$  (кг·м<sup>2</sup>) представляет собой коэффициент пропорциональности между моментом и угловым ускорением.

Кинетическая энергия поступательного движения равна  $mv^2/2$ , а кинетическая энергия вращательного движения  $J\omega^2/2$  (Дж).

П р у ж и н а играет роль пассивного элемента, в котором накапливается потенциальная энергия. Сила натяжения или давления, развиваемая соответственно растянутой или сжатой пружиной при данном относительном перемещении  $x$  (м) ее конца, пропорциональна ее жесткости  $K$ , измеряемой в Н/м = кг/с<sup>2</sup>.

Сила  $F$ , необходимая для относительного перемещения  $x$  конца пружины, действует вдоль оси  $x$  и равна по закону Гука:

$$F = Kx = K \int v dt.$$

Продифференцировав обе части уравнения, получим:

$$v = K^{-1} \frac{dF}{dt}. \quad (7-35)$$

Величина, обратная  $K$ , называется податливостью пружины.

Момент, необходимый для создания углового перемещения  $\varphi$  конца пружины, подвергающейся скручиванию, пропорционален жесткости  $K$  (Н·м/рад):

$$M = K\varphi = K \int \omega dt,$$

откуда

$$\omega = K^{-1} \frac{dM}{dt}. \quad (7-36)$$

В этом случае коэффициент пропорциональности  $K^{-1}$  называется податливостью при кручении.

Потенциальная энергия при растяжении или сжатии пружины равна  $\frac{1}{2} Kx^2$ , а потенциальная энергия при скручивании  $\frac{1}{2} K\varphi^2$  (Дж).

Демпфирующее механическое сопротивление создается вязким трением. Вследствие механического сопротивления происходит необратимый процесс преобразования кинетической энергии в тепло.

В линейной механической цепи с поступательным движением сила трения пропорциональна первой степени относительной скорости точек, принадлежащих трущимся поверхностям:

$$F = fv, \quad (7-37)$$

где  $f$  — коэффициент трения (Н·с/м = кг/с).

При вращательном движении момент силы трения пропорционален первой степени относительной угловой скорости:

$$M = f \frac{d\varphi}{dt} = f\omega. \quad (7-38)$$

В этом случае коэффициент трения  $f$  измеряется в Н·м·с/рад = кг·м<sup>2</sup>/(с·рад).

Мощность, расходуемая на трение, равна при поступательном движении  $fv^2$ , а при вращательном  $f\omega^2$  (Вт).

Сопоставление уравнений (7-33) — (7-38) с уравнениями элементов электрических цепей

$$u = L \frac{di}{dt}; \quad i = C \frac{du}{dt}; \quad u = ri$$

показывает, что механическая сила и вращающий момент соответствуют напряжению, линейная и угловая скорости — току, масса и момент инерции — индуктивности, податливость пружины — емкости, механическое сопротивление — сопротивлению.



На рис. 7-29 приведены изображения пассивных элементов механической цепи с поступательным движением<sup>1</sup> и показаны их электрические аналоги.

Рассмотренная система электромеханических аналогий, сведенная в табл. 7-1, не является единственной. Взяв дуальную электрическую цепь, можно заключить, что механическая сила и вращающий момент соответствуют току, линейная и угловая скорости — напряжению, масса и момент инерции — емкости, податливость пружины — индуктивности, механическое сопротивление — проводимости.

Дифференциальные уравнения движения механической цепи могут быть выведены на основе второго закона Ньютона, который для поступательного движения гласит: если на тело действует несколько сил, то его ускорение совпадает по направлению с равнодействующей этих сил и пропорционально отношению последней к массе тела.

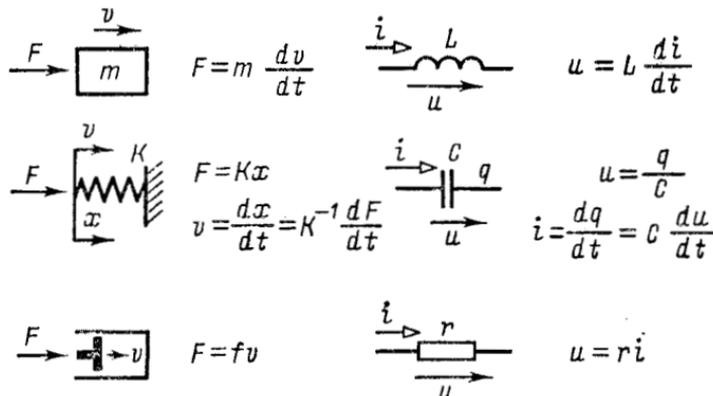


Рис. 7-29. Пассивные элементы механической цепи с поступательным движением и их электрические аналоги.

Для вращательного движения применяется следующая формулировка второго закона Ньютона: если относительно оси вращения тела действует несколько моментов, то его угловое ускорение относительно той же оси пропорционально отношению результирующего момента к моменту инерции тела.

Дифференциальные уравнения движения механической цепи могут быть также получены на основании принципа Даламбера: при движении тела действующие на него силы и сила инерции удовлетворяют уравнению равновесия сил.

Уравнения такого же типа, получаемые для электрических цепей на основании законов Кирхгофа, могут быть либо уравнениями напряжений, либо уравнениями токов.

В качестве примера рассмотрим простейшую механическую систему: масса  $m$  находится под воздействием силы  $F$  и опирается на пружину (рис. 7-30, а). Тело движется между неподвижными направляющими, и между ним и направляющими возникает вязкое трение. Массой пружины пренебрегаем.

<sup>1</sup> Механическое сопротивление изображается в виде демпфера.



## Электромеханические аналогии

Механическая цепь	Электрическая цепь
Сила $F$ (Н) или вращающий момент $M$ (Н·м)	Напряжение $u$ (В)
Перемещение линейное $x$ (м) или угловое $\varphi$ (рад)	Заряд $q$ (Кл)
Скорость линейная $v$ (м/с) или угловая $\omega$ (рад/с)	Ток $i$ (А)
Масса $m$ (кг) или момент инерции $J$ (кг·м <sup>2</sup> )	Индуктивность $L$ (Г)
Податливость $K^{-1}$ при поступательном движении (м/Н) или кручении [рад/(Н·м)]	Емкость $C$ (Ф)
Коэффициент трения $f$ при поступательном движении (кг/с) или вращении [кг·м <sup>2</sup> /(с·рад)]	Сопротивление $r$ (Ом)
Кинетическая энергия $\frac{1}{2}mv^2$ или $\frac{1}{2}J\omega^2$ (Дж)	Магнитная энергия $\frac{1}{2}Li^2$ (Дж)
Потенциальная энергия $\frac{1}{2}Kx^2$ или $\frac{1}{2}K\varphi^2$ (Дж)	Электрическая энергия $\frac{1}{2}Cu^2$ (Дж)
Мощность от трения $fv^2$ или $f\omega^2$ (Вт)	Мощность в сопротивлении $ri^2$ (Вт)
Мощность $Fv$ или $M\omega$ (Вт)	Мгновенная мощность $ui$ (Вт)

На рис. 7-30, б изображена схема данной механической цепи. По второму закону Ньютона

$$m \frac{dv}{dt} = F - fv - K \int v dt$$

или

$$F = fv + m \frac{dv}{dt} + K \int v dt.$$

Пользуясь первой системой электромеханических аналогий (сила — напряжение, табл. 7-1), получаем уравнение электрической цепи, показанной на рис. 7-30, в:

$$e = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt.$$

В свою очередь, применив вторую систему аналогий (сила — ток), получим уравнение электрической цепи, показанной на рис. 7-30, г:

$$i = g'u + C' \frac{du}{dt} + \frac{1}{L'} \int u dt.$$



Таким образом, можно пользоваться двумя системами электромеханических аналогий: в одной из них напряжение, а в другой — ток являются аналогом силы или вращающего момента. Две электрические цепи, аналогичные одной и той же механической цепи, являются дуаль-

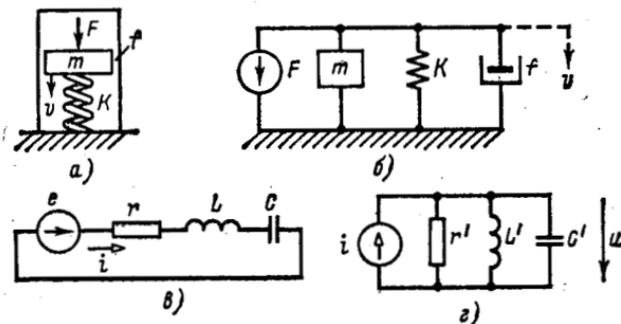


Рис. 7-30. Механическая цепь (а и б) и ее электрические аналоги (в и г).

ными, так как контурные токи одной цепи соответствуют узловым напряжениям другой.

Электромеханические аналогии находят практическое применение в электрических моделях. Вопросы, затронутые в этом параграфе, подробно рассмотрены в [Л. 5].

### 7-13. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

7-1. Методом контурных токов определить ток в ветви  $Z_3$  рис. 7-4.

Ответ см. в тексте (пример 7-4).

7-2. Методом узловых напряжений определить напряжение на ветви  $Z_3$  рис. 7-7.

О т в е т:

$$\frac{Y_2 I_1 - Y_1 I_2}{Y_1 Y_2 + Y_2 Y_3 + Y_3 Y_1}$$

7-3. Решить задачу 7-2 методом наложения.

7-4. Решить задачу 7-1 по теореме об изменении токов в электрической цепи, зная ток в ветви при  $Z_3 = 0$ .

7-5. В схеме рис. 7-4 принять  $\dot{E}_1 = 230 \angle 30^\circ$ ;  $\dot{E}_2 = 230 \angle 0^\circ$  В;  $Z_1 = Z_2 = j1$ ;  $Z_3 = -j10$  Ом. Используя решение задачи 7-1, в общем виде вычислить активные мощности и построить векторные диаграммы.

О т в е т:  $P_1 = -P_2 = 13,9$  кВт.

7-6. В схеме рис. 7-4  $\dot{E}_1 = 100 \angle 0^\circ$  В;  $Z_1 = Z_2 = j10$ ;  $Z_3 = 20 \angle 0^\circ$  Ом.

Найти  $\dot{E}_2$ , если мощность первого источника активная, а второго — реактивная.

О т в е т:  $212 \angle -45^\circ$  В.

7-7. В схеме рис. 7-4  $\dot{E}_1 = 120 \angle 0^\circ$ ;  $\dot{E}_2 = 110 \angle 0^\circ$  В;  $Z_1 = 0,4 + j0,6$ ;  $Z_2 = 0,3 + j1,2$ ;  $Z_3 = 10$  Ом.



По теореме об эквивалентном источнике вычислить напряжение на сопротивлении  $Z_3$ .

Ответ:  $113,9 \angle -2^\circ \text{ В}$ .

7-8. Вычислить ток в диагональной ветви мостовой схемы рис. 7-22, если  $E = 10 \text{ В}$ ;  $Z_1 = 20 + j10$ ;  $Z_2 = -j10$ ;  $Z_3 = 20$ ;  $Z_4 = -j20$ ;  $Z_5 = 10 \text{ Ом}$ .

Ответ:  $0,351 \text{ А}$ .

7-9. Доказать, что при наличии комплексного сопротивления  $Z$  в одной ветви электрической цепи ток в какой-либо другой ветви равен:

$$i = i_{(Z=\infty)} + \frac{i_{(Z=0)} - i_{(Z=\infty)}}{Z + Z_0} Z_0,$$

где  $i_{(Z=\infty)}$ ,  $i_{(Z=0)}$  — токи во второй ветви при соответственно разомкнутой и замкнутой первой ветви;  $Z_0$  — комплексное сопротивление цепи, к которой подключено сопротивление  $Z$ , при отсутствии источников.

7-10. Вычислить ток в индуктивности  $L_2$  схемы рис. 7-29, а, если  $e_1 = 10 \sin \omega t$ ;  $e_2 = 20 \cos \omega t \text{ В}$ ;  $r_1 = r_2 = r_3 = 1 \text{ Ом}$ ;  $L_1 = L_2 = 0,1 \text{ мГ}$ ;  $C_1 = C_2 = 1 \text{ мкФ}$ ;  $f = 400 \text{ Гц}$ .

Применить: а) метод контурных токов; б) метод узловых напряжений; в) теорему об эквивалентном источнике.

7-11. На примере рис. 7-28 показать, что если отношение комплексных э. д. с. и тока источников дуальных цепей равно  $k$ , то их активные мощности равны, а реактивные различаются только по знаку (смысл коэффициента  $k$  пояснен в § 7-12).

7-12. Пояснить целесообразность применения различных методов расчета электрических цепей к схемам разной конфигурации.

7-13. Проиллюстрировать на примере практическую целесообразность применения теоремы об изменении токов в электрической цепи.

7-14. В чем заключается различие между общим и передаточным взаимным) сопротивлениями?

---

## ГЛАВА ВОСЬМАЯ

# ИНДУКТИВНО СВЯЗАННЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

## 8-1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

При изменении магнитного поля, связанного с каким-либо витком, в последнем наводится э. д. с., которая в соответствии с законом электромагнитной индукции определяется скоростью изменения магнитного потока независимо от того, чем вызвано изменение потока. В катушке, состоящей из большого числа витков, наводится э. д. с., пропорциональная скорости изменения потоко-сцепления, т. е. скорости изменения суммы магнитных потоков, сцепленных с отдельными витками данной ка-



тушки. Если все витки катушки пронизываются одним и тем же магнитным потоком, то, как указывалось в § 1-5, потокосцепление равно произведению магнитного потока на число витков.

При рассмотрении цепей синусоидального тока до сих пор учитывалось явление самоиндукции, т. е. наведение э. д. с. в электрической цепи при изменении потокосцепления самоиндукции, обусловленного током в этой цепи. Отношение потокосцепления самоиндукции к току характеризовалось скалярной величиной — индуктивностью  $L$ .

Теперь нам предстоит заняться рассмотрением явления взаимной индукции, т. е. наведения э. д. с. в электрической цепи при изменении потокосцепления взаимной индукции, обусловленного током в другой электрической цепи. Цепи, в которых наводятся э. д. с. взаимной индукции, называются индуктивно связанными цепями.

Связь потокосцепления взаимной индукции одной электрической цепи с током в другой цепи, равная отношению потокосцепления взаимной индукции в одной цепи к току в другой цепи, характеризуется взаимной индуктивностью<sup>1</sup>  $M$ , которая, так же как и индуктивность, представляет собой скалярную величину.

Если потокосцепление  $\omega_1 \Phi_{M_2}$  первой цепи обусловлено током  $i_2$  второй цепи, то взаимная индуктивность цепей определяется как

$$M_{12} = \frac{\omega_1 \Phi_{M_2}}{i_2}. \quad (8-1)$$

Соответственно если потокосцепление  $\omega_2 \Phi_{M_1}$  второй цепи обусловлено током  $i_1$  первой цепи, то

$$M_{21} = \frac{\omega_2 \Phi_{M_1}}{i_1}. \quad (8-2)$$

Для линейных электрических цепей всегда выполняется равенство

$$M_{12} = M_{21},$$

и поэтому индексы у параметра взаимной индуктивности могут быть опущены.

<sup>1</sup> Этим термином заменен применявшийся ранее в литературе и ныне не рекомендуемый термин «коэффициент взаимной индукции».



Справедливость последнего равенства можно доказать, если выразить потоки взаимной индукции  $\Phi_{M1}$  и  $\Phi_{M2}$  через соответствующие м. д. с.  $i_1\omega_1$  и  $i_2\omega_2$  и магнитную проводимость путей, по которым замыкаются эти потоки <sup>1</sup>:

$$\Lambda_M = \sum \frac{\mu_s S}{l};$$

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= \frac{\omega_1 (i_2 \omega_2 \Lambda_M)}{i_2} = \omega_1 \omega_2 \Lambda_M; \\ M_{21} &= \frac{\omega_2 (i_1 \omega_1 \Lambda_M)}{i_1} = \omega_1 \omega_2 \Lambda_M. \end{aligned} \right\} \quad (8-3)$$

Отсюда также видно, что величина  $M$  пропорциональна произведению чисел витков катушек и магнитной проводимости пути общего потока, которая зависит от магнитной проницаемости среды и взаимного расположения катушек.

На основании сказанного формулируется свойство взаимности для индуктивно связанных цепей: *если ток, проходящий в первой цепи, обуславливает во второй цепи поттокосцепление взаимной индукции  $\omega_2\Phi_{M1}$ , то такой же ток, проходящий во второй цепи, обусловит в первой цепи поттокосцепление взаимной индукции  $\omega_1\Phi_{M2}$  той же величины.*

## 8-2. ПОЛЯРНОСТИ ИНДУКТИВНО СВЯЗАННЫХ КАТУШЕК; ЭДС ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИИ

Напомним, что положительные направления тока и создаваемого им магнитного потока согласуются всякий раз по правилу правоходового винта. Условимся положительные направления токов  $i_1$  и  $i_2$  в двух индуктивно связанных катушках считать *согласными*, если положительные направления создаваемых ими магнитных потоков самоиндукции и взаимной индукции совпадают.

На рис. 8-1, *а* и *б* показаны индуктивно связанные катушки, насаженные на общий магнитопровод; здесь в зависимости от направления намотки витков выбраны такие положительные направления для токов  $i_1$  и  $i_2$ , при которых

<sup>1</sup> Картина распределения мгновенных силовых трубок потоков  $\Phi_{M1}$  и  $\Phi_{M2}$  не зависит от токов  $i_1$  и  $i_2$ , т. е. при любых токах она одинакова; поэтому проводимость  $\Lambda_M$  для каждого из этих потоков одна и та же.

магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции в каждой катушке совпадают. Таким образом, рис. 8-1, а и б иллюстрирует согласное направление токов.

При согласном направлении токов  $i_1$  и  $i_2$  в двух индуктивно связанных катушках выводы этих катушек, относительно которых токи  $i_1$  и  $i_2$  направлены одинаково, называются **одноименными** или **однополярными**.

На рис. 8-1, а, где витки обеих катушек намотаны в одном направлении, одноименными выводами являются выводы, отмеченные точками (два других вывода на рис. 8-1, а составляют вторую пару одноименных выводов).

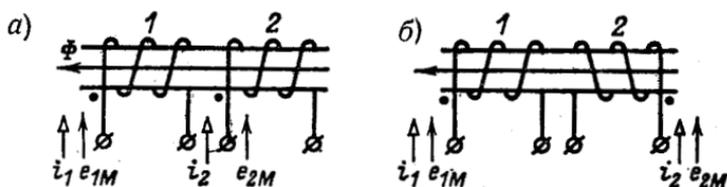


Рис. 8-1. Согласное направление токов в индуктивно связанных катушках.

Аналогичным образом на рис. 8-1, б, где витки катушек намотаны в противоположных направлениях, одноименные выводы также отмечены точками.

Таким образом, *одноименные выводы индуктивно связанных катушек характерны тем, что при одинаковом направлении токов  $i_1$  и  $i_2$  относительно этих выводов магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции в каждой катушке складываются.*

В связи с введением понятия об одноименных выводах при вычерчивании электрических схем нет необходимости показывать намотку витков индуктивно связанных катушек, а достаточно разметить на схеме их одноименные выводы. На рис. 8-2 показано схематическое изображение двух индуктивно связанных катушек с указанием одноименных выводов и выбранных положительных направлений токов  $i_1$  и  $i_2$ . Как это следует из сказанного выше, токи  $i_1$  и  $i_2$  направлены согласно на рис. 8-2, а и встречно на рис. 8-2, б.

В § 1-5 отмечалось, что положительное направление э. д. с. самоиндукции выбирается совпадающим с положительным направлением тока; поэтому положительные

направления магнитного потока и наводимой им э. д. с. самоиндукции связаны правилом правого винта. Точно так же и положительное направление э. д. с. взаимной индукции  $e_{1M}$ , наводимой в катушке 1 током  $i_2$ , принимается совпадающим с положительным направлением тока  $i_1$ . Соответственно положительное направление

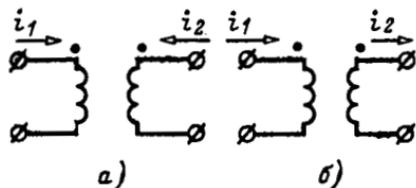


Рис. 8-2. Схематическое изображение индуктивно связанных катушек с обозначением одноименных выводов и выбранных положений,

направление магнитного потока и наводимой э. д. с. взаимной индукции связано правилом правого винта:

$$\left. \begin{aligned} e_{1M} &= -\frac{w_1 d\Phi_{M2}}{dt} = -M \frac{di_2}{dt}; \\ e_{2M} &= -\frac{w_2 d\Phi_{M1}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (8-4)$$

Рассмотрим случай, когда через катушку 1 проходит ток  $i_1$ , причем  $di_1/dt > 0$ . На основании (8-4) в катушке 2 наводится э. д. с. взаимной индукции  $e_{2M} = -M \frac{di_1}{dt} < 0$ .

В этом случае потенциал вывода катушки 2, одноименный с тем, в который входит ток  $i_1$ , оказывается выше потенциала второго вывода катушки 2.

Отсюда можно заключить, что одноименные выводы двух индуктивно связанных катушек обладают той особенностью, что подведение к одной из них возрастающего тока вызывает повышение потенциала на одноименном выводе второй катушки.

На указанном свойстве основано экспериментальное нахождение одноименных выводов индуктивно связанных катушек. Одна из них включается в цепь источника постоянного напряжения, а к другой присоединяется вольтметр постоянного тока (рис. 8-3).

Если в момент замыкания цепи источника стрелка измерительного прибора отклоняется в сторону положительных

показаний, то выводы индуктивно связанных катушек, подключенные к положительному полюсу источника электрической энергии и положительному выводу измерительного прибора, являются одноименными.

Теперь рассмотрим случай встречного направления токов  $i_1$  и  $i_2$ , схематически изображенный на рис. 8-2, б, где токи  $i_1$  и  $i_2$  направлены различно относительно одноименных выводов.

Ввиду того что положительные направления магнитных потоков самоиндукции и взаимной индукции в этом случае противоположны, э. д. с. взаимной индукции при встречном направлении токов вычисляются по формулам, содержащим знак плюс:

$$\left. \begin{aligned} e_{1M} &= \frac{\omega_1 d\Phi_{M2}}{dt} = M \frac{di_2}{dt}; \\ e_{2M} &= \frac{\omega_2 d\Phi_{M1}}{dt} = M \frac{di_1}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (8-5)$$

Рассмотрим последовательное соединение двух индуктивно связанных катушек (рис. 8-4, а и б).

При согласном направлении токов (рис. 8-4, а) э. д. с. взаимной индукции  $e_{1M} = -M \frac{di_2}{dt}$  и  $e_{2M} = -M \frac{di_1}{dt}$ , совпадающие по направлению с токами, могут быть при обходе контура в том же направлении заменены падениями напряжения от взаимной индукции  $u_{1M} = -e_{1M}$  и  $u_{2M} = -e_{2M}$ . Поэтому суммарное напряжение на обеих катушках с учетом того, что  $i_1 = i_2 = i$ , равно:

$$\begin{aligned} u_{\text{сog}} &= r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = \\ &= (r_1 + r_2) i + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt}. \end{aligned} \quad (8-6)$$

Полученное выражение показывает, что две индуктивно связанные катушки, соединенные последовательно, при согласном направлении токов эквивалентны катушке, имеющей активное сопротивление  $r_1 + r_2$  и индуктивность  $L_1 + L_2 + 2M$ .

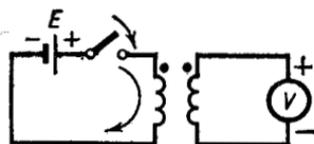


Рис. 8-3. Экспериментальное определение одноименных выводов.

Таким образом, как и следовало ожидать, наличие взаимной индукции при согласном направлении токов в катушках, соединенных последовательно, увеличивает индуктивность цепи.

При встречном направлении токов (рис. 8-4, б) падение напряжения от взаимной индукции при обходе контура в направлении тока получается со знаком минус:

$$u_{вст} = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = \\ = (r_1 + r_2) i + (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt}. \quad (8-7)$$

Данное выражение показывает, что две индуктивно связанные катушки, соединенные последовательно, при встречном направлении токов эквивалентны катушке, имеющей активное сопротивление  $r_1 + r_2$  и индуктивность  $L_1 + L_2 - 2M$ .

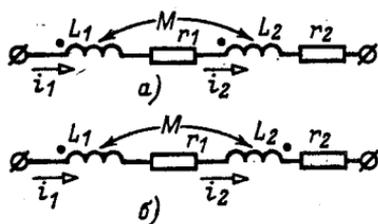


Рис. 8-4. Согласное (а) и встречное (б) направления токов в индуктивно связанных катушках, соединенных последовательно.

Следовательно, наличие взаимной индукции при встречном направлении токов в катушках, соединенных последовательно, уменьшает индуктивность цепи.

На основании сказанного можно сделать следующий вывод: при согласном направлении токов падение напряжения от взаимной индукции имеет знак плюс, а при встречном — знак минус (обход цепи в обоих случаях совершается в положительном направлении тока).

### 8-3. КОМПЛЕКСНАЯ ФОРМА РАСЧЕТА ЦЕПИ С ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИЕЙ

Представив ток в комплексной форме, получим выражение э. д. с. взаимной индукции для случая согласного направления токов в комплексной форме:

$$-M \frac{d}{dt} I_m e^{j\omega t} = -j\omega M I_m e^{j\omega t},$$

откуда комплексная действующая э. д. с. взаимной индукции

$$\dot{E}_M = -j\omega M I$$

и соответственно падение напряжения от взаимной индукции

$$\dot{U}_M = j\omega M I,$$

где  $j\omega M$  — комплексное сопротивление взаимной индукции; в радиотехнике его называют с о п р о т и в л е н и е м с в я з и.

Комплексные напряжения, соответствующие (8-6) и (8-7), запишутся так:

$$\dot{U}_{\text{сог}} = [r_1 + r_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)] I;$$

$$\dot{U}_{\text{вст}} = [r_1 + r_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)] I.$$

Отсюда, между прочим, вытекает следующий способ нахождения взаимной индуктивности  $M$ : если через  $x_{\text{сог}}$  обозначить индуктивное сопротивление цепи при согласном направлении токов последовательно соединенных элементов, а через  $x_{\text{вст}}$  — то же при встречном направлении, т. е. положить

$$\left. \begin{aligned} x_{\text{сог}} &= \omega(L_1 + L_2 + 2M); \\ x_{\text{вст}} &= \omega(L_1 + L_2 - 2M), \end{aligned} \right\} \quad (8-8)$$

то в результате вычитания второго равенства из первого получим:

$$M = \frac{x_{\text{сог}} - x_{\text{вст}}}{4\omega}.$$

На рис. 8-5 изображены векторные диаграммы для случаев согласного и встречного направлений токов двух индуктивно связанных катушек, соединенных последовательно. При построении векторных диаграмм принято, что  $L_1 > M$  и  $L_2 > M$ . При этом как при согласном, так и при встречном направлениях токов ток  $I$  отстает по фазе от результирующего напряжения  $\dot{U}$ . Если принять  $L_1 < M$ , то и в этом случае ток получится отстающим, так как всегда  $L_1 + L_2 - 2M > 0$  (см. § 8-4). Условия  $L_1 < M$  и  $L_2 < M$  одновременно существовать не могут.

Порядок расчета разветвленных электрических цепей при наличии взаимной индуктивности иллюстрирован ниже на примере схемы рис. 8-6. Предполагается, что элементы  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$ , входящие в схему, связаны индуктивно.

Заданными являются э. д. с.  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$  и все параметры цепи. Искомыми являются токи  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$ .



Если бы в каждом контуре был только один индуктивно связанный элемент, то запись уравнений для контурных токов не вызывала бы затруднений. В данном же случае

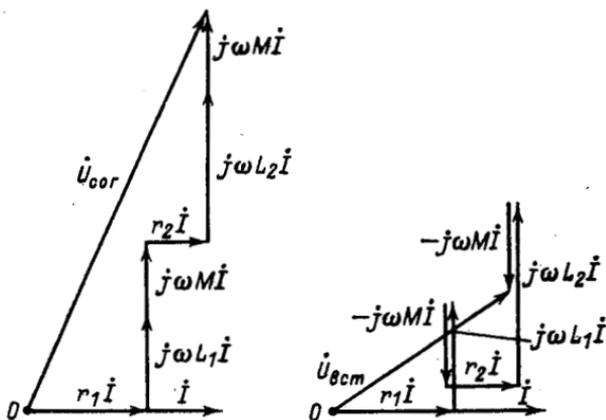


Рис. 8-5. Векторные диаграммы при согласном (а) и встречном (б) направлениях токов,

удобнее писать уравнения непосредственно для токов в ветвях, по первому и второму законам Кирхгофа. Совершая обход контуров по направлению токов  $I_1$  и  $I_2$ , будем составлять уравнения напряжений по второму закону Кирх-

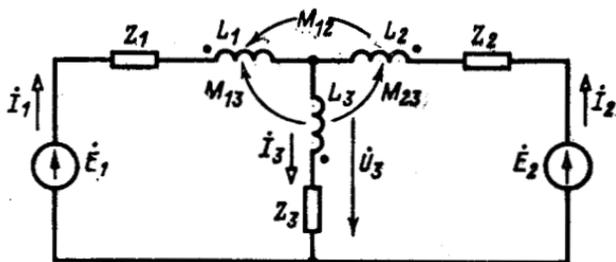


Рис. 8-6. Разветвленная электрическая цепь со взаимной индукцией,

гофа с учетом падений напряжения в сопротивлениях взаимной индукции. При согласном направлении токов падение напряжения в сопротивлении взаимной индукции входит со знаком плюс ( $\dot{U}_M = j\omega MI$ ), а при встречном —

со знаком минус ( $\dot{U}_M = -j\omega M\dot{I}$ ):

$$\dot{E}_1 = (Z_1 + j\omega L_1) \dot{I}_1 + j\omega M_{12} \dot{I}_2 - j\omega M_{13} \dot{I}_3 + \dot{U}_3;$$

$$\dot{E}_2 = (Z_2 + j\omega L_2) \dot{I}_2 + j\omega M_{12} \dot{I}_1 - j\omega M_{23} \dot{I}_3 + \dot{U}_3;$$

$$\dot{U}_3 = (Z_3 + j\omega L_3) \dot{I}_3 - j\omega M_{13} \dot{I}_1 - j\omega M_{23} \dot{I}_2; \quad \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}_3;$$

здесь  $\dot{U}_3$  — напряжение между узлами схемы. Решение уравнений дает токи.

Отметим, что слагаемые с одинаковыми взаимными индуктивностями входят в уравнения с одинаковыми знаками, что может служить проверкой правильности записи уравнений.

Таким образом, расчет разветвленной электрической цепи при наличии взаимной индуктивности может быть приведен одним из описанных ранее методов с учетом падений напряжений в сопротивлениях взаимной индукции.

Метод узловых напряжений в данном случае непосредственно неприменим<sup>1</sup>, так как токи в ветвях зависят не только от напряжений между узлами, к которым присоединены эти ветви, но и от токов других ветвей, с которыми они связаны через взаимную индукцию.

В разобранный выше примере одноименные выводы всех трех индуктивно связанных элементов были обозначены одинаково (звездочкой), так как предполагалось, что эти элементы имеют общий неразветвленный магнитопровод.

В том случае, когда три или большее число элементов располагаются на сложном, разветвленном магнитопроводе, необходимо одноименные выводы каждой пары индуктивно связанных элементов обозначать разными условными знаками (см. пример 8-2).

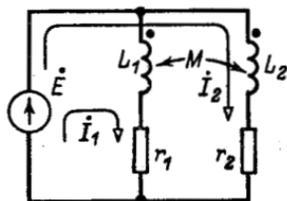


Рис. 8-7. Пример 8-1.

**Пример 8-1.** Определить комплексное сопротивление на входе электрической цепи, состоящей из двух параллельно соединенных катушек, связанных индуктивно при согласном направлении токов (рис. 8-7).

Для положительных направлений контурных токов, показанных на рис. 8-7, составляем контурные уравнения:

$$\dot{E} = (r_1 + j\omega L_1) \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2; \quad \dot{E} = (r_2 + j\omega L_2) \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1.$$

Обозначим:

$$Z_1 = r_1 + j\omega L_1; \quad Z_2 = r_2 + j\omega L_2; \quad Z_M = j\omega M;$$

<sup>1</sup> См. сноску на с. 214.

тогда

$$\dot{E} = Z_1 i_1 + Z_M i_2; \quad \dot{E} = Z_M i_1 + Z_2 i_2.$$

Решив уравнения относительно  $i_1$  и  $i_2$ , найдем общий ток:

$$I = i_1 + i_2 = \dot{E} \frac{Z_1 + Z_2 - 2Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2}.$$

Искомое сопротивление всей цепи по отношению к выводам источника

$$Z = \frac{\dot{E}}{I} = \frac{Z_1 Z_2 - Z_M^2}{Z_1 + Z_2 - 2Z_M}.$$

При переключении концов одной из катушек получается параллельное соединение катушек со встречным направлением токов. В этом случае в уравнениях и конечном выражении для  $Z$  следует принять  $Z_M$  со знаком минус, что приведет к изменению знака при  $2Z_M$  в знаменателе упомянутого выражения.

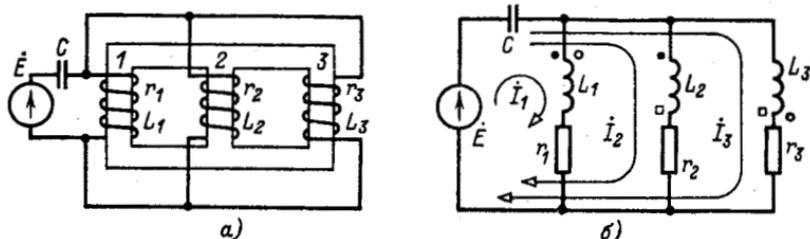


Рис. 8-8. Пример 8-2.

При отсутствии индуктивной связи ( $Z_M = 0$ ) конечное выражение совпадает с известной формулой для сопротивления двух параллельных ветвей.

**Пример 8-2.** Составить уравнения контурных токов для электрической цепи, состоящей из источника э. д. с.  $\dot{E}$ , емкости  $C$  и трех индуктивно связанных катушек, насаженных на трехстержневой магнитопровод (рис. 8-8, а). Взаимная индуктивность катушек  $M_{12}$ ,  $M_{13}$  и  $M_{23}$ . Цепь рассматривается как линейная ( $M = \text{const}$ ).

Рисунок 8-8, б изображает электрическую схему заданной цепи. Точками, кружками и квадратиками обозначены одноименные выводы, соответствующие каждой паре катушек.

Выбрав направления контурных токов, указанные на схеме рис. 8-8, б, составляем контурные уравнения:

$$\dot{E} = \frac{1}{j\omega C} (i_1 + i_2 + i_3) + (r_1 + j\omega L_1) i_1 + j\omega M_{12} i_2 - j\omega M_{13} i_3;$$

$$\dot{E} = \frac{1}{j\omega C} (i_1 + i_2 + i_3) + (r_2 + j\omega L_2) i_2 + j\omega M_{12} i_1 + j\omega M_{23} i_3;$$

$$\dot{E} = \frac{1}{j\omega C} (i_1 + i_2 + i_3) + (r_3 + j\omega L_3) i_3 - j\omega M_{13} i_1 + j\omega M_{23} i_2.$$

Совместное решение уравнений дает токи.

Предлагается читателям приведенную выше систему контурных уравнений получить матричным методом, рассмотренным в § 7-10.

У к а з а н и е, Матрица соединений для схемы рис. 8-8 имеет вид:

$$\|C\| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Матрица сопротивлений ветвей равна:

$$\|Z_B\| = \begin{vmatrix} \frac{1}{j\omega C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_1 + j\omega L_1 & j\omega M_{12} & -j\omega M_{13} \\ 0 & j\omega M_{13} & r_2 + j\omega L_2 & j\omega M_{23} \\ 0 & -j\omega M_{13} & j\omega M_{23} & r_3 + j\omega L_3 \end{vmatrix}$$

#### 8-4. КОЭФФИЦИЕНТ ИНДУКТИВНОЙ СВЯЗИ. ИНДУКТИВНОСТЬ РАССЕЯНИЯ

Рассмотрим картину магнитного поля индуктивно связанных катушек, схематически представленную на рис. 8-9 (для согласного направления токов).

Положим, что первая катушка состоит из  $w_1$  витков, а вторая из  $w_2$  витков, расположенных в каждой катушке настолько близко друг к другу, что магнитный поток охватывает целиком витки данной катушки.

В общем случае, когда по обеим катушкам проходят токи  $i_1$  и  $i_2$ , магнитные потоки могут быть представлены как результат наложения потоков, создаваемых каждым током в отдельности.

На рис. 8-9 приняты следующие обозначения магнитных потоков:

- $\Phi_1$  — весь поток, созданный током  $i_1$  первой катушки;
- $\Phi_{M1}$  — поток взаимной индукции первой катушки, пронизывающий витки второй катушки;
- $\Phi_{S1}$  — поток рассеяния первой катушки, пронизывающий только витки этой катушки;

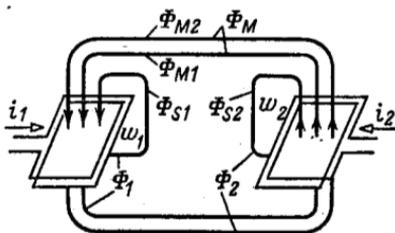


Рис. 8-9. Магнитные потоки двух индуктивно связанных катушек.

$\Phi_2$ ,  $\Phi_{M2}$ ,  $\Phi_{s2}$  — аналогичные потоки, созданные током  $i_2$  второй катушки;

$\Phi_M$  — общий поток взаимной индукции, пронизывающий витки обеих катушек.

Из сказанного следует, что

$$\Phi_1 = \Phi_{s1} + \Phi_{M1}; \quad \Phi_2 = \Phi_{s2} + \Phi_{M2}; \quad \Phi_M = \Phi_{M1} + \Phi_{M2}.$$

Чем меньше потоки рассеяния  $\Phi_{s1}$  и  $\Phi_{s2}$ , тем больше приближается  $\Phi_{M1}$  к  $\Phi_1$  и соответственно  $\Phi_{M2}$  к  $\Phi_2$ .

При изменении токов  $i_1$  и  $i_2$  во времени изменяются также и потоки, создаваемые этими токами. Индуктивность каждой катушки, как известно, определяется отношением потокосцепления самоиндукции к току данной катушки:

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \frac{\omega_1 \Phi_1}{i_1} = \frac{\omega_1 \Phi_{s1}}{i_1} + \frac{\omega_1 \Phi_{M1}}{i_1}; \\ L_2 &= \frac{\omega_2 \Phi_2}{i_2} = \frac{\omega_2 \Phi_{s2}}{i_2} + \frac{\omega_2 \Phi_{M2}}{i_2}. \end{aligned} \right\} \quad (8-9)$$

Первые слагаемые этих выражений:

$$L_{s1} = \frac{\omega_1 \Phi_{s1}}{i_1}; \quad L_{s2} = \frac{\omega_2 \Phi_{s2}}{i_2} \quad (8-10)$$

называются индуктивностями рассеяния катушек.

Магнитные потоки могут быть выражены через произведения м. д. с. на магнитные проводимости путей, по которым замыкаются эти потоки:

$$\begin{aligned} \Phi_{s1} &= i_1 \omega_1 \Lambda_{s1}; & \Phi_{s2} &= i_2 \omega_2 \Lambda_{s2}; \\ \Phi_{M1} &= i_1 \omega_1 \Lambda_M; & \Phi_{M2} &= i_2 \omega_2 \Lambda_M. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} L_1 &= \omega_1^2 (\Lambda_{s1} + \Lambda_M); \\ L_2 &= \omega_2^2 (\Lambda_{s2} + \Lambda_M). \end{aligned} \quad (8-11)$$

Таким образом, индуктивность катушки пропорциональна квадрату числа витков и сумме магнитных проводимостей путей потоков рассеяния и взаимной индукции (см. § 1-7).

Магнитная проводимость в свою очередь зависит от формы и размеров катушек, их взаимного расположения и магнитной проницаемости среды (см. § 8-1). На основании (8-1), (8-2), (8-9) и (8-10) индуктивности рассея-



ния  $L_{s1}$  и  $L_{s2}$  можно выразить через  $L_1$ ,  $L_2$  и  $M$  следующими формулами:

$$L_{s1} = L_1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} M; \quad L_{s2} = L_2 - \frac{\omega_2}{\omega_1} M. \quad (8-12)$$

Эти выражения нам понадобятся в следующем параграфе при рассмотрении схемы замещения трансформатора.

Степень индуктивной связи двух катушек характеризуется коэффициентом связи  $k$ , определяемым как среднее геометрическое из отношений потока взаимной индукции ко всему потоку катушки, т. е.

$$k = \sqrt{\frac{\Phi_{M1}}{\Phi_1} \frac{\Phi_{M2}}{\Phi_2}}. \quad (8-13)$$

Если выразить потоки через параметры  $L_1$ ,  $L_2$  и  $M$  по формулам (8-1), (8-2) и (8-9), то получим:

$$k = \sqrt{\frac{Mi_1\omega_1}{\omega_2 L_1 i_1} \frac{Mi_2\omega_2}{\omega_1 L_2 i_2}}$$

или

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}. \quad (8-14)$$

Из формулы (8-13) видно, что коэффициент связи всегда меньше единицы (так как  $\Phi_{M1}/\Phi_1 < 1$  и  $\Phi_{M2}/\Phi_2 < 1$ ). Коэффициент связи возрастает с уменьшением потоков рассеяния  $\Phi_{s1}$  и  $\Phi_{s2}$ .

С учетом (8-3) и (8-11) коэффициент связи может быть выражен через магнитные проводимости:

$$k = \frac{\Lambda_M}{\sqrt{(\Lambda_{s1} + \Lambda_M)(\Lambda_{s2} + \Lambda_M)}}.$$

Повышение коэффициента связи достигается бифилярным способом намотки катушек (рис. 8-10, а) и применением магнитопровода, так как с увеличением магнитной проницаемости и соответственно магнитной проводимости магнитопровода доля потоков рассеяния снижается.

При перпендикулярном расположении осей катушки (рис. 8-10, б) коэффициент связи обращается в нуль. Поэтому, перемещая одну катушку относительно другой, можно плавно изменять коэффициент связи в широких пределах, а при последовательном соединении этих катушек плавно изменять их результирующую индуктивность. Такое устройство называется **вариометром**.



При наличии магнитопровода цепь теряет свойство линейности. Однако в тех случаях, когда по условиям работы магнитная индукция в магнитопроводе не выходит за пределы прямолинейного участка кривой намагничивания и его магнитная проницаемость может быть принята постоянной, данная цепь рассматривается как линейная и изложенная выше теория сохраняет силу.

Как уже указывалось, схематическая картина магнитного поля на рис. 8-9 соответствует согласному направлению токов. Если изменить на рис. 8-9 положитель-

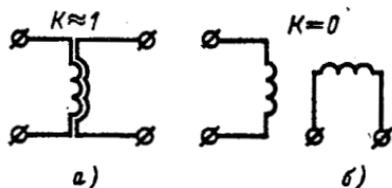


Рис. 8-10. Катушки с коэффициентом связи, близким к единице (а) и нулю (б).

ное направление тока  $i_2$ , то изменится направление магнитных потоков  $\Phi_{s2}$  и  $\Phi_{M2}$ , что будет соответствовать встречному направлению токов.

В этом случае в уравнениях, приведенных выше, должен быть изменен знак перед  $i_2$ ,  $\Phi_{s2}$ ,  $\Phi_{M2}$  и  $\Phi_2$ . При этом, как видно из предыдущих формул, величины  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $M$ ,  $k$ ,  $L_{s1}$  и  $L_{s2}$  сохраняются неизменными.

В предыдущем параграфе было показано, что при встречном направлении токов в двух катушках, соединенных последовательно, результирующая индуктивность равна  $L_1 + L_2 - 2M$ .

Докажем теперь, что величина  $L_1 + L_2 - 2M$  всегда положительна. Для этого воспользуемся двумя неравенствами:

$$(\sqrt{L_1} - \sqrt{L_2})^2 = L_1 + L_2 - 2\sqrt{L_1 L_2} \geq 0$$

и

$$\sqrt{L_1 L_2} > M.$$

Заменяя в первом неравенстве  $\sqrt{L_1 L_2}$  меньшей величиной  $M$ , получим:

$$L_1 + L_2 - 2M > 0.$$

**Пример 8-3.** Индуктивная катушка имеет  $\omega$  витков, соединенных последовательно-согласно. Индуктивность каждого витка равна  $L$ . Приняв коэффициент связи витков равным единице, определить результирующую индуктивность катушки.

При отсутствии рассеяния взаимная индуктивность каждой пары витков равна  $L$ . По аналогии с (8-6) результирующая индуктивность

катушки определится суммой индуктивностей всех витков и взаимной индуктивности, умноженной на число размещений из  $\omega$  витков по два:

$$L_{\text{рез}} = \omega L + A_{\omega}^2 L.$$

Так как

$$A_{\omega}^2 = \frac{\omega!}{(\omega-2)!} = (\omega-1)\omega,$$

то

$$L_{\text{рез}} = \omega L + (\omega-1)\omega L = \omega^2 L.$$

Как и следовало ожидать, на основании выражений (8-11) результирующая индуктивность катушки пропорциональна квадрату числа витков.

## 8-5. УРАВНЕНИЯ И СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ ТРАНСФОРМАТОРА БЕЗ МАГНИТОПРОВОДА

Трансформатор представляет собой аппарат, передающий энергию из одной цепи в другую посредством электромагнитной индукции. Он применяется для различных целей, но чаще всего предназначается для преобразования переменных напряжений и токов<sup>1</sup>. Трансформатор состоит из двух или нескольких индуктивно связанных обмоток, насаженных на общий магнитопровод.

В настоящем параграфе рассматривается двухобмоточный трансформатор без магнитопровода. Такой трансформатор может служить составной частью линейной электрической цепи в устройствах электроавтоматики, измерительной техники или связи.

Если пренебречь распределенными емкостями, существующими как между витками каждой из обмоток трансформатора, так и между самими обмотками и обмотками и землей, то трансформатор может быть представлен схемой рис. 8-11, в которой активные сопротивления обмоток условно вынесены и изображены отдельно.

Обмотка трансформатора, присоединяемая к источнику питания, называется первичной, а обмотка, к которой

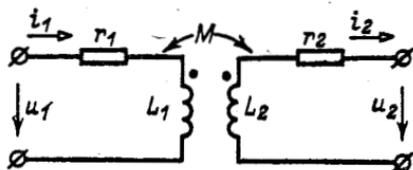


Рис. 8-11. Трансформатор без магнитопровода.

<sup>1</sup> Отсюда происходит само название «трансформатор», т. е. преобразователь.

подключается нагрузка, — в т о р и ч н о й. Соответственно напряжения и токи на выводах этих обмоток называются первичными и вторичными. Следует заметить, что такие наименования в некоторых случаях являются условными, если в зависимости от режима энергия может передаваться, как в одну, так и в другую стороны.

При заданной полярности выводов обмоток трансформатора на схеме рис. 8-11 токи направлены встречно (что в данном случае не имеет принципиального значения).

Уравнения трансформатора в дифференциальной форме при встречном направлении токов имеют вид:

$$u_1 = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}; \quad -u_2 = r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}.$$

Если напряжения и токи синусоидальны, то уравнения трансформатора в комплексной форме запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= (r_1 + j\omega L_1) \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2; \\ -\dot{U}_2 &= (r_2 + j\omega L_2) \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1. \end{aligned} \right\} \quad (8-15)$$

Эти уравнения равносильны следующим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= [r_1 + j\omega(L_1 - M) + j\omega M] \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2; \\ -\dot{U}_2 &= [r_2 + j\omega(L_2 - M) + j\omega M] \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1. \end{aligned} \right\}$$

Последние уравнения являются контурными уравнениями, которые соответствуют схеме рис. 8-12.

Следовательно, эта схема может рассматриваться в качестве схемы замещения трансформатора без магнитопровода. В отличие от рис. 8-11 в схеме замещения первичная и вторичная цепи трансформатора связаны не индуктивно, а гальванически<sup>1</sup>.

Если  $L_1 = L_2$ , то  $L_1 - M > 0$  и  $L_2 - M > 0$ , так как коэффициент связи  $k = M/\sqrt{L_1 L_2} < 1$ . При неравных значениях  $L_1$  и  $L_2$  одна из разностей ( $L_1 - M$  или  $L_2 - M$ ) может оказаться отрицательной. Например, если  $\omega_1 \gg \omega_2$ , то на основании (8-12)  $L_1 > M$  и  $L_2 < M$ . В этом случае схема замещения рис. 8-12 может быть практически осуществлена только при фиксированной частоте, когда отрицательная индуктивность может быть замещена емко-

<sup>1</sup> Такая схема замещения дает возможность, например, применить метод узловых напряжений в цепи со взаимной индукцией.



стным элементом; в общем же случае схема с линейным элементом, имеющим отрицательную индуктивность, практически нереализуема.

Входящие в схему рис. 8-12 разности  $L_1 - M$  и  $L_2 - M$  имеют физический смысл только при одинаковом числе витков первичной и вторичной обмоток ( $\omega_1 = \omega_2$ ); в этом случае, как видно из (8-12), они представляют собой индуктивности рассеяния  $L_{s1}$  и  $L_{s2}$  первичной и вторичной обмоток трансформатора.

При неодинаковых числах витков первичной и вторичной обмоток ( $\omega_1 \neq \omega_2$ ) на практике часто пользуются так называемой приведенной схемой замещения трансформатора, показанной на рис. 8-13. Приведение заключается в том, что напряжение  $\dot{U}_2$  и ток  $\dot{I}_2$  заменяются величинами, приведенными к первичной обмотке: напряжение  $\dot{U}_2$  умножается на  $n$ , а ток  $\dot{I}_2$  делится на  $n$ . Здесь  $n = \omega_1/\omega_2$  — отношение чисел витков, которое называется коэффициентом трансформации.

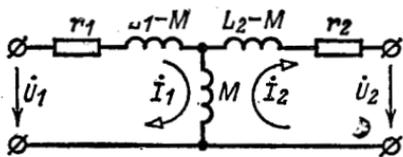


Рис. 8-12. Схема замещения трансформатора без магнитопровода.

Придав уравнениям (8-15) следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= (r_1 + j\omega L_1) \dot{I}_1 - j\omega n M \frac{\dot{I}_2}{n}; \\ -n\dot{U}_2 &= n^2 (r_2 + j\omega L_2) \frac{\dot{I}_2}{n} - j\omega n M \dot{I}_1, \end{aligned}$$

можно преобразовать их таким образом:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= [r_1 + j\omega (L_1 - nM)] \dot{I}_1 + j\omega n M \dot{I}_1 - j\omega n M \frac{\dot{I}_2}{n}; \\ -n\dot{U}_2 &= n^2 \left[ r_2 + j\omega \left( L_2 - \frac{M}{n} \right) \right] \frac{\dot{I}_2}{n} + j\omega n M \frac{\dot{I}_2}{n} - j\omega n M \dot{I}_1. \end{aligned}$$

Полученные уравнения являются контурными уравнениями для приведенной схемы замещения трансформатора (рис. 8-13).

Схема замещения трансформатора, приведенная к первичной обмотке, содержит: сопротивление  $r_1$  и индуктивность рассеяния  $L_{s1}$  первичной обмотки трансформатора; индуктивность  $\frac{\omega_1}{\omega_2} M$  в поперечной ветви (эта ветвь назы-

вается ветвью намагничивания); сопротивление  $r_2$  и индуктивность рассеяния  $L_{s2}$  вторичной обмотки, приведенные к первичной обмотке трансформатора, т. е. умноженные на  $n^2 = (\omega_1/\omega_2)^2$  (квадрат отношения чисел витков).

Индуктивные сопротивления  $\omega L_{s1}$  и  $\omega L_{s2}$  представляют собой сопротивления рассеяния первичной и вторичной обмоток трансформатора, а индуктивное сопротивление  $n\omega M$  — сопротивление ветви намагничивания. Магнитодвижущая сила, определяющая общий магнитный поток, который пронизывает первичную и вторичную обмотки,

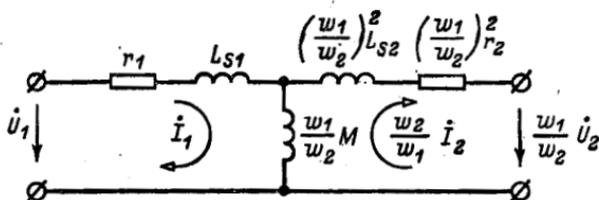


Рис. 8-13. Схема замещения, приведенная к первичной обмотке,

при встречном направлении токов равна  $i_1\omega_1 - i_2\omega_2 = (i_1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} i_2)\omega_1 = (i_1 - \frac{i_2}{n})\omega_1$ . Ток  $i_1 - \frac{i_2}{n}$  и соответствующий ему комплексный ток  $\dot{I}_1 - \frac{\dot{I}_2}{n}$ , который в схеме замещения трансформатора, приведенной к первичной обмотке, проходит через ветвь намагничивания, принято называть **намагничивающим током трансформатора**.

Схеме рис. 8-13 соответствует векторная диаграмма, показанная на рис. 8-14. При построении векторной диаграммы в качестве исходных могут быть приняты приведенные вторичные напряжение и ток.

Падения напряжения от приведенного вторичного тока  $\dot{I}_2/n$  в приведенных активном сопротивлении  $r_2 n^2$  и индуктивном сопротивлении рассеяния  $\omega L_{s2} n^2$  вторичной обмотки геометрически складываются с приведенным вторичным напряжением  $n\dot{U}_2$ . Полученное напряжение равно падению напряжения от намагничивающего тока в индуктивном сопротивлении ветви намагничивания  $j\omega n M (\dot{I}_1 - \frac{\dot{I}_2}{n})$ , причём намагничивающий ток отстает от полученного напряжения на  $90^\circ$ . Первичный ток находится как геометриче-

ская сумма намагничивающего тока и приведенного вторичного тока:

$$\left(I_1 - \frac{I_2}{n}\right) + \frac{I_2}{n} = I_1.$$

Падение напряжения от тока  $I_1$  в активном сопротивлении и индуктивном сопротивлении рассеяния первичной обмотки геометрически складывается с напряжением на ветви намагничивания, образуя первичное напряжение.

Ввиду того что вторичные электрические величины — напряжение  $\dot{U}_2$  и ток  $\dot{I}_2$  — в схеме рис. 8-13 приведены к первичной обмотке, т. е. изменены пропорционально отношению числа витков, данная схема приведенного трансформатора не эквивалентна исходной схеме трансформатора. Для того чтобы схема замещения стала эквивалентной заданной схеме трансформатора, можно воспользоваться так называемым идеальным трансформатором, которому будем приписывать следующие свойства: при любых условиях отношение первичного напряжения к вторичному на выводах идеального трансформатора равно отношению вторичного тока к первичному и определяется коэффициентом трансформации  $n$ ; идеальный трансформатор не имеет потерь энергии и при разомкнутой вторичной обмотке через его первичную обмотку ток не проходит. В действительности такого трансформатора не существует, однако по своим свойствам к нему приближается трансформатор с коэффициентом связи, близким к единице, и столь большим числом витков, что сопротивление его ветви намагничивания  $j\omega nM = j\omega n^2 \Lambda_M$  практически равно бесконечности.

Дополнив схему рис. 8-13 идеальным трансформатором с коэффициентом трансформации  $n$ , получим эквивалентную схему трансформатора (рис. 8-15).

Рисунки 8-12—8-15 соответствуют встречному направлению токов, принятому в исходной схеме рис. 8-11.

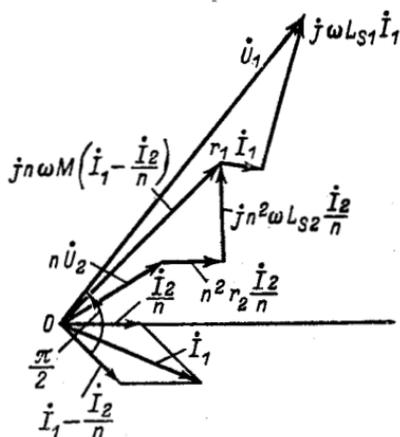


Рис. 8-14. Векторная диаграмма к схеме на рис. 8-13.

Схема замещения с измененным положительным направлением вторичного тока соответствовала бы согласному направлению токов в исходной схеме.

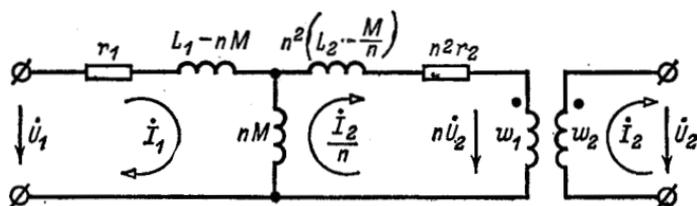


Рис. 8-15. Схема замещения с идеальным трансформатором ( $n = \omega_1/\omega_2$ ).

**Пример 8-4.** Решить пример 8-1 с помощью схемы замещения трансформатора (см. рис. 8-12).

Рассматривая индуктивно связанные элементы схемы рис. 8-16, а в качестве трансформатора с попарно соединенными первичными и вторичными выводами и пользуясь схемой замещения рис. 8-12 (с изменением направления тока  $I_2$ ), получаем эквивалентную схему рис. 8-16, б без индуктивных связей.

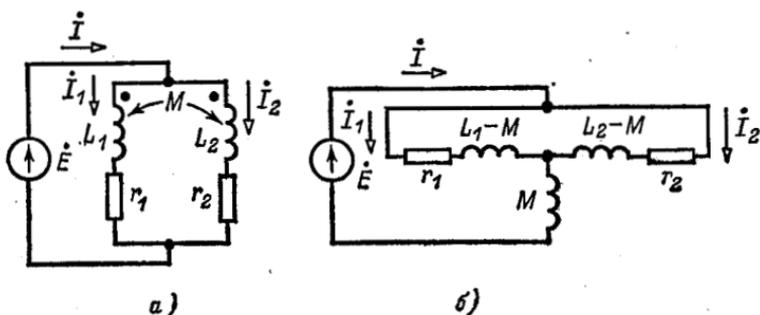


Рис. 8-16. Пример 8-4,

а — исходная схема; б — схема замещения.

Комплексное сопротивление всей цепи равно:

$$Z = \frac{\dot{E}}{I} = j\omega M + \frac{[r_1 + j\omega(L_1 - M)][r_2 + j\omega(L_2 - M)]}{r_1 + r_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)}.$$

Применяя сокращенную запись

$$Z_1 = r_1 + j\omega L_1; \quad Z_2 = r_2 + j\omega L_2; \quad Z_M = j\omega M,$$

находим:

$$Z = Z_M + \frac{(Z_1 - Z_M)(Z_2 - Z_M)}{Z_1 + Z_2 - 2Z_M} = \frac{Z_1 Z_2 - Z_M^2}{Z_1 + Z_2 - 2Z_M}.$$



## 8-6. ЭНЕРГИЯ ИНДУКТИВНО СВЯЗАННЫХ ОБМОТКОВ

Рассмотрим вопрос об энергии индуктивно связанных обмоток. Дифференциальные уравнения двух индуктивно связанных обмоток при встречном направлении токов (см, рис. 8-11) имеют вид:

$$u_1 = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}; \quad 0 = u_2 + r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}.$$

Умножив первое уравнение на  $i_1$ , а второе на  $i_2$ , сложив и сгруппировав слагаемые, получим:

$$p_1 = u_1 i_1 = u_2 i_2 + r_1 i_1^2 + r_2 i_2^2 + L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} - M \left( i_1 \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{di_1}{dt} \right)$$

или

$$p_1 = r_1 i_1^2 + r_2 i_2^2 + \frac{d\omega_m}{dt} + u_2 i_2,$$

где  $\omega_m$  — энергия магнитного поля:

$$\omega_m = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} - M i_1 i_2.$$

Как и следовало ожидать, мгновенная мощность, подводимая к трансформатору через первичные выводы, равна сумме мгновенных значений мощностей, расходуемых на нагрев обмоток, скорости изменения энергии  $\omega_m$ , накопленной в магнитном поле, и мощности, передаваемой нагрузке.

Первое слагаемое энергии магнитного поля равно энергии поля первой обмотки при  $i_2 = 0$ ; второе слагаемое равно энергии поля второй обмотки при  $i_1 = 0$ ; третье слагаемое представляет собой энергию, связанную с взаимным расположением обеих обмоток.

При согласном направлении токов третье слагаемое в выражении энергии будет иметь знак плюс.

Первое и второе слагаемые положительны, третье же в зависимости от знаков мгновенных токов  $i_1$  и  $i_2$  может иметь положительный или отрицательный знак. Поэтому энергия системы, состоящей из двух индуктивно связанных обмоток, может быть больше или меньше суммы энергий обеих обмоток, взятых отдельно.

**Пример 8-5.** Две индуктивно связанные катушки имеют индуктивности  $L_1 = 4$  Г и  $L_2 = 25$  Г; коэффициент связи  $k = 0,5$ .

Определить энергию поля, создаваемую этими катушками при токах  $i_1 = 10$  А и  $i_2 = 20$  А.

Взаимная индуктивность катушек

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} = 0,5 \sqrt{4 \cdot 25} = 5 \text{ Г.}$$

Энергия каждой катушки, взятой отдельно, составляет:

$$\frac{L_1 i_1^2}{2} = \frac{4 \cdot 10^2}{2} = 200 \text{ Дж}; \quad \frac{L_2 i_2^2}{2} = \frac{25 \cdot 20^2}{2} = 5000 \text{ Дж.}$$

Энергия взаимного расположения

$$M i_1 i_2 = 5 \cdot 10 \cdot 20 = 1000 \text{ Дж.}$$



Энергия поля всей системы при согласном направлении токов

$$\omega_M = 200 + 5000 + 1000 = 6200 \text{ Дж,}$$

а при встречном направлении токов

$$\omega_M = 200 + 5000 - 1000 = 4200 \text{ Дж.}$$

### 8-7. ВХОДНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ТРАНСФОРМАТОРА

Если нагрузка  $Z_H$  присоединена к источнику электро-энергии не непосредственно, а через трансформатор (рис. 8-17), то согласно (8-15):

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= (r_1 + j\omega L_1) \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2; \\ 0 &= \pm j\omega M \dot{I}_1 + (r_2 + j\omega L_2 + Z_H) \dot{I}_2. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\dot{I}_2 = \frac{\mp j\omega M \dot{I}_1}{r_2 + j\omega L_2 + Z_H}$ , откуда сопротивление на входных выводах трансформатора

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = r_1 + j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{r_2 + j\omega L_2 + Z_H}. \quad (8-16)$$

Третье слагаемое в правой части выражения (8-16) представляет собой комплексное сопротивление, в н о с и

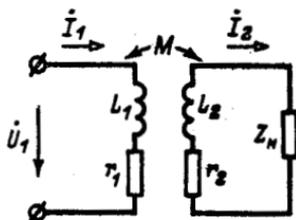


Рис. 8-17. Присоединение нагрузки к источнику через трансформатор.

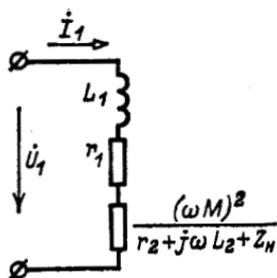


Рис. 8-18. Схема для определения входного сопротивления нагруженного трансформатора.

мое из вторичной цепи в первичную; схема рис. 8-18 эквивалентна схеме рис. 8-17. В зависимости от характера  $Z_H$  мнимая часть вносимого сопротивления может быть положительной или отрицательной.

Допустим теперь, что нагрузка  $Z_H$  присоединена к идеальному трансформатору. Учитывая условия  $\dot{U}_1/\dot{U}_2 = = \dot{I}_2/\dot{I}_1 = n$ , которыми характеризуется идеальный транс-

форматор, получим входное сопротивление

$$Z_{1\text{вх}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{nU_2}{\frac{1}{n}I_2} = n^2 Z_{\text{н}}. \quad (8-17)$$

Следовательно, идеальный трансформатор, включенный между нагрузкой и источником электроэнергии, *изменяет сопротивление нагрузки пропорционально квадрату коэффициента трансформации без изменения его угла.*

Это свойство практически используется в различных областях электротехники, проводной связи, радио, приборостроения, автоматики для уравнивания сопротивле-

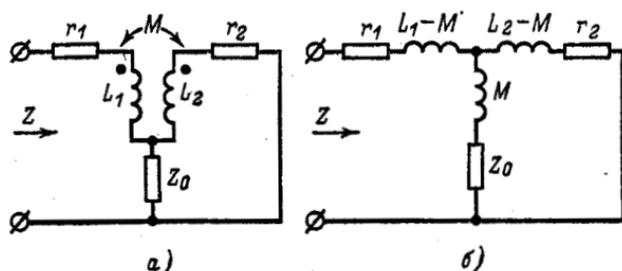


Рис. 8-19. Пример 8-6.

а — исходная схема; б — схема замещения.

ний источника и нагрузки (с целью повышения отдаваемой источником мощности). Поэтому в том случае, когда требуется изменить сопротивление какой-либо нагрузки без изменения самой нагрузки, включается промежуточный трансформатор, по свойствам приближающийся к идеальному трансформатору с коэффициентом трансформации, определяемым на основании (8-17):

$$n = \sqrt{\frac{z_{1\text{вх}}}{z_{\text{н}}}},$$

где  $z_{1\text{вх}}$  — требуемое сопротивление.

Формула (8-17) непосредственно вытекает также из приведенной схемы замещения трансформатора (см. рис. 8-13), поскольку идеальный трансформатор не имеет активных сопротивлений и индуктивностей рассеяния ( $r_1 = r_2 = 0$ ;  $L_{s1} = L_{s2} = 0$ ) и его взаимная индуктивность равна бесконечности.



Входное сопротивление идеального трансформатора при замкнутых выходных выводах равно нулю, а при разомкнутых — бесконечности.

**Пример 8-6.** Определить входное сопротивление цепи, показанной на рис. 8-19, а.

Пользуясь схемой замещения, представленной на рис. 8-19, б, находим:

$$Z = r_1 + j\omega(L_1 - M) + \frac{[r_2 + j\omega(L_2 - M)][j\omega M + Z_0]}{r_2 + j\omega L_2 + Z_0}.$$

**Пример 8-7.** Определить входное сопротивление цепи, состоящей из двух трансформаторов, включенных каскадно с нагрузкой  $r_H$  на выходе (рис. 8-20, а). Активные сопротивления обмоток трансформаторов не учитываются.

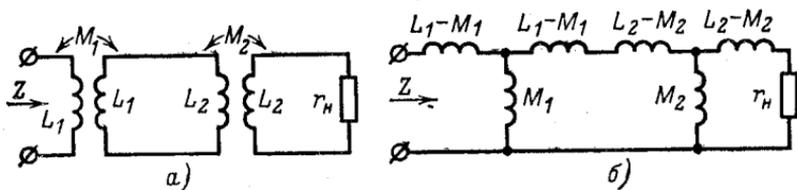


Рис. 8-20. Пример 8-7.

а — исходная схема; б — схема замещения.

В соответствии с (8-16) входное сопротивление второго трансформатора будет:

$$Z_2 = j\omega L_2 + \frac{(\omega M_2)^2}{j\omega L_2 + r_H}.$$

Рассматривая  $Z_2$  в качестве нагрузки первого трансформатора, определяем входное сопротивление цепи по той же формуле (8-16):

$$Z = j\omega L_1 + \frac{(\omega M_1)^2}{j\omega L_1 + Z_2}.$$

После преобразования находим:

$$Z = \frac{\omega r_H (L_1^2 + L_1 L_2 - M_1^2) + j\omega^2 (L_1^2 L_2 + L_1 L_2^2 - L_1 M_2^2 - L_2 M_1^2)}{\omega (L_1 L_2 + L_2^2 - M_2^2) - j r_H (L_1 + L_2)}.$$

К тому же результату можно прийти на основе схемы замещения, показанной на рис. 8-20, б.

## 8-8. АВТОТРАНСФОРМАТОР

Автотрансформатор отличается от трансформатора тем, что его обмотка низшего напряжения является частью обмотки высшего напряжения (рис. 8-21, а). Так же как и трансформатор, он может быть понижающим или повышающим.

Уравнения автотрансформатора в комплексной форме для указанных на рис. 8-21, а положительных направлений токов и напряжений записываются так:

$$\dot{U}_1 = [r_1 + j\omega(L_1 + M)]\dot{I}_1 + [r_2 + j\omega(L_2 + M)](\dot{I}_1 - \dot{I}_2);$$

$$\dot{U}_2 = [r_2 + j\omega(L_2 + M)]\dot{I}_1 - (r_2 + j\omega L_2)\dot{I}_2.$$

Эти уравнения соответствуют схеме замещения, показанной на рис. 8-21, б. Правая ветвь схемы состоит из практически неосуществимого линейного элемента — отрицательной индуктивности ( $-M$ ). Поэтому полученная схема замещения рис. 8-21, б может быть использована только для расчета. Практически осуществить ее можно только для фиксированной частоты, когда элемент  $-M$

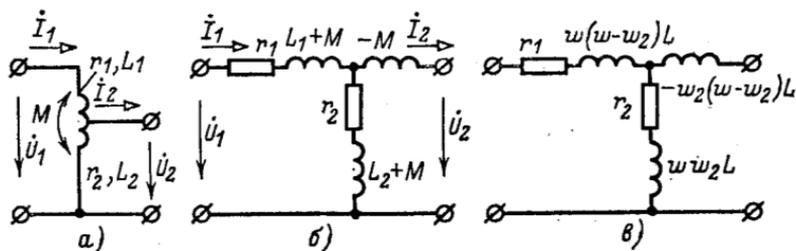


Рис. 8-21. Автотрансформатор без магнитопровода (а) и его схемы замещения (б и в).

замещается емкостью. Однако если индуктивность нагрузки, подключенной к выходным выводам, компенсирует отрицательную индуктивность, то схема замещения автотрансформатора в сочетании с нагрузкой практически осуществляется.

Итак, схема замещения автотрансформатора представляет собой трехлучевую звезду. Сопротивления лучей этой звезды могут быть найдены и другим способом, если поочередно приравнять суммы сопротивлений двух лучей сопротивлениям между соответствующими выводами автотрансформатора (при разомкнутом третьем выводе).

Обозначим: индуктивность каждого витка  $L$ , общее число витков  $\omega$ , число витков обмотки низшего напряжения  $\omega_2$ ; приняв коэффициент связи равным единице, т. е. пренебрегая рассеянием, получим в этом случае схему замещения автотрансформатора, показанную на рис. 8-21, в.

В режиме холостого хода автотрансформатора (т. е. при разомкнутых выходных выводах), если не учитывать

рассеяния, отношение первичного напряжения  $U_1$  к вторичному  $U_2$  равно отношению суммарного числа витков обмотки к числу витков обмотки низшего напряжения:

$$U_1/U_2 = \omega/\omega_2 = n;$$

$n$  — коэффициент трансформации автотрансформатора.

При нагрузке подводимая к автотрансформатору мощность передается на вторичную сторону как посредством электромагнитной индукции (через магнитное поле), так и непосредственно через электрическую связь.

Применение автотрансформатора вместо обычного трансформатора той же мощности и с таким же коэффициентом трансформации дает экономию в меди, затрачиваемой на обмотку. Экономия достигается за счет сокращения общего числа витков и уменьшения толщины провода обмотки, через которую проходит ток, равный разности первичного и вторичного токов.

Экономия в меди тем больше, чем ближе к единице коэффициент трансформации, так как при этом уменьшается разность токов  $|I_1 - I_2|$ .

### 8-9. ИНДУКТИВНО СВЯЗАННЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ КОНТУРЫ

В радиотехнике широко распространены двухконтурные колебательные системы, в которых связь между контурами осуществляется при помощи взаимной индукции.

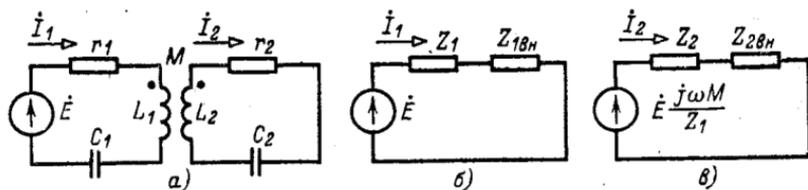


Рис. 8-22. Индуктивно связанные колебательные контуры (а) и их схемы замещения (б и в).

На рис. 8-22, а показаны колебательные контуры с индуктивной (трансформаторной) связью. Обозначим собственные сопротивления контуров через  $Z_1 = r_1 + jx_1$  и  $Z_2 = r_2 + jx_2$ . На основании § 8-7 сопротивление, вносимое из вторичной цепи в первичную, равно:

$$Z_{1вн} = r_{1вн} + jx_{1вн} = \frac{(\omega M)^2}{Z_2} = \left(\frac{\omega M}{z_2}\right)^2 r_2 - j\left(\frac{\omega M}{z_2}\right)^2 x_2.$$

На рис. 8-22, б изображена схема замещения для первичного контура. Первичный ток равен:

$$I_1 = \frac{\dot{E}}{Z_1 + \frac{(\omega M)^2}{Z_2}}, \quad (8-18)$$

а вторичный ток

$$I_2 = \frac{j\omega M I_1}{Z_2}. \quad (8-19)$$

Следует заметить, что напряжение  $Z_{1вн} I_1$  на сопротивлении, вносимом из вторичного контура в первичный, равно  $-j\omega M I_2$ .

Подставив (8-18) в (8-19) и умножив числитель и знаменатель на  $Z_2/Z_1$ , получим:

$$I_2 = \frac{\dot{E} \frac{j\omega M}{Z_1}}{Z_2 + \frac{(\omega M)^2}{Z_1}}. \quad (8-20)$$

Выражение (8-20) могло быть выведено и по теореме об эквивалентном источнике.

Числитель полученной дроби равен э. д. с., наводимой во вторичном контуре, когда он разомкнут, а знаменатель представляет собой эквивалентное сопротивление вторичного контура, в котором влияние первичного контура учтено сопротивлением  $Z_{2вн} = (\omega M)^2/Z_1$ , вносимым из первичного контура во вторичный.

Схема замещения для вторичного контура показана на рис. 8-22, в; здесь

$$Z_{2вн} = r_{2вн} + jx_{2вн} = \left(\frac{\omega M}{z_1}\right)^2 r_1 - j\left(\frac{\omega M}{z_1}\right)^2 x_1.$$

Активные составляющие вносимых сопротивлений всегда положительны, а знаки реактивных составляющих  $x_{1вн}$  и  $x_{2вн}$  противоположны знакам реактивных сопротивлений  $x_2$  и  $x_1$  соответственно.

Как  $r_{1вн}$  и  $r_{2вн}$ , так и  $x_{1вн}$  и  $x_{2вн}$  зависят от частоты. По мере приближения частоты источника к резонансной частоте вторичного контура  $r_{1вн}$  возрастает, стремясь к максимальному значению  $r_{1вн, макс} = (\omega M)^2/r_2$ , а  $x_{1вн}$  стремится к нулю. В свою очередь если частота приближается к резонансной частоте первичного контура, то  $r_{2вн}$  растет, стремясь к  $r_{2вн, макс} = (\omega M)^2/r_1$ , а  $x_{2вн}$  стремится к нулю.



## 8-10. НАСТРОЙКА СВЯЗАННЫХ КОНТУРОВ

На практике часто добиваются получения максимального тока  $I_2$  (или максимальной мощности  $P_2$ ) во вторичном контуре. Это достигается соответствующей настройкой связанных контуров. Существуют различные способы настройки, а именно:

1) изменением параметров первичного контура, например емкости  $C_1$ ; резонанс, который при этом возникает, называется **первым частным резонансом**;

2) изменением параметров вторичного контура, например емкости  $C_2$ ; в этом случае возникает **второй частный резонанс**;

3) изменением параметров одного из контуров и сопротивлений связи; резонанс в этом случае называется **сложным**;

4) изменением параметров обоих контуров и сопротивления связи; в этом случае резонанс называется **полным**.

**Первый частный резонанс.** Согласно (8-19) вторичный ток прямо пропорционален первичному. Поэтому максимуму тока  $I_1$  соответствует и максимум  $I_2$ .

Первый частный резонанс наступает при

$$x_1 - \left(\frac{\omega M}{z_2}\right)^2 x_2 = 0. \quad (8-21)$$

В этом случае:

$$I_{1\text{макс}} = \frac{E}{r_1 + \left(\frac{\omega M}{z_2}\right)^2 r_2}; \quad I_{2\text{макс}} = \frac{E\omega M}{r_1 z_2 + \frac{(\omega M)^2}{z_2} r_2}.$$

**Второй частный резонанс** наступает при

$$x_2 - \left(\frac{\omega M}{z_1}\right)^2 x_1 = 0. \quad (8-22)$$

При этом

$$I_{2\text{макс}} = \frac{E\omega M}{r_2 z_1 + \frac{(\omega M)^2}{z_1} r_1}.$$

**Сложный резонанс.** При настройке первичного контура оптимальное сопротивление связи найдем, прирав-



няв нулю первую производную  $I_{2\text{макс}}$  по  $\omega M$ :

$$\frac{\partial I_{2\text{макс}}}{\partial (\omega M)} = \frac{E \left[ r_1 z_2 + \frac{(\omega M)^2}{z_2} r_2 - 2\omega M \frac{\omega M}{z_2} r_2 \right]}{\left[ r_1 z_2 + \frac{(\omega M)^2}{z_2} r_2 \right]^2} = 0.$$

Отсюда

$$r_1 = \left( \frac{\omega M}{z_2} \right)^2 r_2.$$

Следовательно, оптимальное сопротивление связи

$$\omega M_{\text{опт}} = z_2 \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}. \quad (8-23)$$

В этом случае получается максимум максимумом вторичного тока:

$$I_{2\text{макс.макс}} = \frac{E}{2\sqrt{r_1 r_2}}.$$

Условия (8-21) и (8-23), которые при этом выполняются, означают, что собственное сопротивление первичного контура равно сопротивлению, комплексно сопряженному с сопротивлением, вносимым из вторичного контура в первичный, т. е.

$$Z_1 = \dot{Z}_{1\text{вн}}^*$$

Из § 3-5 [формула (3-17)] известно, что это и есть условие передачи максимума активной мощности от источника к приемнику.

Аналогично при настройке вторичного контура оптимальное сопротивление связи равно:

$$\omega M_{\text{опт}} = z_1 \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}, \quad (8-24)$$

причем условия (8-22) и (8-24) в совокупности означают, что

$$Z_2 = \dot{Z}_{2\text{вн}}^*$$

т. е. и в этом случае выполняется условие передачи максимума активной мощности от источника к приемнику. При этом

$$I_{2\text{макс.макс}} = \frac{E}{2\sqrt{r_1 r_2}}.$$

Следовательно, при сложном резонансе максимум максимумом вторичного тока не зависит от того, какой из контуров настраивается на резонанс.



**Полный резонанс.** При настройке на полный резонанс сначала настраивают первичный контур при разомкнутом вторичном, т. е. добиваются условия  $x_1 = 0$ . Затем настраивают вторичный контур, добиваясь условия  $x_2 = 0$ .

Наконец, подбирают оптимальное сопротивление связи. При  $x_1 = x_2 = 0$

$$I_{2\text{макс}} = \frac{E\omega M}{r_1 r_2 + (\omega M)^2}.$$

Оптимальное сопротивление связи находится из условия

$$\frac{\partial I_{2\text{макс}}}{\partial (\omega M)} = \frac{E [r_1 r_2 + (\omega M)^2 - 2 (\omega M)^2]}{[r_1 r_2 + (\omega M)^2]^2} = 0,$$

откуда

$$\omega M_{\text{опт}} = \sqrt{r_1 r_2}. \quad (8-25)$$

При этом вторичный ток равен:

$$I_{2\text{макс. макс}} = \frac{E}{2\sqrt{r_1 r_2}}.$$

Хотя максимум максимума вторичного тока при настройке на полный резонанс и получается таким же, как при настройке на сложный резонанс, *настройка на полный резонанс имеет то преимущество, что сопротивление связи меньше, чем при сложном резонансе*; оно как и активные сопротивления  $r_1$  и  $r_2$ , исчисляется единицами ом.

Эффективность передачи энергии из первичного контура во вторичный оценивается коэффициентом полезного действия двухконтурной системы, равным отношению мощности, поглощаемой сопротивлением  $r_2$ , к сумме мощностей, поглощаемых сопротивлениями  $r_1$  и  $r_2$ :

$$\eta = \frac{P_2}{P_1 + P_2}.$$

Очевидно,  $P_1 = r_1 I_1^2$ ;  $P_2 = r_2 I_2^2 = r_{1\text{вн}} I_1^2$ . Поэтому

$$\eta = \frac{r_{1\text{вн}}}{r_1 + r_{1\text{вн}}}.$$

Когда вторичный контур настроен на частоту источника,

$$r_{1\text{вн}} = \frac{(\omega M)^2}{r_2} \text{ и } \eta = \frac{(\omega M)^2}{r_1 r_2 + (\omega M)^2}.$$



При настройке на полный резонанс  $\omega M = \sqrt{r_1 r_2}$  и  $\eta = 0,5$ .

Если колебательные контуры идентичны и частота близка к резонансной, то оптимальный коэффициент связи при настройке на полный резонанс с учетом (8-25) примерно равен затуханию контура:

$$k_{\text{опт}} = \frac{\omega_0 M}{\omega_0 L} \approx \frac{r}{\omega_0 L} = \frac{1}{Q} = d.$$

Например, для радиотехнических контуров с добротностью  $Q = 100$  оптимальный коэффициент связи составит  $k_{\text{опт}} \approx 0,01$ .

### 8-11. РЕЗОНАНСНЫЕ КРИВЫЕ И ПОЛОСА ПРОПУСКАНИЯ СВЯЗАННЫХ КОНТУРОВ

Ограничимся рассмотрением случая, когда связанные колебательные контуры имеют одинаковые резонансную частоту  $\omega_0$  и добротность  $Q$ .

Для построения резонансных кривых вторичного тока воспользуемся выражением (8-20), приняв  $Z_1 = Z_2 = Z$ . При рассмотрении последовательного колебательного контура в § 5-2 встречалось выражение

$$Z = r \left[ 1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] = r (1 + j\xi).$$

Величина  $\xi = Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$  называется обобщенной расстройкой контура.

При частотах, близких к резонансной,  $\omega M \approx \omega_0 LM/L = Qrk$ . Поэтому

$$I_2 = \frac{E j Q r k}{r^2 (1 + j\xi)^2 + (Q r k)^2},$$

откуда

$$I_2 = \frac{E Q k}{r \sqrt{(1 + Q^2 k^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}.$$

Отнеся вторичный ток к току  $I_{2\text{макс. макс}} = E/2r$ , получим:

$$\frac{I_2}{I_{2\text{макс. макс}}} = \frac{2Qk}{\sqrt{(1 + Q^2 k^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}. \quad (8-26)$$



Если контуры настроены на частоту источника, то  $\xi = 0$  и

$$\frac{I_{20}}{I_{2\text{макс. макс}}} = \frac{2Qk}{1+Q^2k^2}. \quad (8-27)$$

Выясним, каким значениям  $\xi$  соответствуют максимумы резонансной кривой  $I_2/I_{2\text{макс. макс}}$ . Приравняв нулю производную по  $\xi$  от подкоренного выражения (8-26), получим три корня:

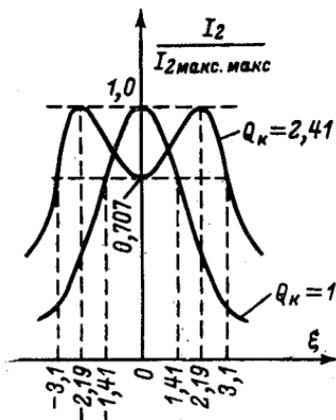


Рис. 8-23. Резонансные кривые связанных колебательных контуров.

$$\xi_0 = 0; \quad \xi_{1,2} = \pm \sqrt{Q^2k^2 - 1}.$$

При  $Qk < 1$  второй и третий корни лишены физического смысла и резонансная кривая имеет только один максимум — при  $\xi_0 = 0$  ( $\omega = \omega_0$ ). Вторичный ток при этом меньше  $I_{2\text{макс. макс}}$ .

При  $Qk = 1$  и  $\xi = 0$  получаем  $I_2/I_{2\text{макс. макс}} = 1$ , т. е. вторичный ток достигает значения максимума максимумов. При  $Qk > 1$  резонансная кривая получается двугорбой, причем впадина двугорбой

кривой соответствует значению  $\xi = 0$ , а  $I_2/I_{2\text{макс. макс}} = 1$  соответствует  $\xi = \xi_1$  и  $\xi = \xi_2$ .

Сказанное иллюстрируется рис. 8-23.

Легко показать, что при  $Qk \gg 1$ , когда  $\xi_{1,2} \approx \pm Qk$ , максимумы вторичного тока соответствуют частотам

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{k}{2}\right)^2} \pm \frac{k}{2} \right].$$

Коэффициент связи  $k = 1/Q = d$ , при котором получается предельная одногорбая резонансная кривая, называется критическим. Он совпадает с оптимальным коэффициентом связи двух идентичных контуров, настроенных на полный резонанс (см. § 8-10).

Полосой пропускания связанных колебательных контуров, как и в случае одиночного колебательного контура, условно считается область частот, на границах которой резонансная кривая снижается не более чем в  $\sqrt{2}$  раз по сравнению с максимумом.

Так как

$$\frac{\xi}{Q} = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega} = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \frac{\omega + \omega_0}{\omega},$$

то приняв вблизи резонансной частоты  $\frac{\omega + \omega_0}{\omega} \approx 2$ , можно считать, что  $|\xi|/Q = 2|\delta|$  определяет полосу пропускания связанных контуров при  $Qk \geq 1$  (здесь  $\delta$  — относительная расстройка частоты — см. § 5-2). Решением уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2Qk}{\sqrt{(1+Q^2k^2-\xi^2)^2+4\xi^2}}$$

служит

$$\xi = \pm \sqrt{Q^2k^2 + 2Qk - 1}. \quad (8-28)$$

Это выражение справедливо до тех пор, пока впадина резонансной кривой находится выше или совпадает с  $1/\sqrt{2}$ . В предельном случае  $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2Qk}{1+Q^2k^2}$ , откуда  $Qk = 2,41$ .

Подставив это значение  $Qk$  в (8-28), найдем:

$$\frac{|\xi|}{Q} = \frac{3,1}{Q} = 3,1d,$$

т. е. при  $Qk = 2,41$  полоса пропускания в 3,1 раза больше, чем у одиночного колебательного контура.

Если  $Qk = 1$ , то  $|\xi| = \sqrt{2}$  и  $|\xi|/Q = \sqrt{2}d$ , т. е. полоса пропускания в 1,41 раз больше, чем у одиночного контура.

При  $Qk = 0,68$  полоса пропускания связанных контуров равна полосе пропускания одиночного контура, а при  $Qk < 0,68$  она меньше полосы пропускания одиночного контура.

Величина  $Qk$  в радиотехнической литературе носит название параметра связи.

## 8-12. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

8-1. Перекрестив в схеме рис. 8-7 концы одной из индуктивно связанных катушек, определить сопротивление параллельно соединенных катушек без учета активных сопротивлений.

Ответ:  $\frac{j\omega(L_1L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 + 2M}$ .

8-2. В ветвь первой катушки схемы рис. 8-7 последовательно включена емкость  $50 \text{ мкФ}$ ;  $r_1 = 20 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 10 \text{ Ом}$ ;  $L_1 = 0,2 \text{ Г}$ ;  $L_2 = 0,1 \text{ Г}$ ; коэффициент связи равен  $0,4$ . Вычислить напряжение на емкости, если напряжение на параллельных ветвях равно  $100 \angle 0^\circ \text{ В}$ ;  $\omega = 400 \text{ рад/с}$ .

Ответ:  $83,6 \angle -143^\circ \text{ В}$ .

8-3. Заданы параметры трансформатора: сопротивление  $40 \text{ Ом}$  и индуктивность  $0,05 \text{ Г}$  — для первичной обмотки, сопротивление  $50 \text{ Ом}$  и индуктивность  $0,05 \text{ Г}$  — для вторичной обмотки, коэффициент связи  $0,6$ . Первичная обмотка присоединена к источнику э. д. с.  $100 \angle 0^\circ \text{ В}$ , вторичная обмотка — к источнику э. д. с.  $150 \angle 30^\circ \text{ В}$ ; угловая частота равна  $400 \text{ рад/с}$ . Электродвижущие силы источников направлены к одноименным выводам трансформатора. Вычислить активные мощности, поступающие от обоих источников и идущие на потери внутри трансформатора.

Ответ:  $128, 360 \text{ Вт}$ .

8-4. Две индуктивно связанные одинаковые катушки с сопротивлением  $10 + j10 \text{ Ом}$  каждая, соединены последовательно и согласны; сопротивление взаимной индукции равно  $j4 \text{ Ом}$ . К общему выводу катушек подключена емкость  $-j20 \text{ Ом}$ . К свободным выводам катушек подключены источники э. д. с.  $10 \angle 0^\circ$  и  $10 \angle 30^\circ \text{ В}$ , вторые выводы которых присоединены к свободному выводу емкости.

Найти напряжение на емкости.

Ответ:  $10,95 \angle -1^\circ 18' \text{ В}$ .

8-5. Трансформатор, имеющий две обмотки на общем магнитопроводе, характеризуется следующими данными:  $r_1 = 100 \text{ Ом}$ ;  $L_2 = 1 \text{ Г}$ ; общее сопротивление вторичной обмотки и нагрузки  $10\,000 \text{ Ом}$ ; отношение чисел витков  $\omega_2 : \omega_1 = 10$ ; коэффициент связи  $k = 0,5$ . Вычислить параметры схемы рис. 8-12.

Ответ:  $L_1 - M = -0,04 \text{ Г}$ ;  $L_2 - M = 0,95 \text{ Г}$ ;  $M = 0,05 \text{ Г}$ .

8-6. Вывести формулу (8-17) на основании выражения (8-16), положив, что  $L_1$  и  $L_2$  стремятся к бесконечности,  $M^2 = L_1 L_2$ ;  $r_1 = r_2 = 0$ .

8-7. Какие выводы называются однополярными?

8-8. Что называется током намагничивания?

8-9. Пояснить понятие «идеальный трансформатор».

8-10. В чем заключается приведение схемы трансформатора к первичной цепи?

8-11. Построить векторную диаграмму токов и напряжений для цепи, показанной на рис. 8-7.

8-12. Как применить трансформатор в качестве согласующего устройства?

8-13. Почему в случае двух индуктивно связанных катушек не могут одновременно выполняться условия  $L_1 < M$  и  $L_2 < M$ ?

8-14. Пользуясь схемой замещения рис. 8-22, б, построить векторную диаграмму токов и напряжений для индуктивно связанных колебательных контуров, настроенных на частоту источника. Убедиться, что в этом случае первичный ток  $I_1$  совпадает по фазе с э. д. с.  $\dot{E}$ , а ток  $I_2$  опережает  $I_1$  на  $90^\circ$ .

8-15. Что называется обобщенной расстройкой контура?

8-16. Как определяется полоса пропускания индуктивно связанных колебательных контуров?

8-17. Показать, что максимумы двугорбой кривой рис. 8-23 соответствуют  $\xi_{1,2} = \pm 2,19$ .

8-18. Как зависит глубина впадины двугорбой резонансной кривой от параметра связи  $Qk$ ?



ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

9-1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Часть электрической цепи, рассматриваемая по отношению к любым двум парам ее выводов, называется **четыре-полусником** (рис. 9-1). Понятием «четыре-полусник» пользуются тогда, когда интересуются токами и напряжениями только в двух ветвях или двух парах узлов электрической цепи. Так, в качестве четырехполусника могут быть представ-

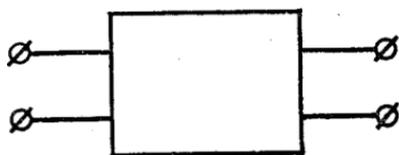


Рис. 9-1. Четыреполусник.

лены длинная линия, электрический фильтр, трансформатор, усилитель, корректирующее и всякое другое устройство с двумя парами выводов, включенное между источником и приемником электрической энергии, когда предметом исследования являются токи и напряжения на этих выводах, а не токи и напряжения внутри самого четырехполусника.

Выводы четырехполусника, к которым присоединяется источник электрической энергии, называются **входны-**

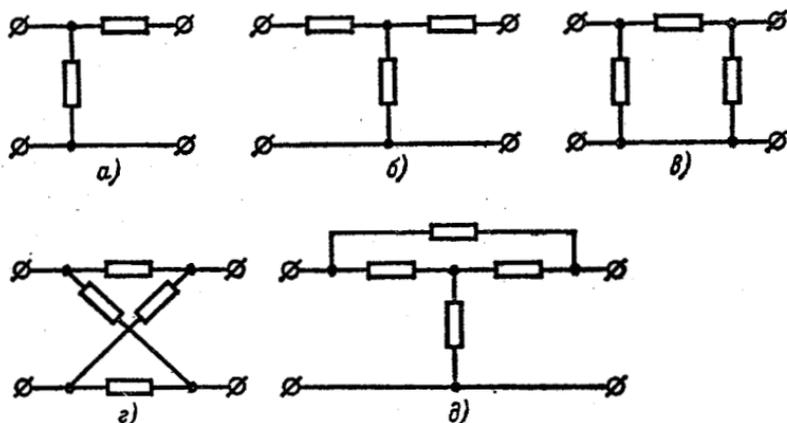


Рис. 9-2. Разновидности четырехполусников.



ми, а выводы, к которым присоединяется нагрузка, — выходные. Ради краткости применяются также термины «вход» и «выход» четырехполюсника.

На практике возможны случаи, когда обе пары выводов четырехполюсника являются входными (случай двустороннего питания четырехполюсника) или выходными (случай четырехполюсника, содержащего независимые источники электрической энергии и нагруженного с обеих сторон).

Четырехполюсники могут быть классифицированы по различным признакам.

По признаку линейности элементов, входящих в них, четырехполюсники разделяются на линейные и нелинейные. Ниже рассматриваются линейные четырехполюсники.

По схеме внутренних соединений четырехполюсников различают Г-образный (рис. 9-2, а), Т-образный (рис. 9-2, б), П-образный (рис. 9-2, в), мостовой (рис. 9-2, г), Т-образно-мостовой (рис. 9-2, д) и другие.

Четырехполюсники делятся на активные и пассивные.

Четырехполюсник называется активным, если он содержит внутри источники электрической энергии. При этом, если эти источники являются независимыми, то в случае линейного четырехполюсника обязательным дополнительным условием активности четырехполюсника является наличие на одной или обеих парах его разомкнутых выводов напряжения, обусловленного источниками электрической энергии, находящимися внутри него, т. е. необходимо, чтобы действия этих источников не компенсировались взаимно внутри четырехполюсника. Такой активный четырехполюсник называется автономным.

В случае, когда источники внутри четырехполюсника являются зависимыми, как это, например, имеет место в схемах замещения электронных ламп и транзисторов, то после отсоединения четырехполюсника от остальной части цепи напряжение на разомкнутых выводах его не обнаруживается. Такой активный четырехполюсник называется неавтономным.

Четырехполюсник называется пассивным, если он не содержит источников электрической энергии; линейный четырехполюсник может содержать источники электрической энергии, взаимно компенсирующиеся таким образом, что напряжения на обеих парах разомкнутых выводов четырехполюсника равны нулю. Так, четырехполюсник на рис. 9-3, а пассивен, так как любые две э. д. с. четырех-

плюсника взаимно компенсируются в контуре (в уравнениях Кирхгофа эти э. д. с. взаимно уничтожаются); четырехполосник, изображенный на рис. 9-3, б, пассивен вследствие того что напряжение на выводах ветви с источниками всегда равно нулю.

Если все э. д. с. в схемах рис. 9-3 приравнять нулю, то получатся четырехполосники, эквивалентные в электрическом смысле исходным. Под эквивалентностью двух четырехполосников понимается возможность взаимной замены их в электрической цепи без изменения токов и напряжений в остальной ее части.

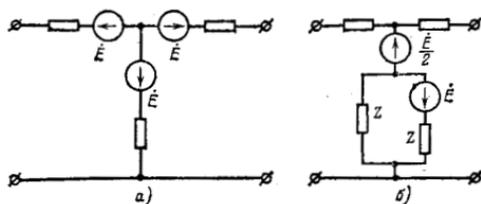


Рис. 9-3. Четырехполосники, внутри которых действия источников электрической энергии компенсированы.

Различают четырехполосники симметричные и несимметричные. Четырехполосник является симметричным в том случае, когда перемена местами его входных и выходных выводов не изменяет токов и напряжений в цепи, с которой он соединен. В противном случае четырехполосник является несимметричным.

Четырехполосник называется обратимым, если выполняется теорема обратимости, т. е. отношение напряжения на входе к току на выходе, или, что то же, передаточное сопротивление входного и выходного контуров не зависит от того, какая из двух пар выводов является входной и какая выходной. В противном случае четырехполосник называется необратимым.

*Пассивные линейные четырехполосники являются обратимыми*, несимметричные же активные (автономные и неавтономные) четырехполосники необратимы. Симметричные четырехполосники всегда обратимы.

Основной смысл теории четырехполосника заключается в том, что, пользуясь некоторыми обобщенными пара-

метрами четырехполюсника, можно находить токи и напряжения на входе и выходе четырехполюсника.

Сложная электрическая цепь (например, канал связи), имеющая входные и выходные выводы, может рассматриваться как совокупность составных четырехполюсников, соединенных по определенной схеме.

Теория четырехполюсника позволяет вычислить параметры такого сложного четырехполюсника по параметрам составных четырехполюсников и, таким образом, получить аналитическую зависимость между токами и напряжениями на входе и выходе результирующего сложного четырехполюсника, не производя расчетов токов и напряжений внутри заданной схемы.

Получаемые таким путем значения величин на входе и выходе позволяют оценить режим работы передачи в целом. При этом пользование обобщенными параметрами четырехполюсника дает возможность сопоставлять и правильно оценивать передающие свойства электрических цепей, различных по своему типу и структуре.

Теория четырехполюсника позволяет также решать задачи синтеза, т. е. находить структуру и элементы четырехполюсника по заданным характеристикам (см. гл. 17).

Основы теории пассивного четырехполюсника разрабатывались многими отечественными и зарубежными учеными. Понятие четырехполюсник может быть применено и к механизму, служащему для передачи силы и скорости от источника механической энергии к приемнику. Такой «механический четырехполюсник», имеющий два полюса (вход и выход), может быть описан линейными уравнениями, связывающими силы и скорости на полюсах [Л. 5].

Механическому четырехполюснику соответствует электрический четырехполюсник, построенный по одному из двух принципов электромеханических аналогий, указанных в § 7-12: силы заменяются напряжениями, скорости — токами, либо силы заменяются токами, а скорости — напряжениями.

В настоящей главе рассматриваются активные (неавтономные) и пассивные четырехполюсники, имеющие одну пару входных и одну пару выходных выводов. Рассмотрение общей теории многополюсника не входит в рамки данного курса.

## 9-2. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Положим, что имеется четырехполюсник, не содержащий независимых источников электрической энергии. Обозначим левую пару выводов четырехполюсника цифрами  $1-1'$ , а правую пару выводов — цифрами  $2-2'$ . Этого условного обозначения будем придерживаться во всем последующем изложении, приписывая индексы 1 и 2 токам и напряжениям, относящимся соответственно к левой и правой парам выводов четырехполюсника. Теми же индексами 1 и 2 будут обозначаться входной и выходной контуры четырехполюсника.

На рис. 9-4 обозначены принятые положительные направления для токов и напряжений на выводах четырехполюсника. Вариант с токами  $I_1$  и  $I_2$  принято называть прямой передачей (см. уравнения по форме  $\parallel A \parallel$ ), вариант с токами  $I'_1$  и  $I'_2$  — обратной передачей (см. уравнения по форме  $\parallel B \parallel$ ). Используется также вариант с токами  $I_1$  и  $I'_2$ , который будем называть третьим вариантом (см. уравнения по формам  $\parallel Y \parallel$ ,  $\parallel Z \parallel$ ,  $\parallel H \parallel$ ,  $\parallel G \parallel$ ). Во всех случаях каждое из напряжений  $U_1$  и  $U_2$  понимается как разность потенциалов верхнего (1 или 2) и нижнего (1' или 2') выводов четырехполюсника.

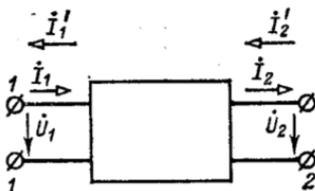


Рис. 9-4. Положительные направления токов и напряжений четырехполюсника.

Напряжения и токи на выводах четырехполюсника обуславливаются присоединением активных цепей к обоим парам выводов либо присоединением активной цепи к одной паре, а пассивной цепи к другой паре выводов четырехполюсника.

Электрические цепи, присоединенные к выводам  $1-1'$  и  $2-2'$ , могут быть на основании теоремы компенсации в любом режиме замещены источниками э. д. с.  $E_1 = U_1$  и  $E_2 = U_2$ , которые могут рассматриваться как контурные э. д. с., включенные в два независимых контура четырехполюсника, а токи  $I_1 = -I'_1$  и  $I_2 = -I'_2$  — как контурные токи.

Соотношения между напряжениями и токами на входе и выходе четырехполюсника могут быть записаны в виде следующих ниже шести форм уравнений:

1. Форма  $\| Y \|$ :  $I_1$  и  $I_2'$  выражаются в зависимости от  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$ :

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2; \\ I_2' &= Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2. \end{aligned} \right\} \quad (9-1)$$

2. Форма  $\| Z \|$ :  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$  выражаются в зависимости от  $I_1$  и  $I_2'$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2'; \\ \dot{U}_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2'. \end{aligned} \right\} \quad (9-2)$$

3. Форма  $\| A \|$ :  $\dot{U}_1$  и  $I_1$  выражаются в зависимости от  $\dot{U}_2$  и  $I_2'$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}I_2'; \\ I_1 &= A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}I_2'. \end{aligned} \right\} \quad (9-3)$$

4. Форма  $\| B \|$ :  $\dot{U}_2$  и  $I_2'$  выражаются в зависимости от  $\dot{U}_1$  и  $I_1'$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_2 &= B_{11}\dot{U}_1 + B_{12}I_1'; \\ I_2' &= B_{21}\dot{U}_1 + B_{22}I_1'. \end{aligned} \right\} \quad (9-4)$$

5. Форма  $\| H \|$ :  $\dot{U}_1$  и  $I_2'$  выражаются в зависимости от  $I_1$  и  $\dot{U}_2$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= H_{11}I_1 + H_{12}\dot{U}_2; \\ I_2' &= H_{21}I_1 + H_{22}\dot{U}_2. \end{aligned} \right\} \quad (9-5)$$

6. Форма  $\| G \|$ :  $I_1$  и  $\dot{U}_2$  выражаются в зависимости от  $\dot{U}_1$  и  $I_2'$ :

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= G_{11}\dot{U}_1 + G_{12}I_2'; \\ \dot{U}_2 &= G_{21}\dot{U}_1 + G_{22}I_2'. \end{aligned} \right\} \quad (9-6)$$

Из перечисленных выше шести форм уравнений рассмотрим более подробно формы  $\| Y \|$  и  $\| A \|$ .

Коэффициенты и определители каждой системы уравнений четырехполюсника могут быть выражены через коэффициенты и определители любой другой системы (см. приложения II и III). Таблицы облегчают переход от одной формы записи уравнений четырехполюсника к другой.

Контурные токи  $I_1$  и  $I_2'$  связаны с контурными э. д. с.  $\dot{E}_1 = \dot{U}_1$  и  $\dot{E}_2 = \dot{U}_2$  (рис. 9-4) линейными уравнениями (9-1), которые непосредственно следуют из (7-11) (см. § 7-5), поскольку рассматриваемый четырехполюсник не содержит независимых источников электрической энергии.



Коэффициенты  $Y$  представляют собой входные и передаточные проводимости контуров 1 и 2. В общем случае — это комплексные величины, зависящие от частоты; они определяются следующим образом:

$Y_{11} = \left( \frac{I_1'}{\dot{U}_1} \right)_{U_2=0}$  — входная проводимость со стороны выводов 1 при закороченных выводах 2;

$Y_{22} = \left( \frac{I_2'}{\dot{U}_2} \right)_{U_1=0}$  — входная проводимость со стороны выводов 2 при закороченных выводах 1;

$Y_{21} = \left( \frac{I_2'}{\dot{U}_1} \right)_{U_2=0}$  — передаточная проводимость при закороченных выводах 2;

$Y_{12} = \left( \frac{I_1'}{\dot{U}_2} \right)_{U_1=0}$  — передаточная проводимость при закороченных выводах 1.

В случае обратимого четырехполюсника

$$Y_{12} = Y_{21}, \quad (9-7)$$

т. е. только три коэффициента в уравнениях (9-1) являются независимыми.

Если четырехполюсник симметричен, то наряду с (9-7) выполняется условие

$$Y_{11} = Y_{22}. \quad (9-8)$$

В этом случае число независимых коэффициентов равно двум (например,  $Y_{11}$  и  $Y_{12}$ ).

Коэффициенты  $Z_{11}$ ,  $Z_{22}$ ,  $Z_{21}$ ,  $Z_{12}$  в общем случае комплексные и зависят от частоты. Они имеют размерность сопротивления и могут быть определены следующим образом:

$Z_{11} = \left( \frac{\dot{U}_1}{I_1'} \right)_{I_2'=0}$  — входное сопротивление со стороны выводов 1 при разомкнутых выводах 2;

$Z_{22} = \left( \frac{\dot{U}_2}{I_2'} \right)_{I_1'=0}$  — входное сопротивление со стороны выводов 2 при разомкнутых выводах 1;

$Z_{21} = \left( \frac{\dot{U}_2}{I_1'} \right)_{I_2'=0}$  — передаточное сопротивление при разомкнутых выводах 2;

$Z_{12} = \left( \frac{\dot{U}_1}{I_2'} \right)_{I_1'=0}$  — передаточное сопротивление при разомкнутых выводах 1.

В случае обратимого четырехполюсника

$$Z_{12} = Z_{21}, \quad (9-9)$$



т. е. только три коэффициента в уравнениях (9-2) являются независимыми.

Если четырехполюсник симметричен, то наряду с (9-9) выполняется условие

$$Z_{11} = Z_{22}. \quad (9-10)$$

В этом случае остаются только два независимых коэффициента (например,  $Z_{11}$  и  $Z_{12}$ ) \*.

### 9-3. УРАВНЕНИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА В ФОРМЕ $\| A \|$

Как уже отмечалось в § 9-2, при записи уравнений в форме  $\| A \|$  положительное направление токов  $I_1$  и  $I_2$  выбирается согласно рис. 9-4. Удобство выбора именно такого положительного направления тока  $I_2$  связано в данном случае с тем, что форма  $\| A \|$  применяется обычно при передаче электрической энергии от входных выводов к выходным, причем четырехполюсник, включенный между источником и приемником, может состоять из нескольких четырехполюсников, соединенных каскадно; вход каждого последующего четырехполюсника совпадает с выходом предыдущего четырехполюсника.

Выведем форму  $\| A \|$  из формы  $\| Y \|$ . Для этого в уравнениях (9-1), заменив  $I_2'$  через  $-I_2$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= Y_{11} \dot{U}_1 + Y_{12} \dot{U}_2; \\ -I_2 &= Y_{21} \dot{U}_1 + Y_{22} \dot{U}_2. \end{aligned} \right\} \quad (9-11)$$

Из второго уравнения (9-11) следует:

$$\dot{U}_1 = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} \dot{U}_2 - \frac{1}{Y_{21}} I_2. \quad (9-12)$$

Подстановка этого выражения в первое уравнение (9-11) дает:

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11} \left[ -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} \dot{U}_2 - \frac{1}{Y_{21}} I_2 \right] + Y_{12} \dot{U}_2 = \\ &= -\frac{|Y|}{Y_{21}} \dot{U}_2 - \frac{Y_{11}}{Y_{21}} I_2, \end{aligned} \quad (9-13)$$

где  $|Y| = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$ .

\* Коэффициенты четырехполюсников по форме  $\| Z \|$  не являются обратными величинами по отношению к коэффициентам по форме  $\| Y \|$ , так что, например,  $Y_{21} \neq 1/Z_{21}$  или  $Y_{11} \neq 1/Z_{11}$ .



Положив в (9-12) и (9-13):

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= -\frac{Y_{22}}{Y_{21}}; & A_{12} &= -\frac{1}{Y_{21}}; \\ A_{21} &= -\frac{|Y|}{Y_{21}}; & A_{22} &= -\frac{Y_{11}}{Y_{21}}, \end{aligned} \right\} \quad (9-14)$$

получим систему уравнений четырехполюсника<sup>1</sup> (9-3). Коэффициенты  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$ ,  $A_{22}$  в общем случае комплексные и зависят от частоты:  $A_{11}$  и  $A_{22}$  — безразмерные,  $A_{12}$  имеет размерность сопротивлений,  $A_{21}$  имеет размерность проводимости. Эти коэффициенты могут быть определены аналогично предыдущему следующим образом:

$A_{11} = \left( \frac{U_1}{U_2} \right)_{I_2=0}$  — отношение напряжений при разомкнутых выходных выводах;

$A_{22} = \left( \frac{I_1}{I_2} \right)_{U_2=0}$  — отношение токов при закороченных выходных выводах;

$A_{12} = \left( \frac{U_1}{I_2} \right)_{U_2=0}$  — величина, обратная передаточной проводимости при закороченных выходных выводах;

$A_{21} = \left( \frac{I_1}{U_2} \right)_{I_2=0}$  — величина, обратная передаточному сопротивлению при разомкнутых выходных выводах.

Определитель, составленный из коэффициентов  $A$ , равен:

$$|A| = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = \frac{Y_{12}}{Y_{21}}. \quad (9-15)$$

В случае обратимого четырехполюсника  $Y_{12} = Y_{21}$ , и поэтому

$$|A| = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1, \quad (9-16)$$

т. е. только три любых коэффициента в уравнениях (9-3) являются независимыми; четвертый коэффициент связан с остальными условием (9-16).

Если четырехполюсник симметричен, то на основании (9-14) с учетом (9-8)

$$A_{11} = A_{22}, \quad (9-17)$$

т. е. число независимых коэффициентов равно двум (например,  $A_{11}$  и  $A_{12}$ ).

<sup>1</sup> Коэффициенты  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$  и  $A_{22}$  часто также обозначаются через  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ .



В случае перемены направления передачи электрической энергии, а именно при передаче энергии от выводов 2 к выводам 1, в уравнениях четырехполюсника связывают напряжения и токи  $\dot{U}_2, \dot{I}'_2$  и  $\dot{U}_1, \dot{I}'_1$  [см. уравнения (9-4)] по форме  $\| B \|$ . Если заменить в (9-3) токи  $\dot{I}'_1$  на  $-\dot{I}'_1$  и  $\dot{I}'_2$  на  $-\dot{I}'_2$  и решить уравнения относительно  $\dot{U}_2$  и  $\dot{I}'_2$ , то получим уравнения четырехполюсника в форме  $\| B \|$ , выраженные через коэффициенты формы  $\| A \|$ . Для обратимого четырехполюсника:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_2 &= A_{22}\dot{U}_1 + A_{12}\dot{I}'_1; \\ \dot{I}'_2 &= A_{21}\dot{U}_1 + A_{11}\dot{I}'_1. \end{aligned} \right\} \quad (9-18)$$

Сопоставляя уравнение (9-18) с уравнениями (9-3), соответствующими направлению передачи энергии от выводов 1 к выводам 2, заключаем, что с переменной направления передачи энергии коэффициенты  $A_{11}$  и  $A_{22}$ , входящие в системы уравнений, меняются местами.

#### 9-4. ПАРАМЕТРЫ ХОЛОСТОГО ХОДА И КОРОТКОГО ЗАМЫКАНИЯ

В § 9-3 было показано, что коэффициенты  $Y_{11}$  и  $Y_{22}$  представляют собой входные проводимости четырехполюсника рис. 9-4, измеренные слева и справа при закороченных противоположных выводах; соответственно  $Z_{11}$  и  $Z_{22}$  представляют собой входные сопротивления четырехполюсника при разомкнутых выводах.

Введя индексы «к» и «х» для обозначения режимов короткого замыкания (выводы замкнуты) и холостого хода (выводы разомкнуты), получим параметры холостого хода и короткого замыкания:

$$\left. \begin{aligned} Z_{1к} &= \frac{1}{Y_{11}}; & Z_{2к} &= \frac{1}{Y_{22}}; \\ Z_{1х} &= Z_{11}; & Z_{2х} &= Z_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (9-19)$$

Этих параметров достаточно для составления уравнений обратимого четырехполюсника. Для записи уравнений необратимого четырехполюсника недостаточно параметров холостого хода и короткого замыкания, так как из них только три являются независимыми.

Действительно, на основании (9-19) и таблицы приложения II

$$\frac{Z_{1к}}{Z_{1х}} = \frac{1}{Y_{11}Z_{11}} = \frac{|Y|}{Y_{11}Y_{22}}$$



и

$$\frac{Z_{2к}}{Z_{2х}} = \frac{1}{Y_{22}Z_{22}} = \frac{|Y|}{Y_{11}Y_{22}},$$

откуда

$$\frac{Z_{1к}}{Z_{1х}} = \frac{Z_{2к}}{Z_{2х}}. \quad (9-20)$$

Таким образом, параметры холостого хода и короткого замыкания, выражаемые формулами (9-19), принудительно связаны уравнением (9-20).

В случае симметричного четырехполюсника

$$Z_{1к} = Z_{2к}, \quad Z_{1х} = Z_{2х},$$

т. е. симметричный четырехполюсник характеризуется только двумя параметрами.

Параметры холостого хода и короткого замыкания могут быть выражены через любую систему коэффициентов, например через коэффициенты  $A$ :

$$\left. \begin{aligned} Z_{1к} &= \frac{A_{12}}{A_{22}}; & Z_{1х} &= \frac{A_{11}}{A_{21}}; \\ Z_{2к} &= \frac{A_{12}}{A_{11}}; & Z_{2х} &= \frac{A_{22}}{A_{21}}. \end{aligned} \right\} \quad (9-21)$$

В свою очередь любая система коэффициентов обратимого четырехполюсника может быть выражена через параметры холостого хода и короткого замыкания. Например, для коэффициентов  $A$  получаем<sup>1</sup>:

$$A_{11} = \sqrt{\frac{Z_{1х}}{Z_{2х} - Z_{2к}}} \quad (9-22)$$

и, используя (9-21), выражаем все остальные коэффициенты через  $A_{11}$ :

$$A_{12} = A_{11}Z_{2к}; \quad A_{21} = \frac{A_{11}}{Z_{1х}}; \quad A_{22} = A_{11} \frac{Z_{2х}}{Z_{1х}}. \quad (9-22а)$$

## 9-5. СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

На основании уравнений четырехполюсника могут быть построены различные схемы замещения, которые облегчают исследование общих свойств рассматриваемой цепи. Ниже показаны некоторые схемы замещения четырехпо-

<sup>1</sup> Эта формула дает двузначное решение, так как входящие в нее параметры не меняются от перекрещивания любой пары выводов.



люсника, параметры которых выражаются через коэффициенты  $Y$ ,  $Z$  и  $A$ .

На практике чаще всего пользуются  $\Pi$ -образной и  $T$ -образной схемами замещения четырехполюсника.

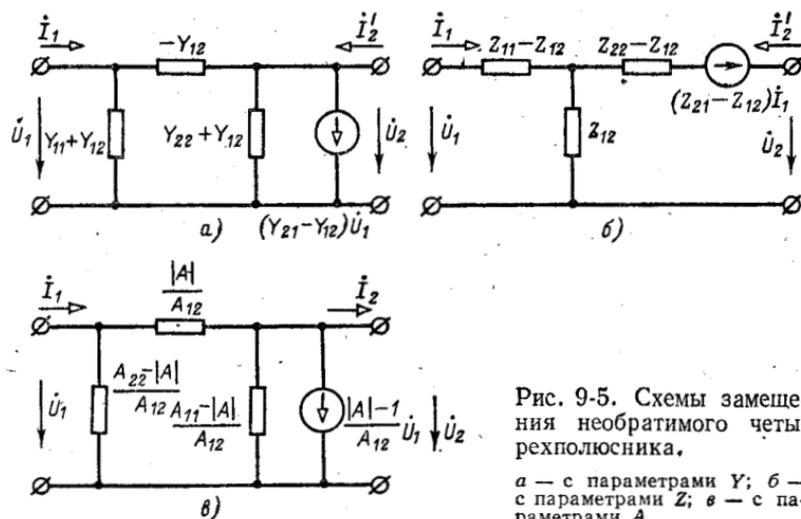


Рис. 9-5. Схемы замещения необратимого четырехполюсника.

а — с параметрами  $Y$ ; б — с параметрами  $Z$ ; в — с параметрами  $A$ .

На рис. 9-5, а показана  $\Pi$ -образная схема замещения четырехполюсника, в которой проводимости ветвей выражены через коэффициенты  $Y$ . При этом зависимый источник тока  $(Y_{21} - Y_{12}) \dot{U}_1$  сохраняется в эквивалентной схеме

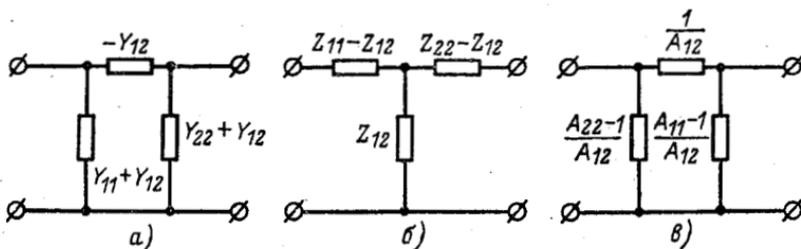


Рис. 9-6. Эквивалентные схемы пассивного четырехполюсника.

только в случае необратимого четырехполюсника; в схеме обратимого четырехполюсника ( $Y_{12} = Y_{21}$ ) источник тока отсутствует (см. рис. 9-6, а).

Схема рис. 9-5, а соответствует системе уравнений (9-1). Действительно, по первому закону Кирхгофа ток



$I_1$  равен сумме токов, входящих в ветви с проводимостями  $Y_{11} + Y_{12}$  и  $-Y_{12}$ . Ток, входящий в первую ветвь, равен  $(Y_{11} + Y_{12}) \dot{U}_1$ , а ток, входящий во вторую ветвь, равен  $-Y_{12} (\dot{U}_1 - \dot{U}_2)$ .

Итак,

$$I_1 = (Y_{11} + Y_{12}) \dot{U}_1 - Y_{12} (\dot{U}_1 - \dot{U}_2) = Y_{11} \dot{U}_1 + Y_{12} \dot{U}_2.$$

В свою очередь ток  $I_2'$  равен сумме токов, входящих в ветви с проводимостями  $Y_{22} + Y_{12}$  и  $-Y_{12}$ , и тока источника  $(Y_{21} - Y_{12}) \dot{U}_1$ . Следовательно,

$$I_2' = (Y_{22} + Y_{12}) \dot{U}_2 - Y_{12} (\dot{U}_2 - \dot{U}_1) + (Y_{21} - Y_{12}) \dot{U}_1 = Y_{21} \dot{U}_1 + Y_{22} \dot{U}_2.$$

На рис. 9-5, б показана Т-образная схема замещения, в которой сопротивления ветвей выражены через коэффициенты  $Z$  четырехполюсника. Применяв второй закон Кирхгофа, легко убедиться в тсм, что данная схема соответствует уравнениям (9-2).

Схема замещения четырехполюсника содержит зависимый источник э. д. с. или тока в случае, когда четырехполюсник необратим. В схеме обратимого четырехполюсника ( $Z_{12} = Z_{21}$ ) зависимый источник отсутствует (рис. 9-6, б).

Параметры схемы замещения четырехполюсника могут быть выражены также через коэффициенты  $A$ . Так, например, пользуясь таблицей приложения II, можно в П-образной схеме (см. рис. 9-5, а) проводимости ветвей выразить через коэффициенты  $A$ ; при этом получится схема рис. 9-5, в; в случае обратимого четырехполюсника будем иметь схему рис. 9-6, в, которая часто применяется для расчета энергетических систем.

Пассивный П-образный четырехполюсник может быть преобразован в Т-образный (или наоборот) по правилу преобразования треугольника в эквивалентную звезду (см. § 4-5).

Следует заметить, что П-образная и Т-образная схемы замещения четырехполюсника не всегда физически реализуемы<sup>1</sup>.

Под физически реализуемой пассивной схемой понимается такая схема, в которой параметры  $r$ ,  $L$  и  $C$  положительны (см. гл. 17). Если в какой-либо ветви схемы данное условие не выполнено, то схема физически нереализуема.

<sup>1</sup> Это не относится к четырехполюсникам, не содержащим реактивных элементов.



Например, схема рис. 9-6, б нереализуема при отрицательном знаке действительной части  $Z_{12}$ , т. е. если

$$\operatorname{Re} Z_{12} < 0.$$

Схемой замещения четырехполюсника может служить и мостовая схема (см. § 9-15). Мостовая схема является физически реализуемым эквивалентом для любого реально осуществимого симметричного пассивного четырехполюсника.

Схемы замещения необратимых четырехполюсников, описанные выше, применяются для анализа и расчета электрических цепей, содержащих электронные лампы и транзисторы. К этому вопросу предстоит вернуться во второй части курса.

**Пример 9-1.** Рассматривая автотрансформатор (см. рис. 8-21, а) как четырехполюсник, построить для него T-образную схему замещения.

Выбрав положительные направления токов по третьему варианту и воспользовавшись параметрами  $Z$ , найдем:

$$Z_{11} = r_1 + r_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M); \quad Z_{22} = r_2 + j\omega L_2;$$

$$Z_{12} = Z_{21} = \left( \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \right)_{I_1=0} = r_2 + j\omega(L_2 + M).$$

На основании рис. 9-6, б получаются следующие сопротивления ветвей T-образной схемы:

$$Z_{11} - Z_{12} = r_1 + j\omega(L_1 + M); \quad Z_{22} - Z_{12} = -j\omega M;$$

$$Z_{12} = r_2 + j\omega(L_2 + M).$$

Полученный результат совпадает с данными § 8-8 (см. рис. 8-21, б).

## 9-6. ВХОДНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НАГРУЗКЕ

Обозначим через  $Z_{1\text{вх}}$  входное сопротивление четырехполюсника со стороны выводов 1, когда к выводам 2 присоединено произвольное комплексное сопротивление  $Z_2$  (рис. 9-7, а); соответственно через  $Z_{2\text{вх}}$  обозначим входное сопротивление четырехполюсника со стороны выводов 2, когда к выводам 1 присоединено произвольное комплексное сопротивление  $Z_1$  (рис. 9-7, б).

Следовательно, входное сопротивление  $Z_{1\text{вх}}$  равно отношению напряжения  $\dot{U}_1$  к току  $\dot{I}_1$  при прямой передаче энергии:

$$Z_{1\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1},$$



а  $Z_{2вх}$  равно отношению напряжения  $\dot{U}_2$  к току  $\dot{I}'_2$  при обратной передаче энергии:

$$Z_{2вх} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}'_2}.$$

Входные сопротивления четырехполюсника могут быть выражены через любую систему коэффициентов четырехполюсника и комплексные сопротивления нагрузок  $Z_1$  и  $Z_2$ .

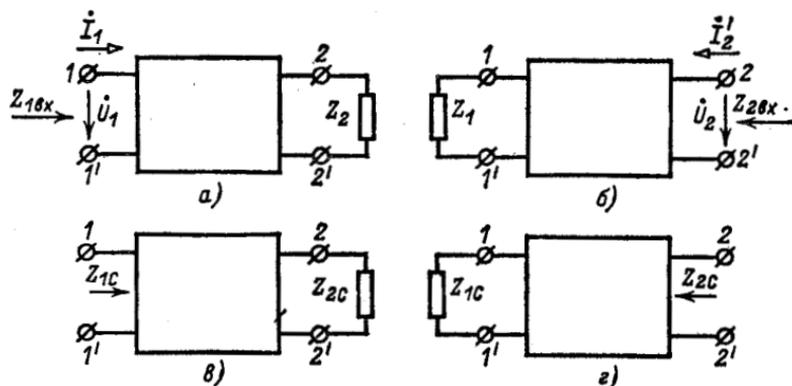


Рис. 9-7. Несимметричный четырехполюсник при прямой и обратной передаче.

а и б — произвольная нагрузка; в и г — согласованная нагрузка.

Например, если воспользоваться системой уравнений (9-3), то, разделив первое из уравнений на второе, получим:

$$Z_{1вх} = \frac{A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}'_2}{A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}'_2} = \frac{A_{11}Z_2 + A_{12}}{A_{21}Z_2 + A_{22}}. \quad (9-23)$$

Аналогично при обратной передаче на основании (9-18)

$$Z_{2вх} = \frac{A_{22}\dot{U}_1 + A_{12}\dot{I}'_1}{A_{21}\dot{U}_1 + A_{11}\dot{I}'_1} = \frac{A_{22}Z_1 + A_{12}}{A_{21}Z_1 + A_{11}}. \quad (9-24)$$

Если воспользоваться таблицами приложений II и III, то можно выразить  $Z_{1вх}$  и  $Z_{2вх}$  через другие коэффициенты четырехполюсника.

На практике применяются и другие выражения для  $Z_{1вх}$  и  $Z_{2вх}$ . Например, в тех случаях, когда известны параметры холостого хода ( $Z_{1х}$  и  $Z_{2х}$ ) и короткого замыкания ( $Z_{1к}$  и  $Z_{2к}$ ), удобно пользоваться зависимостями  $Z_{1вх}$  и  $Z_{2вх}$  от этих параметров. С этой целью выражениям (9-23) и

(9-24) с учетом (9-21) получается следующий вид:

$$Z_{1вх} = \frac{A_{11} \frac{A_{12}}{A_{21}} + Z_2}{\frac{A_{22}}{A_{21}} + Z_2} = Z_{1х} \frac{Z_{2к} + Z_2}{Z_{2х} + Z_2};$$

$$Z_{2вх} = \frac{A_{22} \frac{A_{12}}{A_{21}} + Z_1}{\frac{A_{11}}{A_{21}} + Z_1} = Z_{2х} \frac{Z_{1к} + Z_1}{Z_{1х} + Z_1}.$$

Рассмотренные выше функциональные зависимости  $Z_{1вх} = F_1(Z_2)$ ,  $Z_{2вх} = F_2(Z_1)$  представляют собой дробно-линейные преобразования, связывающие сопротивления на выводах четырехполюсника; они иллюстрируют одно из свойств четырехполюсника — способность преобразовывать сопротивления.

### 9-7. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Положим, что сопротивления  $Z_1$  и  $Z_2$  в схемах рис. 9-7, а и б подобраны таким образом, что  $Z_{1вх} = Z_1$  и  $Z_{2вх} = Z_2$ . Иначе говоря, будем считать, что существуют два сопротивления:  $Z_1 = Z_{1с}$  и  $Z_2 = Z_{2с}$ , которые удовлетворяют следующему условию: входное сопротивление  $Z_{1вх}$  четырехполюсника, нагруженного сопротивлением  $Z_{2с}$ , равно  $Z_{1с}$  (рис. 9-7, в); входное сопротивление  $Z_{2вх}$  четырехполюсника, нагруженного сопротивлением  $Z_{1с}$ , равно  $Z_{2с}$  (рис. 9-7, г).

Такие два сопротивления называются характеристическими сопротивлениями несимметричного четырехполюсника.

Условие, когда четырехполюсник нагружен соответствующим характеристическим сопротивлением, называется условием согласования нагрузки или согласованного включения.

Положив в (9-23) и (9-24)

$$Z_{1вх} = Z_1 = Z_{1с}$$

и

$$Z_{2вх} = Z_2 = Z_{2с},$$

получим:

$$Z_{1с} = \frac{A_{11}Z_{2с} + A_{12}}{A_{21}Z_{2с} + A_{22}}; \quad Z_{2с} = \frac{A_{22}Z_{1с} + A_{12}}{A_{21}Z_{1с} + A_{11}}.$$



Совместное решение этих уравнений относительно  $Z_{1c}$  и  $Z_{2c}$  дает:

$$Z_{1c} = \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}}; \quad Z_{2c} = \sqrt{\frac{A_{22}A_{12}}{A_{21}A_{11}}}. \quad (9-25)$$

Введем для рассматриваемого обратимого четырехполюсника новый параметр  $g$ , удовлетворяющий условиям:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} g &= \sqrt{\frac{A_{11}A_{22}}{A_{12}A_{21}}}; \\ \operatorname{sh} g &= \sqrt{\frac{A_{12}A_{21}}{A_{11}A_{22}}}. \end{aligned} \right\} \quad (9-26)$$

Эти условия всегда осуществимы, так как параметр  $g$  может быть комплексным. Кроме того, эти условия взаимно дополняют друг друга, так как имеющая место связь между коэффициентами (9-16) соответствует тригонометрической формуле

$$\operatorname{ch}^2 g - \operatorname{sh}^2 g = 1.$$

Параметр  $g$  в общем случае комплексный;  $g = a + jb$  называется мерой передачи<sup>1</sup> четырехполюсника. Это — третий характеристический параметр обратимого четырехполюсника. Его действительная часть  $a$  называется собственным затуханием четырехполюсника, а мнимая часть  $b$  — коэффициентом фазы.

Физический смысл этих коэффициентов будет пояснен ниже. Выразим коэффициенты четырехполюсника формы  $\|A\|$  через характеристические параметры.

На основании (9-25):

$$\sqrt{\frac{Z_{1c}}{Z_{2c}}} = \sqrt{\frac{A_{11}}{A_{22}}} \quad (9-27)$$

и

$$\sqrt{Z_{1c}Z_{2c}} = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}}. \quad (9-28)$$

Умножение (9-26) на (9-27) и (9-28) дает:

$$A_{11} = \sqrt{\frac{Z_{1c}}{Z_{2c}}} \operatorname{ch} g; \quad (9-29)$$

$$A_{12} = \sqrt{Z_{1c}Z_{2c}} \operatorname{sh} g. \quad (9-30)$$

<sup>1</sup> Иногда этот параметр называется коэффициентом передачи, его не следует смешивать с терминами «коэффициент передачи по напряжению» и «коэффициент передачи по току». В литературе ранее применялось обозначение  $g = b + ja$ .



Деление (9-26) на (9-27) и (9-28) дает:

$$A_{22} = \sqrt{\frac{Z_{2c}}{Z_{1c}}} \operatorname{ch} g; \quad (9-31)$$

$$A_{21} = \frac{1}{\sqrt{Z_{1c}Z_{2c}}} \operatorname{sh} g. \quad (9-32)$$

В результате подстановки (9-29)—(9-32) в (9-3) получаются уравнения несимметричного обратимого четырехполюсника в гиперболической форме, соответствующие положительным направлениям токов  $I_1$  и  $I_2$ , указанным на рис. 9-4:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \sqrt{\frac{Z_{1c}}{Z_{2c}}} (\dot{U}_2 \operatorname{ch} g + Z_{2c} \dot{I}_2 \operatorname{sh} g); \\ \dot{I}_1 &= \sqrt{\frac{Z_{2c}}{Z_{1c}}} (\dot{I}_2 \operatorname{ch} g + \frac{1}{Z_{2c}} \dot{U}_2 \operatorname{sh} g). \end{aligned} \right\} \quad (9-33)$$

При согласованно подобранной нагрузке ( $Z_2 = Z_{2c}$ ) имеет место равенство

$$Z_{2c} \dot{I}_2 = \dot{U}_2 \quad \text{или} \quad \frac{1}{Z_{2c}} \dot{U}_2 = \dot{I}_2.$$

Если воспользоваться известным математическим соотношением

$$\operatorname{ch} g + \operatorname{sh} g = e^g,$$

то уравнения (9-33) упростятся:

$$\dot{U}_1 = \sqrt{\frac{Z_{1c}}{Z_{2c}}} \dot{U}_2 e^g; \quad \dot{I}_1 = \sqrt{\frac{Z_{2c}}{Z_{1c}}} \dot{I}_2 e^g. \quad (9-34)$$

Отсюда следует, что при согласованно подобранной нагрузке модули напряжений и соответственно токов на входе и выходе четырехполюсника связаны уравнениями:

$$U_1 = \sqrt{\frac{z_{1c}}{z_{2c}}} U_2 e^{\alpha}; \quad I_1 = \sqrt{\frac{z_{2c}}{z_{1c}}} I_2 e^{\alpha}.$$

Множитель  $\sqrt{z_{1c}/z_{2c}} e^{\alpha}$  равен отношению амплитуд или действующих значений напряжений на входе и выходе четырехполюсника при согласованной нагрузке. В свою очередь множитель  $\sqrt{z_{2c}/z_{1c}} e^{\alpha}$  равен отношению амплитуд или действующих значений токов при той же нагрузке.

Если аргументы (углы) комплексных характеристических сопротивлений  $Z_{1c}$  и  $Z_{2c}$  обозначить через  $\varphi_{1c}$  и  $\varphi_{2c}$ , то фазовый сдвиг напряжения на входе относительно напря-



жения на выходе определится величиной  $b + \frac{1}{2}(\varphi_{1c} - \varphi_{2c})$ , а фазовый сдвиг тока на выходе относительно тока на выходе — величиной  $b + \frac{1}{2}(\varphi_{2c} - \varphi_{1c})$ .

В общем случае коэффициент фазы  $b$  может быть определен как полусумма фазовых сдвигов между напряжениями и соответственно между токами на входе и выходе четырехполюсника, нагруженного согласованно. При равенстве углов  $\varphi_{1c}$  и  $\varphi_{2c}$  и согласованно подобранной нагрузке фазовые сдвиги между напряжениями и соответственно между токами четырехполюсника одинаковы и равны  $b$ .

Характеристические параметры  $Z_{1c}$ ,  $Z_{2c}$  и  $g$  могут быть выражены через параметры холостого хода и короткого замыкания, а именно: на основании (9-21), (9-25) и (9-26)

$$\left. \begin{aligned} Z_{1c} &= \sqrt{Z_{1x}Z_{1k}}; \quad Z_{2c} = \sqrt{Z_{2x}Z_{2k}}; \\ \text{th } g &= \sqrt{\frac{Z_{1k}}{Z_{1x}}} = \sqrt{\frac{Z_{2k}}{Z_{2x}}}. \end{aligned} \right\} \quad (9-35)$$

Подстановка (9-26) в формулу  $\text{ch } g + \text{sh } g = e^g$  приводит к выражению, связывающему характеристический параметр  $g$  с коэффициентами четырехполюсника формы  $\|A\|$ ,

$$e^g = e^{\alpha} e^{jb} = \sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}}. \quad (9-36)$$

По этой формуле  $g$  вычисляется однозначно, если подставлять под радикалы коэффициенты  $A$  в показательной форме с последующим сложением углов и делением их суммы на 2. По формуле (9-35) для тангенса принципиально невозможно получить однозначное решение, так как входные сопротивления под радикалом не изменяются от переkreщивания выводов четырехполюсника. Поэтому формула (9-36) предпочтительнее формулы (9-35) для  $\text{th } g$ .

Вычисление  $g$  по формуле для  $\text{th } g$  ведется в следующем порядке:

$$\text{th } g = \frac{e^g - e^{-g}}{e^g + e^{-g}},$$

откуда

$$e^{2g} = \frac{1 + \text{th } g}{1 - \text{th } g} = M \angle \varphi;$$

в результате логарифмирования

$$g = a + jb = \frac{\ln M}{2} + j \frac{\varphi}{2}.$$



Следует отметить, что параметр  $g$  может быть также получен как половина натурального логарифма отношения произведений комплексных напряжения и тока на входе и выходе четырехполюсника при согласованной нагрузке.

Действительно, на основании (9-34)

$$\left(\frac{\dot{U}_1 \dot{I}_1}{\dot{U}_2 \dot{I}_2}\right)_{Z_2=Z_{2c}} = e^{2g},$$

откуда

$$g = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\dot{U}_1 \dot{I}_1}{\dot{U}_2 \dot{I}_2}\right)_{Z_2=Z_{2c}}. \quad (9-37)$$

В случае симметричного четырехполюсника ( $A_{11} = A_{22}$ ) характеристические сопротивления  $Z_{1c}$  и  $Z_{2c}$  равны друг другу:

$$Z_{1c} = Z_{2c} = Z_c = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}}.$$

Следовательно, входное сопротивление симметричного четырехполюсника, нагруженного характеристическим сопротивлением  $Z_c$ , равно  $Z_c$ . Это означает, что всякому симметричному четырехполюснику соответствует некоторое характеристическое сопротивление  $Z_c$ , обладающее следующим свойством: *если нагрузить данный четырехполюсник сопротивлением  $Z_c$ , то отношения напряжения к току на входе и выходе четырехполюсника будут одинаковыми, т. е.*

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = Z_c.$$

На основании (9-33) уравнения симметричного четырехполюсника при произвольной нагрузке записываются в гиперболической форме (для положительных направлений рис. 9-4) так:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch} g + Z_c \dot{I}_2 \operatorname{sh} g; \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_2 \operatorname{ch} g + \frac{1}{Z_c} \dot{U}_2 \operatorname{sh} g.$$

Если нагрузка подобрана согласованно, т. е.  $Z_c \dot{I}_2 = \dot{U}_2$ , то

$$e^g = e^a e^{jb} = \left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\right)_{Z_2=Z_c} = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}\right)_{Z_2=Z_c}. \quad (9-38)$$

В этом случае амплитудные изменения напряжения и тока определяются множителем  $e^a$ , а фазовый сдвиг между



напряжениями или токами — углом  $b$ . Собственное затухание  $a$  будет:

$$a = \ln \left( \frac{U_1}{U_2} \right)_{z_2 = z_c} = \ln \left( \frac{I_1}{I_2} \right)_{z_2 = z_c} \quad (9-39)$$

Величины  $g$ ,  $a$  и  $b$  — безразмерные. Угол  $b$  вычисляется в радианах (рад); собственное затухание  $a$ , входящее в (9-39), принято вычислять в белах (Б) или децибелах (дБ), которые определяются следующим образом.

Если полная мощность на выходе четырехполюсника в 10 раз меньше мощности на его входе, то затухание составляет 1 Б; если мощность уменьшается в 100 раз, то затухание оценивается в 2 Б и т. д. Поэтому

$$a_6 = \lg \frac{S_1}{S_2} = \lg \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2}$$

В случае согласованно нагруженного симметричного четырехполюсника

$$\frac{S_1}{S_2} = \left( \frac{U_1}{U_2} \right)^2 = \left( \frac{I_1}{I_2} \right)^2$$

и, следовательно,

$$a_6 = 2 \lg \frac{U_1}{U_2} = 2 \lg \frac{I_1}{I_2}$$

Децибел — единица затухания, в 10 раз меньшая бела.

Затухание 1 дБ соответствует уменьшению полной мощности в 1,26 раза или уменьшению напряжения и тока в 1,12 раза.

Затуханию 1 Нп соответствует уменьшение амплитуды и действующего значения напряжения или тока в  $e = 2,718$  раза (так как при  $\ln \frac{U_1}{U_2} = 1$  имеем  $\frac{U_1}{U_2} = 2,718$ ).

Табл. 9-1 иллюстрирует зависимость затухания в децибелах от отношений полных мощностей  $S_1/S_2$  на входе и выходе четырехполюсника;

Таблица 9-1

Затухание при различных отношениях  $S_1/S_2$ , дБ

$a$ , дБ	$\frac{S_1}{S_2}$	$a$ , дБ	$\frac{S_1}{S_2}$	$a$ , дБ	$\frac{S_1}{S_2}$
0,1	1,02	4	2,51	8	6,31
1	1,26	5	3,16	9	7,94
2	1,58	6	3,98	10	10
3	1,99	7	5,01	10n	10 <sup>n</sup>



соответствующие им отношения величин напряжений или токов симметричного четырехполюсника, нагруженного согласованно, составляют  $\sqrt{S_1/S_2}$ .

Для перехода от децибелов к неперам или обратно можно воспользоваться приведенным выше условием:

$$a_{\text{дБ}} = 20 \lg \frac{U_i}{U_2} = 20 \lg e^{a_{\text{Нп}}} = 20 a_{\text{Нп}} \lg e = \\ = 20 \cdot 0,4343 a_{\text{Нп}} = 8,686 a_{\text{Нп}},$$

т. е.

$$1 \text{ дБ} = 0,115 \text{ Нп},$$

или

$$1 \text{ Нп} = 8,686 \text{ дБ}.$$

### 9-8. ВНОСИМОЕ ЗАТУХАНИЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Вносимое затухание (или усиление) является мерой оценки изменения условий передачи при включении четырехполюсника между источником и приемником.

Положим, что между источником напряжения, имеющим внутреннее сопротивление  $Z_1$ , и приемником  $Z_2$  включен четырехполюсник.

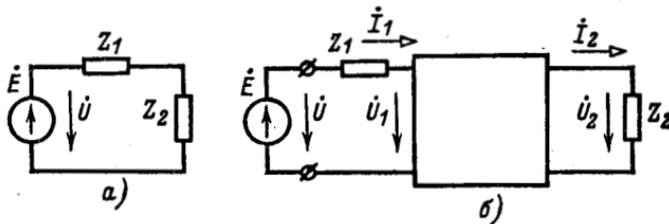


Рис. 9-8. Питание приемника непосредственно от источника (а) и через четырехполюсник (б).

Под вносимым затуханием четырехполюсника подразумевается десятикратное значение десятичного логарифма (в децибелах) или половина натурального логарифма (в неперах) отношения полной мощности  $S_1$ , которую непосредственно отдавал бы источник сопротивлению  $Z_2$  (рис. 9-8, а), к полной мощности  $S_2$  на выходе четырехполюсника, нагруженного сопротивлением  $Z_2$  (рис. 9-8, б):

$$a_{\text{вн. дБ}} = 10 \lg \frac{S_1}{S_2}, \quad (9-40)$$

или

$$a_{\text{вн. Нп}} = \frac{1}{2} \ln \frac{S_1}{S_2}. \quad (9-41)$$

Мощности  $S_1$  и  $S_2$  выражаются следующим образом:

$$S_1 = \frac{U^2 z_2}{|Z_1 + Z_2|^2}; \quad S_2 = z_2 I_2^2.$$



Согласно (9-41)

$$a_{\text{вн}} = \frac{1}{2} \ln \frac{U^2}{|Z_1 + Z_2|^2 I_2^2} = \ln \frac{U}{|Z_1 + Z_2| I_2}. \quad (9-42)$$

Отношение  $U/I_2$ , входящее в (9-42), может быть выражено через характеристические параметры четырехполюсника и сопротивления  $Z_1$  и  $Z_2$ .

Пользуясь обозначениями рис. 9-8, б и уравнениями четырехполюсника, записанными в форме  $\| A \|$ , находим:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_1 + Z_1 \dot{I}_1 = A_{11} \dot{U}_2 + A_{12} \dot{I}_2 + Z_1 (A_{21} \dot{U}_2 + A_{22} \dot{I}_2) = \\ &= (A_{11} Z_2 + A_{12} + A_{21} Z_1 Z_2 + A_{22} Z_1) \dot{I}_2, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}_2} = A_{11} Z_2 + A_{12} + A_{21} Z_1 Z_2 + A_{22} Z_1. \quad (9-43)$$

На основании (9-29) — (9-32)

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \sqrt{\frac{Z_{1c}}{Z_{2c}}} \frac{e^g + e^{-g}}{2}; \\ A_{12} &= \sqrt{Z_{1c} Z_{2c}} \frac{e^g - e^{-g}}{2}; \\ A_{21} &= \frac{1}{\sqrt{Z_{1c} Z_{2c}}} \frac{e^g - e^{-g}}{2}; \\ A_{22} &= \sqrt{\frac{Z_{2c}}{Z_{1c}}} \frac{e^g + e^{-g}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (9-44)$$

Подстановка (9-44) в (9-43) дает:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{U}}{\dot{I}_2} &= \left( \sqrt{\frac{Z_{1c}}{Z_{2c}}} Z_2 + \sqrt{Z_{1c} Z_{2c}} + \frac{Z_1 Z_2}{\sqrt{Z_{1c} Z_{2c}}} + \sqrt{\frac{Z_{2c}}{Z_{1c}}} Z_1 \right) \frac{e^g}{2} + \\ &+ \left( \sqrt{\frac{Z_{1c}}{Z_{2c}}} Z_2 - \sqrt{Z_{1c} Z_{2c}} - \frac{Z_1 Z_2}{\sqrt{Z_{1c} Z_{2c}}} + \sqrt{\frac{Z_{2c}}{Z_{1c}}} Z_1 \right) \frac{e^{-g}}{2}. \end{aligned}$$

После ряда алгебраических преобразований получается:

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}_2} = \frac{e^g \sqrt{Z_1 Z_2} (Z_1 + Z_{1c}) (Z_2 + Z_{2c}) (1 - n_1 n_2 e^{-2g})}{2 \sqrt{Z_1 Z_{1c}} \sqrt{Z_2 Z_{2c}}},$$

где

$$n_1 = \frac{Z_1 - Z_{1c}}{Z_1 + Z_{1c}} \quad \text{и} \quad n_2 = \frac{Z_2 - Z_{2c}}{Z_2 + Z_{2c}}$$

— так называемые коэффициенты отражения на входе и выходе четырехполюсника.

В связи с этим выражение (9-42) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} a_{\text{вн}} &= a + \ln \left| \frac{Z_1 + Z_{1c}}{2 \sqrt{Z_1 Z_{1c}}} \right| + \ln \left| \frac{Z_2 + Z_{2c}}{2 \sqrt{Z_2 Z_{2c}}} \right| + \\ &+ \ln |1 - n_1 n_2 e^{-2g}| - \ln \left| \frac{Z_1 + Z_2}{2 \sqrt{Z_1 Z_2}} \right|. \end{aligned}$$



Следовательно, вносимое затухание состоит из пяти слагаемых. Первое слагаемое — собственное затухание четырехполюсника, второе — затухание вследствие несогласованности сопротивлений на входе четырехполюсника, третье — затухание вследствие несогласованности сопротивлений на выходе, четвертое — затухание вследствие взаимодействия несогласованностей на входе и выходе и пятое со знаком минус — затухание вследствие несогласованности сопротивлений источника и приемника.

Если вносимое затухание равно нулю, то это означает, что мощности на входе и выходе четырехполюсника равны между собой.

Когда четырехполюсник является усилителем мощности (например, в случае лампового триода или транзистора), выражения (9-40) и (9-41) дают отрицательные значения  $a_{вн}$ ; это указывает на то, что вместо затухания в данном случае имеет место усиление (измеряемое в децибелах или непергах),

### 9-9. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ

Передачной функцией называется зависимость от частоты отношения комплексных амплитуд или комплексных действующих значений электрических величин<sup>1</sup> на выходе и входе четырехполюсника при заданном режиме передачи. Необходимо помнить, что именно *выходная электрическая величина делится на входную*, а не наоборот.

Передачные функции, соответствующие отношению одноименных электрических величин, — коэффициент передачи по напряжению

$$K_U = \dot{U}_2 / \dot{U}_1$$

и коэффициент передачи по току

$$K_I = \dot{I}_2 / \dot{I}_1$$

представляют собой безразмерные, в общем случае комплексные, зависящие от частоты величины. Применительно к усилительным устройствам они носят название коэффициентов усиления по напряжению и току.

Отношения разноименных электрических величин — передаточное сопротивление  $Z = \dot{U}_2 / \dot{I}_1$  и передаточная проводимость  $Y = \dot{I}_2 / \dot{U}_1$  — имеют соответственно размерности сопротивления и проводимости и также являются в общем случае комплексными величинами, зависящими от частоты.

Зависимости модулей комплексных отношений представляют собой амплитудно-частотные, зависи-

<sup>1</sup> Под передачной функцией понимается часто отношение операторных изображений (см. гл. 15) электрических величин на выходе и входе четырехполюсника,



мости их аргументов — ф а з о - ч а с т о т н ы е характеристики четырехполюсника. Эти характеристики имеют важное значение для работы устройств автоматики и радиотехники.

В общем случае четырехполюсника, нагруженного произвольным сопротивлением  $Z_2$ , передаточные функции могут быть выражены через любую систему коэффициентов четырехполюсника и сопротивление  $Z_2$ .

Через коэффициенты формы  $\|A\|$  они выразятся следующим образом (положительные направления для токов соответствуют прямой передаче):

$$K_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{U}_2}{A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}I_2} = \frac{Z_2}{A_{11}Z_2 + A_{12}};$$

$$K_I = \frac{I_2}{I_1} = \frac{I_2}{A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}I_2} = \frac{1}{A_{21}Z_2 + A_{22}}.$$

При холостом ходе и коротком замыкании эти коэффициенты примут вид:

$$K_{Ux} = \frac{1}{A_{11}}; \quad K_{Ik} = \frac{1}{A_{22}}.$$

В случае обратной передачи, очевидно, можно написать (при  $|A| = 1$ ):

$$K'_{Ux} = \frac{1}{A_{22}} \text{ и } K'_{Ik} = \frac{1}{A_{11}}.$$

Отсюда видно, что для обратимого четырехполюсника коэффициент передачи по напряжению при холостом ходе и прямом направлении передачи энергии равен коэффициенту передачи по току при коротком замыкании и обратном направлении передачи энергии. В свою очередь коэффициент передачи по току при коротком замыкании и прямом направлении передачи равен коэффициенту передачи по напряжению при холостом ходе и обратном направлении передачи.

#### 9-10. КАСКАДНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ, ОСНОВАННОЕ НА СОГЛАСОВАНИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

На практике широко распространено каскадное или цепочечное соединение четырехполюсников, при котором входные выводы каждого последующего четырехполюсника присоединяются к выходным выводам предыдущего четырехполюсника; цепи, служащие для передачи электри-



ческой энергии (каналы связи и т. д.) обычно состоят из звеньев, следующих друг за другом.

Каскадное соединение четырехполюсников, выполненное по принципу согласования характеристических сопротивлений, заключается в том, что входное сопротивление на выводах любого четырехполюсника равно характеристическому.

Рисунок 9-9 иллюстрирует каскадное соединение двух четырехполюсников. Ввиду того что комплексное сопротивление нагрузки согласовано с выходным характеристическим сопротивлением  $Z_{3c}$  второго четырехполюсника, входное сопротивление этого четырехполюсника равно характеристическому ( $Z_{2c}$ ); при этом оно служит согласованной нагрузкой для первого четырехполюсника. Поэтому входное сопротивление первого четырехполюсника также равно характеристическому ( $Z_{1c}$ ).

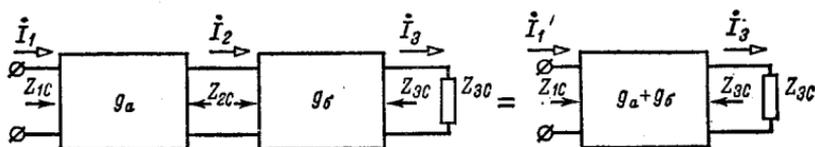


Рис. 9-9. Согласованное каскадное соединение четырехполюсников,

Отсюда следует, что каскадно соединенные четырехполюсники с согласованными характеристическими сопротивлениями могут быть замещены одним четырехполюсником, имеющим характеристические сопротивления, равные входному характеристическому сопротивлению первого и выходному характеристическому сопротивлению последнего четырехполюсников (рис. 9-9). Мера передачи  $g$  результирующего четырехполюсника определяется алгебраической суммой мер передачи составных четырехполюсников.

В самом деле, применительно к схеме рис. 9-9 в соответствии с (9-34)

$$\dot{U}_2 = \sqrt{\frac{Z_{2c}}{Z_{3c}}} \dot{U}_3 e^{g_b}; \quad \dot{U}_1 = \sqrt{\frac{Z_{1c}}{Z_{2c}}} \dot{U}_2 e^{g_a};$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{Z_{3c}}{Z_{2c}}} i_3 e^{g_b}; \quad i_1 = \sqrt{\frac{Z_{2c}}{Z_{1c}}} i_2 e^{g_a},$$

откуда

$$\dot{U}_1 = \sqrt{\frac{Z_{1c}}{Z_{3c}}} \dot{U}_3 e^{g_a + g_b}; \quad i_1 = \sqrt{\frac{Z_{3c}}{Z_{1c}}} i_3 e^{g_a + g_b}.$$

Полученные выражения подтверждают сказанное выше: результирующий четырехполюсник имеет характеристические сопротивления  $Z_{1c}$  и  $Z_{2c}$  и меру передачи  $g = g_a + g_b$ . Соответственно собственное затухание результирующего четырехполюсника  $a = a_a + a_b$ , а фазовый коэффициент  $b = b_a + b_b$ .

В гл. 3 (см. § 3-5) было показано что передача максимума активной мощности обеспечивается, когда комплексные сопротивления источника и нагрузки являются сопряженными. Это условие не выполняется в случае согласования характеристических сопротивлений каскада в прямом и обратном направлениях, если характеристические сопротивления комплексные. Однако если они активные (включая сопротивление источника), как это нередко имеет место на практике, то обеспечивается оптимальное условие передачи мощности.

Согласование характеристических сопротивлений широко применяется в автоматике, приборостроении и электронике.

#### 9-11. УРАВНЕНИЯ СЛОЖНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ В МАТРИЧНОЙ ФОРМЕ

Для получения параметров результирующего четырехполюсника, составленного из более простых четырехполюсников, параметры которых известны, удобно пользоваться матричной записью (см. § 7-10).

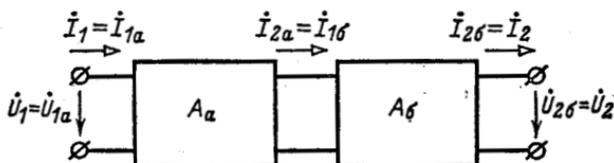


Рис. 9-10. Каскадное соединение четырехполюсников.

В зависимости от схемы соединения сложного четырехполюсника применяется та или иная форма уравнений, а именно:

- 1) при каскадном соединении (рис. 9-10) — форма  $\| A \|$  или  $\| B \|$ ;
- 2) при последовательном соединении (см. рис. 9-11) — форма  $\| Z \|$ ;
- 3) при параллельном соединении (см. рис. 9-12) — форма  $\| Y \|$ .

Каскадное соединение четырехполюсников (рис. 9-10). Уравнения составных четырехполюсников в матричной форме  $\| A \|$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix} \Big|_a &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \Big|_a \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} \Big|_a = \| A_a \| \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} \Big|_a; \\ \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix} \Big|_b &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \Big|_b \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} \Big|_b = \| A_b \| \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} \Big|_b. \end{aligned}$$

Здесь индексом *a* отмечены величины, относящиеся к первому четырехполюснику, а индексом *б* — величины, относящиеся ко второму четырехполюснику.

При каскадном соединении

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{1a}; \quad i_1 = i_{1a}; \quad \dot{U}_2 = \dot{U}_{2б}; \quad i_2 = i_{2б}; \quad \dot{U}_{2a} = \dot{U}_{1б}; \quad i_{2a} = i_{1б}.$$

Следовательно,

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{U}_1 \\ i_1 \end{array} \right\| = \|A_a\| \cdot \|A_б\| \cdot \left\| \begin{array}{c} \dot{U}_2 \\ i_2 \end{array} \right\| = \|A\| \cdot \left\| \begin{array}{c} \dot{U}_2 \\ i_2 \end{array} \right\|.$$

Таким образом, матрица  $\|A\|$  результирующего четырехполюсника равна произведению матриц составных четырехполюсников:

$$\|A\| = \|A_a\| \cdot \|A_б\|.$$

Это правило распространяется на случай каскадного соединения любого числа четырехполюсников. При этом матрицы, подлежащие

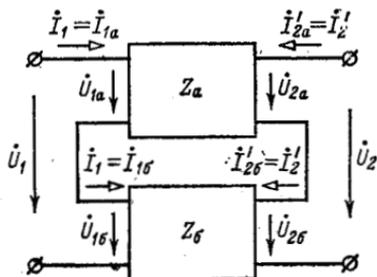


Рис. 9-11. Последовательное соединение четырехполюсников.

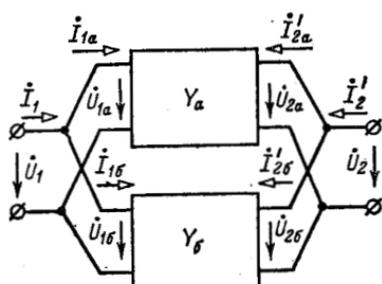


Рис. 9-12. Параллельное соединение четырехполюсников.

перемножению, записываются в порядке следования соответствующих четырехполюсников, так как умножение матриц не подчиняется переместительному закону.

*Последовательное соединение* четырехполюсников (рис. 9-11)

Уравнения составных четырехполюсников в матричной форме  $\|Z\|$  имеют вид:

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{array} \right\|_a = \|Z_a\| \cdot \left\| \begin{array}{c} i_1 \\ i_2 \end{array} \right\|_a; \quad \left\| \begin{array}{c} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{array} \right\|_б = \|Z_б\| \cdot \left\| \begin{array}{c} i_1 \\ i_2 \end{array} \right\|_б.$$

Здесь

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{1a} + \dot{U}_{1б}; \quad \dot{U}_2 = \dot{U}_{2a} + \dot{U}_{2б}.$$

Если при этом

$$i_1 = i_{1a} = i_{1б} \quad \text{и} \quad i_2 = i_{2a} = i_{2б};$$

то

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{array} \right\| = \{ \|Z_a\| + \|Z_б\| \} \left\| \begin{array}{c} i_1 \\ i_2 \end{array} \right\| = \|Z\| \cdot \left\| \begin{array}{c} i_1 \\ i_2 \end{array} \right\|.$$

## Матричные уравнения сложных четырехполюсников

Соединение	Схема	Матричное уравнение
Каскадное		$\ A\  = \ A_a\  \cdot \ A_b\ $
Последовательное		$\ Z\  = \ Z_a\  + \ Z_b\ $
Параллельное		$\ Y\  = Y_a + \ Y_b\ $
Последовательно-параллельное		$\ H\  = \ H_a\  + \ H_b\ $
Параллельно-последовательное		$\ G\  = \ G_a\  + \ G_b\ $

Таким образом, матрица  $\|Z\|$  результирующего четырехполюсника равна сумме матриц составных четырехполюсников:

$$\|Z\| = \|Z_a\| + \|Z_b\|.$$

Параллельное соединение четырехполюсника (рис. 9-12)

Уравнения составных четырехполюсников в матричной форме  $\|Y\|$  имеют вид:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}_a = \|Y_a\| \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}_a; \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}_b = \|Y_b\| \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}_b.$$

При параллельном соединении четырехполюсников:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{1a} = \dot{U}_{1b}; \quad \dot{U}_2 = \dot{U}_{2a} = \dot{U}_{2b}; \quad I_1 = I_{1a} + I_{1b}; \quad I_2 = I_{2a} + I_{2b}.$$

Следовательно,

$$\begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \{ \|Y_a\| + \|Y_c\| \} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \|Y\| \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}.$$

Таким образом, матрица  $\|Y\|$  результирующего четырехполюсника равна сумме матриц составных четырехполюсников

$$\|Y\| = \|Y_a\| + \|Y_c\|.$$

Правила нахождения матриц сложных четырехполюсников сведены в табл. 9-2. Они справедливы при любом числе составных четырехполюсников. Однако правила сложения матриц применимы только при равенстве токов входящего и выходящего в каждой паре выводов составных четырехполюсников, которое должно быть обеспечено тем или иным способом.

Соединение четырехполюсников, удовлетворяющее этому условию, называется регулярным [Л. 2 и 6].

### 9-12. ОДНОЭЛЕМЕНТНЫЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

Простейшими четырехполюсниками являются одноэлементные четырехполюсники, состоящие из последовательного (рис. 9-13, а) или параллельного (рис. 9-13, б) двухполюсника.

Уравнения первого из них в форме  $\|A\|$  записываются следующим образом:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 + Z I_2; \quad I_1 = 0 + I_2,$$

или, что то же,

$$\begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ I_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{U}_2 \\ I_2 \end{Bmatrix}.$$

Уравнения одноэлементного четырехполюсника с параллельной ветвью (рис. 9-13, б) в форме  $\|A\|$  записываются следующим образом:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 + 0; \quad I_1 = \frac{1}{Z} \dot{U}_2 + I_2$$

или, что то же,

$$\begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ I_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{U}_2 \\ I_2 \end{Bmatrix}.$$

Если в первом четырехполюснике (рис. 9-13, а) положить  $Z = 0$  или, что то же, во втором четырехполюснике (рис. 9-13, б) принять  $Z = \infty$ , то получится уравнение



в форме  $\|A\|$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix},$$

соответствующее непосредственному прямому соединению, показанному на рис. 9-14, а.

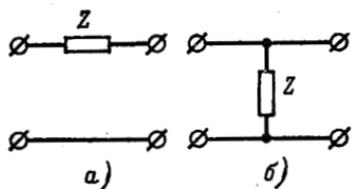


Рис. 9-13. Одноэлементные четырехполюсники с последовательной (а) и параллельной (б) ветвями.

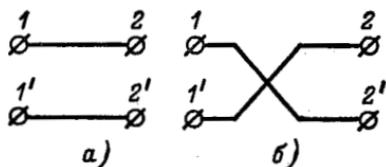


Рис. 9-14. Соединения: прямое (а) и перекрещенное (б).

Легко убедиться, что перекрещенному соединению (рис. 9-14, б) соответствует уравнение в форме  $\|A\|$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому при перекрещивании входных или выходных выводов любого четырехполюсника его матрица  $\|A\|$  умножается на  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , что равносильно перемене знаков коэффициентов  $A$ .

### 9-13. Г-ОБРАЗНЫЙ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИК

Коэффициенты Г-образного четырехполюсника (см. рис. 9-15) могут быть получены непосредственно по формулам, приведенным в § 9-2 и 9-3. Например, для схемы рис. 9-15, а коэффициенты формы  $\|A\|$  согласно формулам § 9-3 будут:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \left( \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right)_{I_2=0} = 1; \\ A_{22} &= \left( \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \right)_{U_2=0} = \frac{I_1}{\frac{Z_a}{Z_a + Z_c} I_2} = 1 + \frac{Z_c}{Z_a}; \\ A_{12} &= \left( \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \right)_{\dot{U}_2=0} = \frac{\dot{U}_1}{\frac{1}{Z_c} \dot{U}_1} = Z_c; \quad A_{21} = \left( \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right)_{I_2=0} = \frac{1}{Z_a}. \end{aligned}$$



Аналогично могут быть вычислены и другие коэффициенты.

Характеристические параметры Г-образного четырехполюсника могут быть вычислены по формулам (9-25) и (9-26).

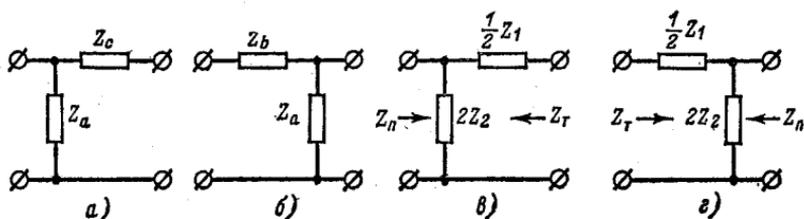


Рис. 9-15, Г-образный четырехполюсник.

Для схемы рис. 9-15, а:

$$\left. \begin{aligned} Z_{1c} &= Z_a \sqrt{\frac{Z_c}{Z_a + Z_c}}; \\ Z_{2c} &= \sqrt{Z_c (Z_a + Z_c)}; \\ \operatorname{ch} g &= \sqrt{1 + \frac{Z_c}{Z_a}}. \end{aligned} \right\} \quad (9-45)$$

Для схемы рис. 9-15, б:

$$\left. \begin{aligned} Z_{1c} &= \sqrt{Z_b (Z_a + Z_b)}; \\ Z_{2c} &= Z_a \sqrt{\frac{Z_b}{Z_a + Z_b}}; \\ \operatorname{ch} g &= \sqrt{1 + \frac{Z_b}{Z_a}}. \end{aligned} \right\} \quad (9-46)$$

При расчете электрических фильтров (см. гл. 10) и в ряде других случаев за исходные схемы Г-образных четырехполюсников принимаются схемы рис. 9-15, в и г, причем мера передачи Г-образного четырехполюсника обозначается через  $g/2$ , для того чтобы при согласованном каскадном соединении двух таких четырехполюсников получался Т- или П-образный четырехполюсник с мерой передачи  $g$  (см. § 9-14). При этом характеристическое сопротивление со стороны параллельной ветви обозначается через  $Z_{\text{п}}$ , а со стороны последовательной ветви — через  $Z_{\text{т}}$ .

На основании (9-45) или (9-46):

$$\left. \begin{aligned} Z_T &= \sqrt{Z_1 Z_2 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right)}; \\ Z_{\Pi} &= \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}}; \end{aligned} \right\} \quad (9-47)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} \frac{g}{2} &= \sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}; \\ \operatorname{sh} \frac{g}{2} &= \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}}. \end{aligned} \right\} \quad (9-48)$$

Эти выражения используются в теории электрических фильтров.

#### 9-14. Т-ОБРАЗНЫЙ И П-ОБРАЗНЫЙ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

В § 9-5 рассматривались схемы замещения четырехполюсника и приводились схемы Т-образного и П-образного четырехполюсников. Коэффициенты таких четырехполюсников вычисляются по общей методике, описанной в § 9-2—9-4.

Так, для Т-образной схемы рис. 9-16 получим:

$$\|A\| = \begin{vmatrix} 1 + \frac{Z_b}{Z_a} & Z_b + Z_c + \frac{Z_b Z_c}{Z_a} \\ \frac{1}{Z_a} & 1 + \frac{Z_c}{Z_a} \end{vmatrix}.$$

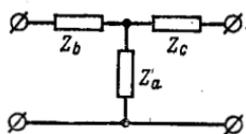


Рис. 9-16. Т-образный четырехполюсник.

Характеристические параметры находятся по формулам (9-25) и (9-26).

Симметричные Т- и П-образные четырехполюсники можно получить согласованным каскадным соединением двух одинаковых Г-образных четырехполюсников (рис. 9-17, а и б). Результирующие четырехполюсники имеют характеристические сопротивления  $Z_T$  и  $Z_{\Pi}$ , определяемые согласно (9-47), и меру передачи  $g$ , вдвое превышающую меру передачи Г-образного четырехполюсника.

С учетом (9-48) имеем:

$$\operatorname{ch} g = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 \frac{2g}{2} = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2}. \quad (9-49)$$

Тот же результат получается на основании (9-26).

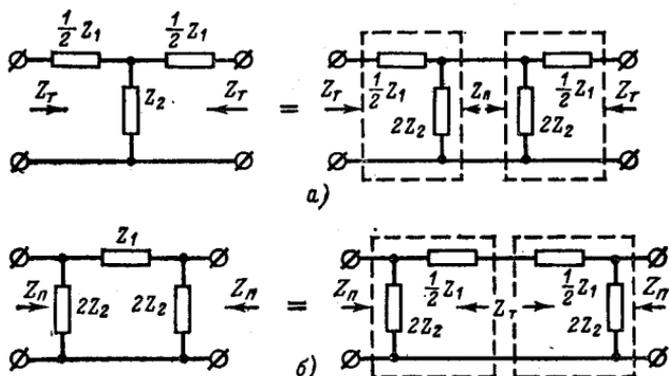


Рис. 9-17. Разложение симметричных Т-образного (а) и П-образного (б) четырехполюсников на Г-образные.

### 9-15. СИММЕТРИЧНЫЙ МОСТОВОЙ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИК

Для симметричного мостового четырехполюсника (см. рис. 9-18) в соответствии с § 9-3 можно получить коэффициенты формы  $\|A\|$ :

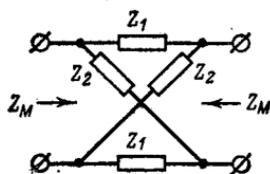


Рис. 9-18. Мостовой четырехполюсник.

$$\|A\| = \begin{vmatrix} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1} & \frac{2Z_1 Z_2}{Z_2 - Z_1} \\ 2 & \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1} \end{vmatrix}.$$

Характеристические параметры симметричного мостового четырехполюсника находятся по формулам:

$$\left. \begin{aligned} Z_M &= \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}} = \sqrt{Z_1 Z_2}; \\ \operatorname{ch} g &= A_{11} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1}; \\ \operatorname{sh} g &= \sqrt{A_{12} A_{21}} = \frac{2\sqrt{Z_1 Z_2}}{Z_2 - Z_1}; \\ \operatorname{sh} \frac{g}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{ch} g - 1}{2}} = \sqrt{\frac{Z}{Z_2 - Z_1}}; \\ \operatorname{ch} \frac{g}{2} &= \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{g}{2}} = \sqrt{\frac{Z_2}{Z_2 - Z_1}}; \\ \operatorname{th} \frac{g}{2} &= \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}. \end{aligned} \right\} (9-50)$$

Как уже отмечалось в § 9-5, мостовой четырехполюсник является физически реализуемым эквивалентом для любого реально осуществимого симметричного пассивного четырехполюсника [Л. 2 и 16].

### 9-16. ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ

Последовательно-параллельное соединение двух четырехполюсников представляет собой один из основных видов цепи с обратной связью, в которой напряжение на выходе воздействует на входные напряжения системы. Пусть некоторое устройство, которое назовем основным, представляет собой четырехполюсник с передаточной функцией  $K'(j\omega) = \dot{U}_2/\dot{U}'_1$  (рис. 9-19). Если выходное напряжение  $U_2$  подвести к выводам другого четырехполюсника, называемого устройством обратной связи, и включить его противоположные выводы последовательно с входными выводами основного устройства, то получится система с обратной связью по напряжению.



Рис. 9-19. Цепь с обратной связью.

Обозначим передаточную функцию устройства обратной связи через  $K''(j\omega) = \dot{U}'_1/\dot{U}_2$ . Очевидно,  $\dot{U}_1 = \dot{U}'_1 - \dot{U}'_1$ .

Следовательно, передаточная функция всей системы

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}'_1 - \dot{U}'_1}, =$$

или, если разделить числитель и знаменатель на  $\dot{U}'_1$ ,

$$K = \frac{K'}{1 - K'K''}. \quad (9-51)$$

Если поменять полярность одной из пар выводов устройства обратной связи, то в знаменателе (9-51) вместо знака минус получится знак плюс.

Обратная связь, при которой напряжение, пропорциональное выходному напряжению, добавляется к входному напряжению системы так, что  $|K| > |K'|$ , называется положительной; если же  $|K| < |K'|$ , то обратная связь называется отрицательной.

Выражение (9-51) может быть переписано так:

$$K = \frac{1}{K^n} \frac{K'K^n}{1 - K'K^n}.$$

Если  $|K'K^n| \gg 1$ , то

$$K \approx -\frac{1}{K^n}.$$

Это выражение показывает, что передаточная функция системы зависит от передаточной функции устройства обратной связи. Регулируя последнюю, можно воздействовать на передаточную функцию всей системы.

### 9-17. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

9-1. Доказать, что в случае симметричного четырехполюсника, нагруженного согласованно, коэффициент передачи по напряжению равен:

$$\frac{1}{A_{11} + \sqrt{A_{11}^2 - 1}}.$$

9-2. Доказать, что

$$Z_{21} = \pm \sqrt{Z_{2x}(Z_{1x} - Z_{1k})},$$

где  $Z_{1x}$ ,  $Z_{2x}$ ,  $Z_{1k}$  — параметры холостого хода и короткого замыкания,

9-3. Доказать, что

$$e^{-2g} = \frac{Z_{1c} - Z_{1k}}{Z_{1c} + Z_{1k}} = \frac{Z_{2c} - Z_{2k}}{Z_{2c} + Z_{2k}}.$$

9-4. Доказать, что коэффициент передачи по напряжению четырехполюсника, нагруженного произвольным сопротивлением  $Z_2$ , равен коэффициенту передачи по напряжению при холостом ходе, деленному на  $1 + \frac{Z_{2k}}{Z_2}$ .

9-5. Доказать, что коэффициент передачи по току четырехполюсника, нагруженного произвольным сопротивлением  $Z_2$ , равен коэффициенту передачи по току при коротком замыкании, деленному на  $1 + \frac{Z_2}{Z_{2x}}$ .

9-6. Определить коэффициент передачи по напряжению при холостом ходе и коэффициент передачи по току при коротком замыкании для П-образного четырехполюсника, продольная ветвь которого состоит из  $L$ , а поперечные ветви — из  $C$  (каждая).

О т в е т:  $\frac{1}{1 - \omega^2 LC}$ .

9-7. В схеме рис. 9-16 заданы:  $Z_a = 30 - j40$ ;  $Z_b = Z_c = 12 + j16$  Ом. Определить  $a$  и  $b$ .

О т в е т: 4,88 дБ; 0,703 рад.



9-8. Определить коэффициенты  $A$  трансформатора (см. рис. 8-11).  
 Дано:  $r_1 = 15 \text{ Ом}$ ;  $L_1 = 20 \text{ мГ}$ ;  $r_2 = 45 \text{ Ом}$ ;  $L_2 = 60 \text{ мГ}$ ;  $M = 25 \text{ мГ}$ ;  
 $\omega = 1000 \text{ рад/с}$ .

О т в е т:  $1 \angle -36^\circ 50'$ ;  $72,3 \angle 3^\circ 20'$  Ом;  $0,04 \angle 90^\circ$  См;  
 $3 \angle -36^\circ 50'$ .

9-9. Определить характеристическое сопротивление и меру передачи симметричного мостового четырехполюсника.

9-10. Доказать для симметричного мостового четырехполюсника, что

$$Z_{11} = \frac{1}{2} (Z_1 + Z_2); \quad Z_{12} = \frac{1}{2} (Z_2 - Z_1);$$

$$Y_{11} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right); \quad Y_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{Z_2} - \frac{1}{Z_1} \right).$$

9-11. Вывести условия эквивалентности симметричных T-образного и мостового четырехполюсников.

9-12. Несимметричный четырехполюсник нагружен сопротивлением  $Z_2$ . Пользуясь формулой  $\|Z\|$ , доказать, что коэффициент передачи по току равен  $K_I = -\frac{Z_{21}}{Z_{22} + Z_2}$ , а коэффициент передачи по напряжению

$$K_U = \frac{Z_{21}Z_2}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} + Z_{11}Z_2}.$$

9-13. Опыт холостого хода со стороны входных выводов и опыты холостого хода и короткого замыкания со стороны выходных выводов четырехполюсника дали следующие результаты:  $I_{1x} = 0,24 \text{ А}$ ;  $P_{1x} = 13 \text{ Вт}$ ;  $I'_{2x} = 1,11 \text{ А}$ ;  $P_{2x} = 92,3 \text{ Вт}$ ;  $I'_{2k} = 1,04 \text{ А}$ ;  $P_{2k} = 89,2 \text{ Вт}$ .

Напряжение источника питания при всех опытах было равно  $100 \text{ В}$ , и все три тока отставали по фазе от напряжения.

Определить коэффициенты  $A$ .

О т в е т:  $7,44 \angle 120^\circ 30'$ ;  $715 \angle 151^\circ 30'$  Ом;  $17,9 \cdot 10^{-2} \angle 63^\circ 25'$  См;  
 $1,59 \angle 97^\circ$ .

## ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

### ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

#### 10-1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ

Изучая свойства резонансных цепей (см. гл. 5), мы встретились с понятием полосы пропускания колебательного контура. Было установлено, что чем выше добротность контура, тем уже его полоса пропускания и соот-



ответственно острее резонансная кривая. Острота резонансной кривой характеризует частотную избирательность колебательного контура, т. е. его способность пропускать или задерживать электрические колебания только определенной частоты — резонансной или близкой к ней.

Однако на практике встречается необходимость выделения не только одной какой-либо частоты, но целой полосы частот. Например, для передачи по радио разговора требуется отделить определенную полосу частот, в пределах которой ведется данная передача, от всех других частот. Такое разделение частот осуществляется с помощью электрических фильтров.

Электрический фильтр представляет собой пассивный четырехполюсник, пропускающий некоторую определенную полосу частот с малым затуханием; вне этой полосы частот затухание велико. Полоса частот, при которых затухание мало, называется полосой пропускания фильтра. Остальную область частот составляет полоса задерживания (или затухания) фильтра.

Практическое применение электрических фильтров весьма широко и разнообразно. Они применяются не только в аппаратуре связи, но и в автоматике, приборостроении и других областях техники, где используется принцип разделения частот.

Система одновременного телеграфирования и телефонирования по одному и тому же проводу с использованием индуктивностей и емкостей для устранения влияния одного вида связи на другой была применена в России впервые в 1880 г. военным инженер-капитаном Г. Г. Игнатьевым, осуществившим разделение двух каналов связи (телефона и телеграфа) с помощью индуктивных катушек и конденсаторов.

Эти элементы, примененные в целях отделения полосы нижних частот от полосы верхних частот, являлись простейшим видом фильтрующих устройств.

Совершенствование электрических фильтров неразрывно связано с последующим развитием высокочастотной техники и электроники. Создание многоканальной проводной связи и радиосвязи сопровождалось разработкой теории электрических фильтров и методов их расчета и непрерывным совершенствованием самих фильтров. Теория электрических фильтров базируется на общей теории четырехполюсников.



Электрические фильтры могут быть классифицированы различным образом.

*Классификация по пропускаемым частотам.* В зависимости от пропускаемого спектра частот фильтры разделяются на фильтры: а) нижних частот (низкочастотные); б) верхних частот (высокочастотные); в) полосовые; г) заграждающие (режекторные).

*Классификация по схемам звеньев.* Фильтры могут состоять из звеньев Г-, Т-, П-образных, мостовых и др. В зависимости от числа звеньев фильтр может быть однозвенным или многозвенным.

*Классификация фильтров по характеристикам.* В отличие от простейших фильтров типа  $k$  различают фильтры более высокого класса — производные фильтры типа  $m$  и др. Смысл коэффициентов  $k$  и  $m$  будет пояснен ниже.

*Классификация фильтров по типам элементов.* Различают фильтры: а) реактивные (состоящие из элементов  $L$  и  $C$ ); б) пьезоэлектрические (состоящие преимущественно из кварцевых пластин); в) безындуктивные (состоящие из элементов  $r$  и  $C$ ) и др.

## 10-2. УСЛОВИЕ ПРОПУСКАНИЯ РЕАКТИВНОГО ФИЛЬТРА

Наименьшее число элементов, из которых может состоять фильтр, равно двум (Г-образное звено). Фильтры, содержащие Т- и П-образные звенья, могут рассматриваться в качестве комбинаций, составленных из Г-образных звеньев.

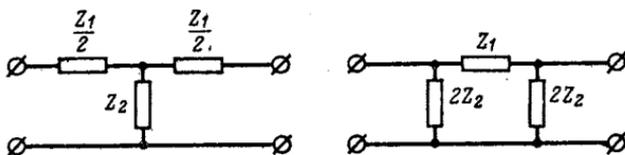


Рис. 10-1. Симметричные Т- и П-образные фильтры.

В случае симметричного Т- или П-образного фильтра (рис. 10-1) параметры  $A_{11}$  и  $g$  вычисляются по формуле (9-49):

$$A_{11} = \operatorname{ch} g = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2}. \quad (10-1)$$

Мера передачи  $g$  симметричного Т- или П-образного фильтра может быть определена как удвоенная мера передачи

$g/2$  Г-образного фильтра. Согласно (9-48)

$$\operatorname{sh} \frac{g}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}}. \quad (10-2)$$

Полосой пропускания реактивного фильтра является область частот, при которых собственное затухание реактивного фильтра равно нулю ( $a = 0$ ).

Покажем, что четырехполюсник, состоящий из одних индуктивностей или одних емкостей (знаки  $Z_1$  и  $Z_2$  одинаковы), не может иметь полосы пропускания. Иначе говоря, такой четырехполюсник не является фильтром. Действительно, пусть Г-образный или симметричный Т- или П-образный четырехполюсник состоит из чисто реактивных элементов, т. е.

$$Z_1 = \pm jx_1, \quad Z_2 = \pm jx_2; \quad (10-3)$$

здесь  $x_1$  и  $x_2$  — модули реактивных сопротивлений; положительные знаки относятся к индуктивным, отрицательные — к емкостным элементам.

Согласно (10-2)

$$\operatorname{sh} \frac{g}{2} = \operatorname{sh} \left( \frac{a}{2} + j \frac{b}{2} \right) = \operatorname{sh} \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} + j \operatorname{ch} \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}},$$

откуда, разделяя действительные и мнимые части, получаем

$$\operatorname{sh} \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}}; \quad \operatorname{ch} \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} = 0. \quad (10-4)$$

Ввиду того что гиперболический косинус действительного аргумента не может быть равен нулю ( $\operatorname{ch} \frac{a}{2} \geq 1$ ), на основании (10-4)

$$\sin \frac{b}{2} = 0 \quad \text{и} \quad \cos \frac{b}{2} = \pm 1.$$

Таким образом, при одинаковом характере сопротивлений  $Z_1$  и  $Z_2$  затухание фильтра определяется по формуле

$$\operatorname{sh} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}},$$

т. е.  $a > 0$  (четыреполюсник не имеет полосы пропускания).



Четырехполосник обладает свойствами фильтра только в том случае, когда сопротивления  $Z_1$  и  $Z_2$  имеют разные знаки, т. е.

$$Z_1 = \pm jx_1; \quad Z_2 = \mp jx_2. \quad (10-5)$$

При этом

$$\operatorname{sh} \frac{g}{2} = \pm j \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{sh} \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} = 0; \quad (10-6)$$

$$\operatorname{ch} \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}}. \quad (10-7)$$

Уравнение (10-6) удовлетворяется при

$$\operatorname{sh} \frac{a}{2} = 0 \quad (10-8)$$

или

$$\cos \frac{b}{2} = 0. \quad (10-9)$$

Условие (10-8) соответствует полосе пропускания ( $a = 0$ ). В этом случае  $\operatorname{ch} \frac{a}{2} = 1$  и согласно (10-7)

$$\sin \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}}. \quad (10-10)$$

По такому закону изменяется коэффициент фазы фильтра в полосе пропускания ( $x_1$  и  $x_2$  зависят от частоты).

В свою очередь условие (10-9) соответствует полосе задерживания. В этом случае  $b = \pm \pi$ ;  $\sin \frac{b}{2} = \pm 1$  и на основании (10-7)

$$\operatorname{ch} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}}. \quad (10-11)$$

По такому закону изменяется затухание фильтра в полосе задерживания. Формулы (10-10) и (10-11) справедливы для Г-образных и симметричных Т- и П-образных фильтров. При этом под  $a/2$  и  $b/2$  подразумеваются собственное затухание и коэффициент фазы каждого Г-образного звена. Т- или П-образный фильтр состоит из двух Г-образных звеньев, и поэтому его собственное затухание и коэффициент фазы равны соответственно  $a$  и  $b$ .



Для любого симметричного реактивного фильтра в полосе пропускания, т. е. при  $a = 0$ , выполняется условие

$$A_{11}(\omega) = \operatorname{ch} g = \operatorname{ch}(a + jb) = \operatorname{ch} jb = \cos b.$$

Поскольку косинус изменяется от  $-1$  до  $+1$ ,

$$-1 \leq A_{11}(\omega) \leq 1.$$

Это условие в случае Т- или П-образного фильтра принимает вид:

$$-1 \leq 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} \leq 1$$

или

$$-2 \leq \frac{Z_1}{2Z_2} \leq 0.$$

Разделив все части неравенства на 2, получим

$$-1 \leq \frac{Z_1}{4Z_2} \leq 0. \quad (10-12)$$

Таким образом, предельные частоты, лежащие на границе полосы пропускания (так называемые частоты среза), удовлетворяют условиям:

$$Z_1 = -4Z_2; \quad Z_1 = 0. \quad (10-13)$$

Неравенство (10-12) носит название условия пропускания реактивного фильтра (Г-, Т- или П-образного).

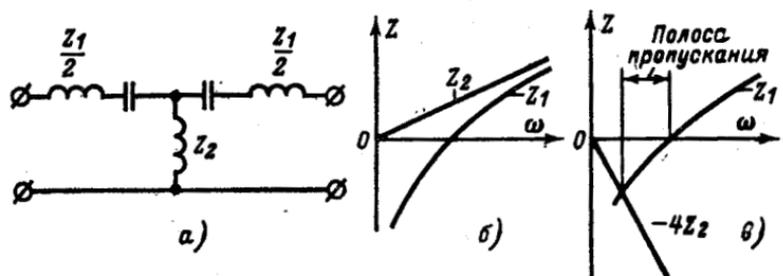


Рис. 10-2. Графическое определение полосы пропускания на основании условий (10-13).

Частоты среза находятся из уравнений (10-13) аналитически (если заданы функциональные выражения  $Z_1$  и  $Z_2$  в зависимости от частоты) или графически (если заданы частотные характеристики  $Z_1$  и  $Z_2$ ).

На рис. 10-2, б в виде примера показаны частотные характеристики  $Z_1$  и  $Z_2$  фильтра, изображенного на рис.

10-2, а; полоса пропускания графически найдена на рис. 10-2, в.

Частоты среза могут быть также получены из рассмотрения частотной характеристики входного сопротивления фильтра, нагруженного согласованно, т. е. при помощи характеристического сопротивления фильтра.

В случае Т-образного фильтра характеристическое сопротивление

$$Z_T = \sqrt{Z_1 Z_2 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right)}; \quad (10-14)$$

в случае П-образного фильтра

$$Z_{II} = \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}}. \quad (10-15)$$

Как было доказано выше, условие  $a = 0$  может быть получено только при разных знаках  $Z_1$  и  $Z_2$ . В этом случае

$$\frac{Z_1}{4Z_2} \leq 0, \quad (10-16)$$

а произведение  $Z_1 Z_2$  — действительное число.

Выражения (10-14) и (10-15) получаются действительными при

$$1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \geq 0,$$

т. е. при

$$-1 \leq \frac{Z_1}{4Z_2}. \quad (10-17)$$

Сопоставление (10-16) и (10-17) с (10-12) показывает, что условие, при котором характеристическое сопротивление рассматриваемого фильтра имеет действительное значение, совпадает с условием пропускания фильтра. Поэтому предельные частоты полосы, соответствующей действительным значениям характеристического сопротивления, являются частотами среза.

Физически это объясняется следующим образом. В полосе частот, при которых характеристическое сопротивление фильтра действительно, фильтр нагружен активным сопротивлением  $r$ , равным характеристическому по условиям согласованного включения.

Рассматриваемая здесь теория фильтров предполагает нагрузку фильтра согласованной, хотя в действитель-



ности согласовать нагрузку на всех частотах невозможно.

Мощность, потребляемая этой нагрузкой, является активной мощностью. Она равна

$$P_2 = rI_2^2 = \frac{U_2^2}{r}, \quad (10-18)$$

где  $I_2$  и  $U_2$  — действующие ток и напряжение на выходе фильтра.

Входное сопротивление симметричного фильтра, нагруженного согласованно, в зоне пропускания также равно  $r$ , и поэтому мощность на входе фильтра равна:

$$P_1 = rI_1^2 = \frac{U_1^2}{r}; \quad (10-19)$$

здесь  $I_1$  и  $U_1$  — действующие ток и напряжение на входе фильтра.

Поскольку рассматривается идеальный фильтр, т. е. фильтр, состоящий из чисто реактивных элементов, активная мощность внутри фильтра не расходуется и поэтому  $P_1 = P_2$ .

На основании (10-18) и (10-19) следует, что

$$I_1 = I_2; \quad U_1 = U_2,$$

т. е. затухание равно нулю.

Итак, в полосе пропускания фильтр имеет активное характеристическое сопротивление. В полосе задерживания характеристическое сопротивление фильтра является реактивным.

Отсюда вытекает простой способ графического нахождения частот среза по частотным характеристикам входных сопротивлений холостого хода ( $Z_x$ ) и короткого замыкания ( $Z_k$ ).

Характеристическое сопротивление  $Z_c$  фильтра связано с  $Z_x$  и  $Z_k$  формулой

$$Z_c = \sqrt{Z_x Z_k}. \quad (10-20)$$

Очевидно, что  $Z_c$  будет действительным числом при разных знаках  $Z_x$  и  $Z_k$ .

На рис. 10-3, б показаны кривые  $Z_x$  и  $Z_k$  для фильтра рис. 10-3, а. После перемножения  $Z_x$  на  $Z_k$  и извлечения корня получается кривая рис. 10-3, в; полоса частот, в пределах которой  $Z_c$  имеет действительное значение, т. е.

представляет активное сопротивление, соответствует полосе пропускания фильтра<sup>1</sup>.

Очевидно, что эта полоса ограничена частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (рис. 10-3, б); в пределах этой полосы  $Z_x$  и  $Z_k$  имеют разные знаки. Вне этой полосы  $Z_x$  и  $Z_k$  имеют одинаковый

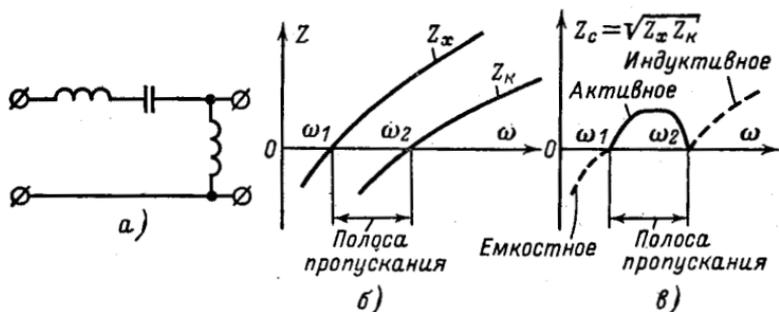


Рис. 10-3. Графическое определение полосы пропускания на основании условия (10-20).

знак и, следовательно, характеристическое сопротивление в соответствии с (10-20) имеет мнимые значения (реактивное сопротивление), показанные на рис. 10-3, в пунктиром.

Данное положение является общим для фильтров без потерь всех типов.

### 10-3. ФИЛЬТРЫ ТИПА $k$

Пусть составные элементы Г-образного звена являются взаимно обратными двухполюсниками. Это означает, что произведение их комплексных сопротивлений во всем диапазоне частот постоянно, т. е. не зависит от частоты:

$$\frac{1}{2} Z_1 \cdot 2Z_2 = Z_1 Z_2 = k^2, \quad (10-21)$$

где  $k$  — действительное число.

Можно показать, что и произведение характеристических сопротивлений  $Z_T$  и  $Z_{II}$  того же Г-образного звена также

<sup>1</sup> По оси ординат откладывается или действительное, или мнимое значение характеристического сопротивления в зависимости от области частот.

равно  $k^2$ . Действительно, умножая (10-14) на (10-15), получаем:

$$Z_T Z_{II} = Z_1 Z_2 = k^2.$$

Фильтры, удовлетворяющие условию (10-21), получили название фильтров типа  $k$ .

С учетом (10-5) и (10-21) выражения (10-10)—(10-12), (10-14) и (10-15) принимают вид

$$\sin \frac{b}{2} = \pm \frac{k}{2x_2} = \pm \frac{x_1}{2k}; \quad (10-10a)$$

$$\operatorname{ch} \frac{a}{2} = \frac{k}{2x_2} = \frac{x_1}{2k}; \quad (10-11a)$$

$$1 \geq \frac{k}{2x_2} \geq 0; \quad 1 \geq \frac{x_1}{2k} \geq 0; \quad (10-12a)$$

$$Z_T = k \sqrt{1 - \left(\frac{k}{2x_2}\right)^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{2k}\right)^2}; \quad (10-14a)$$

$$Z_{II} = \frac{k}{\sqrt{1 - \left(\frac{k}{2x_2}\right)^2}} = \frac{k}{\sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{2k}\right)^2}}. \quad (10-15a)$$

Таким образом, при заданном значении  $k$  достаточно воспользоваться только одной из частотных функций  $x_1$  или  $x_2$  (представленной аналитически или графически) для определения всех прочих характеристик фильтра типа  $k^*$ .

Приведенные выше формулы справедливы для Г-, Т- и П-образных звеньев. Иначе говоря, при одних и тех же значениях  $k$  и  $x_1$  (или  $x_2$ ) ширина полосы пропускания и характеристические сопротивления Г-образного фильтра получаются такими же, как и в случае Т- и П-образных фильтров. Разница заключается лишь в собственном затухании и коэффициенте фазы, которые при переходе от Г-образного звена к Т- или П-образному звену удваиваются.

На рис. 10-4—10-7 показаны схемы фильтров нижних частот, верхних частот, полосовых и заграждающих (для Г-, Т- и П-образных звеньев).

Физическое действие таких фильтров легко объяснить тем, что на низких частотах индуктивные сопротивления малы, а емкостные велики; на высоких же частотах имеет

\* В расчетах коэффициент  $k$  выбирается из условия согласования сопротивления нагрузки с характеристическим сопротивлением фильтра при определенной частоте.



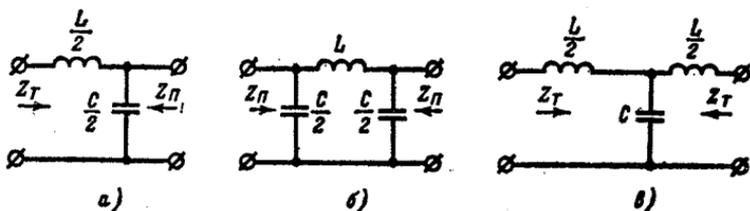


Рис. 10-4. Фильтр нижних частот типа  $k$ .

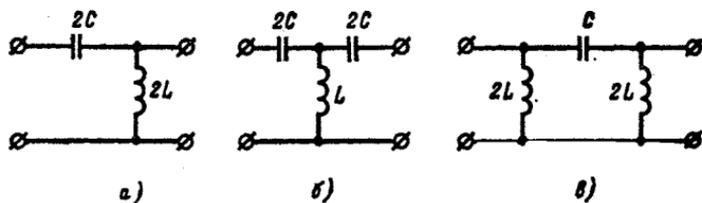


Рис. 10-5. Фильтр верхних частот типа  $k$ .

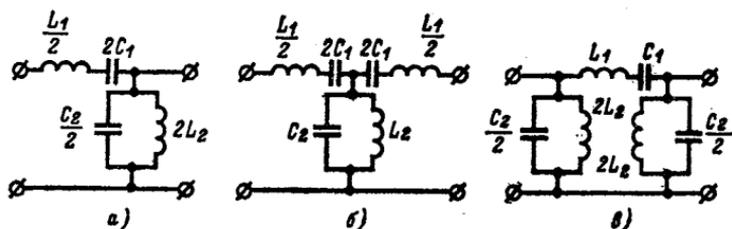


Рис. 10-6. Полосовой фильтр типа  $k$ .

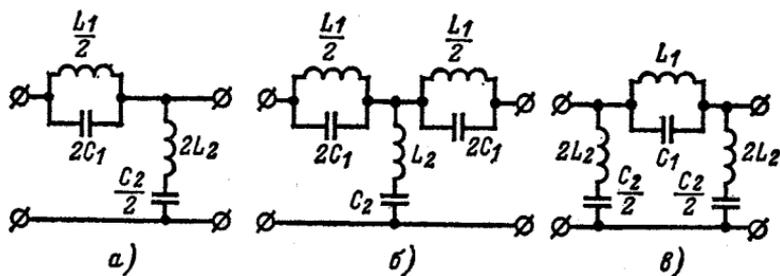


Рис. 10-7. Заграждающий фильтр типа  $k$ .

место обратное явление — индуктивные сопротивления велики, а емкостные малы. Поэтому например, в фильтре, нижних частот (см. рис. 10-4) токи нижних частот проходят через индуктивность в нагрузку, лишь в малой степени ответвляясь в емкость.

В области же верхних частот индуктивность представляет большое сопротивление и, кроме того, ток высокой частоты, прошедший через индуктивность, замыкается в основном через емкость, представляющую для него малое сопротивление.

Аналогичные рассуждения применимы и к фильтрам верхних частот (см. рис. 10-5), которые благодаря емкостному характеру сопротивления продольной ветви и индуктивному характеру сопротивления поперечной ветви обуславливают большое затухание на нижних частотах и малое затухание на верхних.

В свою очередь в полосовых и заграждающих фильтрах (рис. 10-6 и 10-7) проявляются частотные зависимости сопротивлений двухполюсников, состоящих из последовательно и параллельно соединенных индуктивностей и емкостей.

Частотные характеристики  $a$ ,  $b$ ,  $Z_T$  и  $Z_P$  рассматриваемых фильтров типа  $k$  изображены на рис. 10-8—10-11, а расчетные выражения основных характеристик и параметров фильтров сведены в табл. 10-1\* и 10-2.

Как видно из расчетных выражений и характеристик (рис. 10-8 и 10-9), в пределах полосы пропускания напряжение на входе симметричного фильтра, нагруженного согласованно, опережает напряжение на выходе ( $b > 0$  — фильтр нижних частот) или отстает от него ( $b < 0$  — фильтр верхних частот); в случае полосового фильтра (рис. 10-10) знак  $b$  изменяется в пределах полосы пропускания с минуса на плюс. В полосе задерживания симметричного фильтра коэффициент фазы  $b$  равен  $\pi$  (фильтр нижних частот) или  $-\pi$  (фильтр верхних частот); в случае симметричного полосового фильтра коэффициент фазы ниже полосы пропускания равен  $-\pi$ , а выше полосы пропускания — равен  $\pi$ .

---

\* Примечание к табл. 10-1,  $F = \frac{\frac{f}{f_m} - \frac{f_m}{f}}{\frac{f_2}{f_m} - \frac{f_m}{f_2}}$ , где  $f_m =$   
 $= \sqrt{f_1 f_2}$ .



## Основные характеристики фильтров

Характеристика	Фильтр нижних частот	Фильтр верхних частот	Полосовой фильтр	Заграждающий фильтр
Полоса пропускания $\sin \frac{b}{2}$ при $a=0$	$\frac{f}{f_c}$	$-\frac{f_c}{f}$	$F$	$-\frac{1}{F}$
Полоса задерживания $\operatorname{ch} \frac{a}{2}$ $b$	$\frac{f}{f_c} \pi$	$\frac{f_c}{f} - \pi$	$ F  - \pi$	$\frac{1}{ F } \pm \pi$
$Z_I$	$k \sqrt{1 + \left(\frac{jf}{f_c}\right)^2}$	$k \sqrt{1 + \left(\frac{f_c}{jf}\right)^2}$	$k \sqrt{1 + (jF)^2}$	$k \sqrt{1 + \frac{1}{(jF)^2}}$
$Z_{II}$	$\frac{k}{\sqrt{1 + \left(\frac{jf}{f_c}\right)^2}}$	$\frac{k}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_c}{jf}\right)^2}}$	$\frac{k}{\sqrt{1 + (jF)^2}}$	$\frac{k}{\sqrt{1 + \frac{1}{(jF)^2}}}$
$k$	$\sqrt{\frac{L}{C}}$	$\sqrt{\frac{L}{C}}$	$\sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}$	$\sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}$

## Расчетные параметры фильтра

Фильтр нижних частот	Фильтр верхних частот	Полосовой фильтр	Заграждающий фильтр
$L = \frac{k}{\pi f_c}$	$L = \frac{k}{4\pi f_c}$	$L_1 = \frac{k}{\pi(f_2 - f_1)}$ $L_2 = \frac{k(f_3 - f_1)}{4\pi f_1 f_2}$	$L_1 = \frac{k(f_2 - f_1)}{\pi f_1 f_2}$ $L_2 = \frac{k}{4\pi(f_2 - f_1)}$
$C = \frac{1}{\pi f_c k}$	$C = \frac{1}{4\pi f_c k}$	$C_1 = \frac{f_2 - f_1}{4\pi k f_1 f_2}$ $C_2 = \frac{1}{\pi k(f_2 - f_1)}$	$C_1 = \frac{1}{4\pi k(f_2 - f_1)}$ $C_2 = \frac{f_2 - f_1}{\pi k f_1 f_2}$
$f_c = \frac{1}{\pi \sqrt{LC}}$	$f_c = \frac{1}{4\pi \sqrt{LC}}$	$f_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \left[ \sqrt{\frac{1}{L_1 C_2} + \frac{1}{L_1 C_1}} \mp \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} \right]$	$f_{1,2} = \frac{1}{8\pi} \left[ \sqrt{\frac{1}{L_2 C_1} + \frac{16}{L_1 C_1}} \mp \frac{1}{\sqrt{L_2 C_1}} \right]$

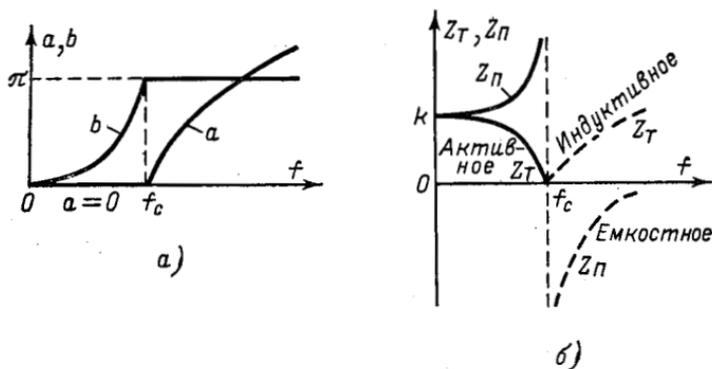


Рис. 10-8. Частотные характеристики фильтра нижних частот типа  $k$ .

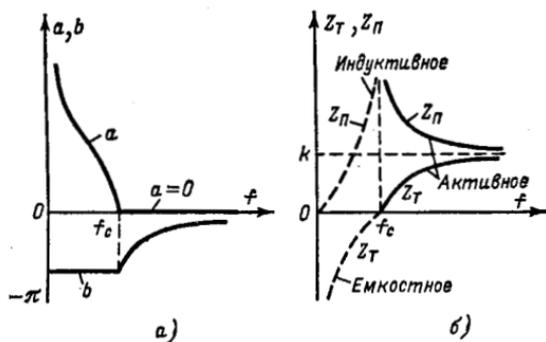


Рис. 10-9. Частотные характеристики фильтра верхних частот типа  $k$ .

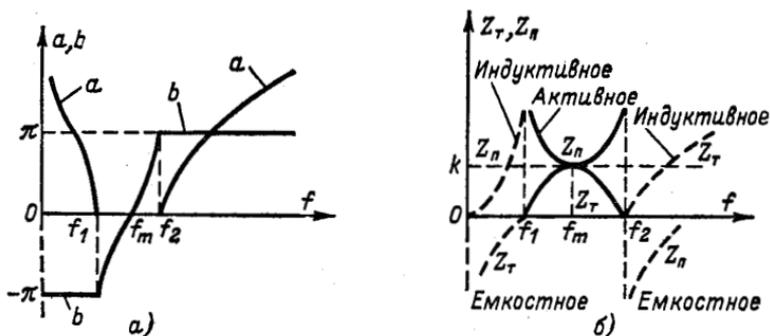


Рис. 10-10. Частотные характеристики полосового фильтра типа  $k$ .

Выше отмечалось что коэффициент фазы Г-образного фильтра равен  $b/2$ , и поэтому в полосе задерживания он равен  $\pi/2$  или  $-\pi/2$  в зависимости от типа фильтра.

Если Г-образный фильтр нагружен согласованно, то угол фазового сдвига между напряжениями на входе и выходе составляет  $\frac{1}{2}(b + \varphi_{1c} - \varphi_{2c})$ , где  $\varphi_{1c}$  и  $\varphi_{2c}$  — углы характеристических сопротивлений рассматриваемого Г-образного фильтра (см. § 9-7).

В полосе задерживания характеристические сопротивления мнимые, разного знака и соответственно разность

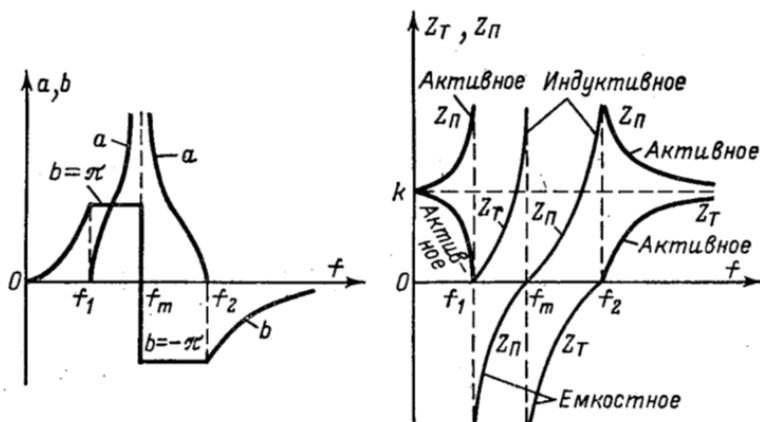


Рис. 10-11. Частотные характеристики заграждающего фильтра типа  $k$ .

углов  $\varphi_{1c} - \varphi_{2c}$  составляет  $\pi$  или  $-\pi$ . В этом случае угол между входным и выходным напряжениями Г-образного фильтра, нагруженного согласованно, с учетом того, что в полосе затухания  $b/2 = \pm \pi/2$ , получается равным  $\pm \pi$ . Это соответствует физическим представлениям о фазовых сдвигах в реактивных цепях, поскольку в полосе задерживания нагрузка фильтра предполагается также реактивной.

Следует заметить, что если, например, Г-образный фильтр нижних частот согласованно нагружен со стороны выхода, имеющего характеристическое сопротивление  $Z_P$ , то в полосе пропускания нагрузка фильтра, равная  $Z_P$ , активна.

Можно показать, что в результате параллельного соединения активного сопротивления нагрузки ( $Z_P$ ) с емкостным сопротивлением поперечной ветви Г-образного звена ( $2Z_2$ ) получится активно-емкостное сопротивление, емкост-

ная составляющая которого компенсирует индуктивное сопротивление продольной ветви ( $Z_1/2$ ). В результате останется только активная составляющая, равная характеристическому сопротивлению  $Z_T$  при данной частоте  $f$ .

Для определения знака характеристического сопротивления фильтра в полосе задерживания ( $+j$  или  $-j$ ) удобно пользоваться формулами табл. 10-1, в которых под корнем сохранен множитель  $j$ . В полосе задерживания слагаемое, содержащее множитель  $j$ , больше единицы; поэтому при отбрасывании слагаемого 1 под корнем остается выражение с множителем  $j$  в числителе или знаменателе в зависимости от типа фильтра и от того, рассматривается ли  $Z_T$  или  $Z_{\Pi}$ .

Преимуществом фильтров типа  $k$  является их простота, а также то, что в полосе задерживания затухания по мере удаления частоты от частоты среза неуклонно возрастает.

Что касается недостатков фильтров типа  $k$ , то они в основном заключаются в следующем:

1. Характеристические сопротивления  $Z_T$  и  $Z_{\Pi}$  в полосе пропускания фильтра очень резко изменяются в зависимости от частоты, вследствие чего согласовать нагрузку с фильтром удастся только в ограниченной части полосы пропускания.

2. Кривая затухания вблизи частоты среза имеет недостаточную крутизну, вследствие чего не обеспечивается четкое разделение частот.

Для увеличения крутизны кривой затухания приходится применять многозвенный фильтр.

#### 10-4. ФИЛЬТРЫ ТИПА $m$

В целях наилучшего согласования нагрузки с фильтром необходимо, чтобы характеристическое сопротивление фильтра было по возможности постоянным в полосе пропускаемых частот. В связи с этим попытаемся изменить продольную или поперечную ветвь  $\Gamma$ -образного звена типа  $k$  таким образом, чтобы получилось новое  $\Gamma$ -образное звено с характеристическим сопротивлением, мало меняющимся в зависимости от частоты в полосе пропускания. Второе характеристическое сопротивление этого звена должно быть равно характеристическому сопротивлению исходного звена типа  $k$  (именуемого «прототипом»).

Равенство характеристических сопротивлений нового фильтра (так называемого фильтра типа  $m$ ) и прототипа



позволяет включать их согласованно и образовывать, таким образом, комбинированные фильтры, сочетающие в себе преимущества фильтров обоих типов. Ввиду того что Г-образный прототип имеет два характеристических сопротивления, в данном случае возможны два варианта:

1. Одинаковыми остаются характеристические сопротивления  $Z_T$  (рис. 10-12). Полученное при этом звено  $m$  носит название последовательно-производного.

2. Одинаковыми остаются характеристические сопротивления  $Z_{\Pi}$  (рис. 10-13). В этом случае звено  $m$  носит название параллельно-производного.

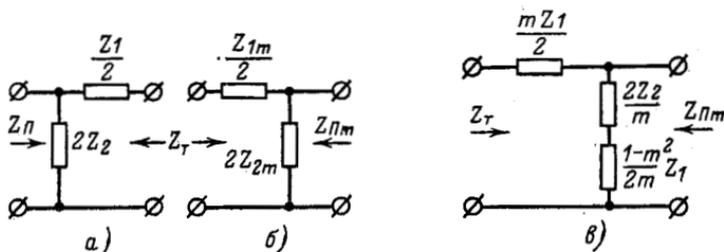


Рис. 10-12. Образование последовательно-производного звена типа  $m$ .

Рассмотрим первый вариант. Из условия равенства характеристических сопротивлений  $Z_T$  звеньев, изображенных на рис. 10-12,  $a$  и  $b$ , следует:

$$Z_T = \sqrt{Z_1 Z_2 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right)} = \sqrt{Z_{1m} Z_{2m} \left(1 + \frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}}\right)}. \quad (10-22)$$

Пусть

$$Z_{1m} = mZ_1, \quad (10-23)$$

причем

$$1 \geq m \geq 0. \quad (10-24)$$

Подстановка (10-23) в (10-22) и решение полученного уравнения относительно  $2Z_{2m}$  дают:

$$2Z_{2m} = \frac{2Z_2}{m} + \frac{Z_1}{2} \frac{1-m^2}{m}. \quad (10-25)$$

Из этого выражения видно, что поперечное плечо последовательно-производного Г-образного звена типа  $m$  состоит из двух последовательно включенных сопротивлений  $2Z_2/m$  и  $\frac{(1-m^2)Z_1}{2m}$  (см. рис. 10-12,  $e$ ).

Рассмотрим теперь второй вариант. Исходя из условия равенства характеристических сопротивлений применительно к рис. 10-13, а и б, имеем:

$$Z_{\Pi} = \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}} = \sqrt{\frac{Z_{1m} Z_{2m}}{1 + \frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}}}}. \quad (10-26)$$

Пусть

$$Z_{2m} = \frac{Z_2}{m}, \quad (10-27)$$

причем сохраняется условие (10-24).

После подстановки (10-27) в (10-26) решение уравнения относительно  $2/Z_{1m}$  дает:

$$\frac{2}{Z_{1m}} = \frac{2}{mZ_1} + \frac{1}{Z_2} \frac{1-m^2}{2m}. \quad (10-28)$$

Значит, продольное плечо параллельно-производного Г-образного звена типа  $m$  состоит из сопротивлений  $mZ_1/2$  и  $\frac{2mZ_2}{1-m^2}$ , соединенных параллельно (рис. 10-13, в).

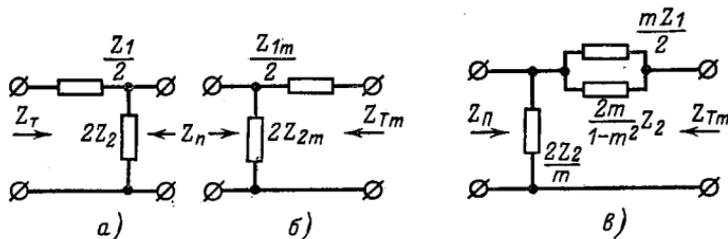


Рис. 10-13. Образование параллельно-производного звена типа  $m$ .

В соответствии с (10-25) и (10-28) могут быть найдены выражения характеристических сопротивлений  $Z_{Tm}$  (рис. 10-13) и  $Z_{\Pi m}$  (см. рис. 10-12):

$$Z_{Tm} = Z_T \frac{1}{1 + (1-m^2) \frac{Z_1}{4Z_2}}; \quad (10-29)$$

$$Z_{\Pi m} = Z_{\Pi} \left[ 1 + (1-m^2) \frac{Z_1}{4Z_2} \right]. \quad (10-30)$$

Очевидным является соотношение

$$Z_{Tm} Z_{\Pi m} = Z_T Z_{\Pi} = k^2. \quad (10-31)$$

Полосы пропускания фильтров типа  $k$  и полученных из них фильтров типа  $m$  совпадают. Действительно, на основа-

нии (10-23) и (10-25) можно получить:

$$\frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}} = \frac{mZ_1}{4\left(\frac{Z_2}{m} + \frac{Z_1}{4} \frac{1-m^2}{m}\right)} = \frac{m^2}{\frac{4Z_2}{Z_1} + 1 - m^2}; \quad (10-32)$$

то же самое выражение получается на основании (10-27) и (10-28) для другого варианта фильтра типа  $m$ . Подставляя в (10-32) условия (10-13), отвечающие предельным частотам фильтра типа  $k$ , получаем при  $Z_1 = 0$  и  $Z_1 = -4Z_2$ :

$$\frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}} = 0; \quad \frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}} = -1. \quad (10-33)$$

Эти условия соответствуют предельным частотам фильтра типа  $m$  (имеющего последовательно- или параллельно-производное звено).

Следовательно, частоты среза для обоих типов фильтров совпадают.

О совпадении полос пропускания прототипа и производных от него звеньев можно также судить на основании равенства характеристических сопротивлений (в полосе пропускания характеристические сопротивления имеют действительные значения).

В полосе задерживания в соответствии с общей формулой (10-11)

$$\operatorname{ch} \frac{a}{2} = \sqrt{\left| \frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}} \right|} = \frac{m}{\sqrt{\left| \frac{4Z_2}{Z_1} + 1 - m^2 \right|}}. \quad (10-34)$$

Затухание обращается в бесконечность при частоте  $f_\infty$ , при которой  $\frac{4Z_2}{Z_1} + 1 - m^2 = 0$ , или, что то же

$$\frac{Z_1}{4Z_2} = -\frac{1}{1-m^2}.$$

При этом условии  $Z_{2m}$ , выражаемое формулой (10-25), обращается в нуль. Это означает, что при  $f_\infty$  наступает резонанс напряжений в поперечной ветви (в случае последовательно-производного звена). При этом же условии  $Z_{1m}$ , выражаемое формулой (10-28), обращается в бесконечность, что означает резонанс токов в продольной ветви (в случае параллельно-производного звена.) Частота  $f_\infty$  называется частотой бесконечно большого затухания.

При переходе частоты через значение  $f_\infty$ , т. е. в области частот  $f > f_\infty$  (когда  $f_\infty > f_c$ ) или  $f < f_\infty$  (когда  $f_\infty > f_c$ ),



сопротивления обоих плеч фильтра  $Z_{1m}$  и  $Z_{2m}$  имеют одинаковый знак. В этом случае в соответствии с § 10-2 в левой части формулы (10-34) гиперболический косинус должен быть заменен гиперболическим синусом.

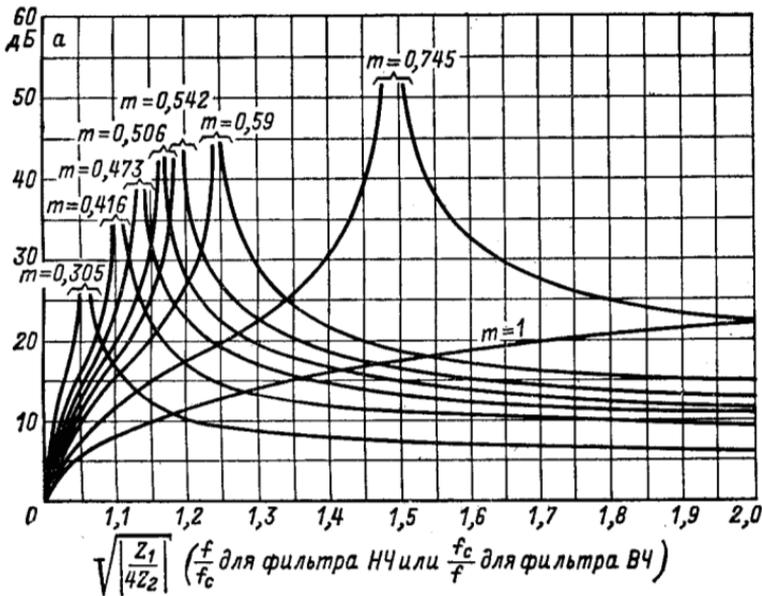


Рис. 10-14. Кривые затухания фильтра типа  $m$ .

При  $4Z_2/Z_1$ , стремящемся к нулю,

$$\operatorname{sh} \frac{a}{2} \rightarrow \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}. \quad (10-35)$$

На рис. 10-14 показано семейство кривых собственного затухания  $a$  фильтра типа  $m$  (при разных значениях  $m$ ) в функции  $\sqrt{\left| \frac{Z_1}{4Z_2} \right|}$ . При  $m = 1$  кривая затухания обращается в характеристику фильтра типа  $k$ .

Чем меньше коэффициент  $m$ , тем меньше значение  $f_\infty$ , т. е. тем круче кривая затухания  $a$ . Однако, как видно из рис. 10-14, предельное значение  $a$  при  $\frac{Z_1}{4Z_2} \rightarrow \infty$  уменьшается по мере снижения  $m$ .

Наряду с большой крутизной кривой затухания фильтры типа  $m$  отличаются от фильтров типа  $k$  относительно большим постоянством характеристических сопротивлений



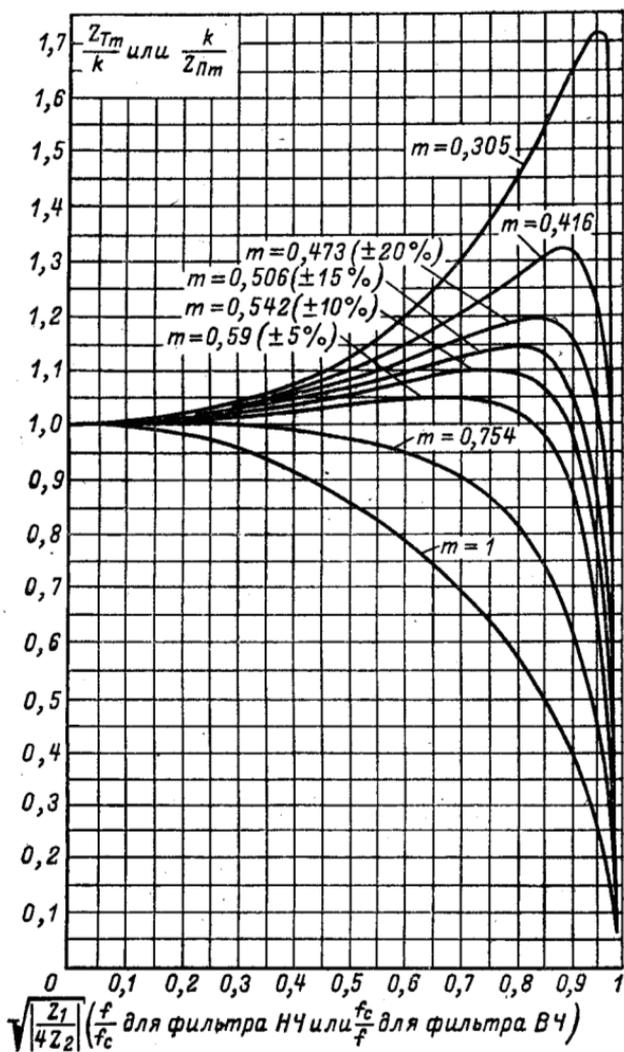


Рис. 10-15. Характеристическое сопротивление фильтра типа  $m$ ,

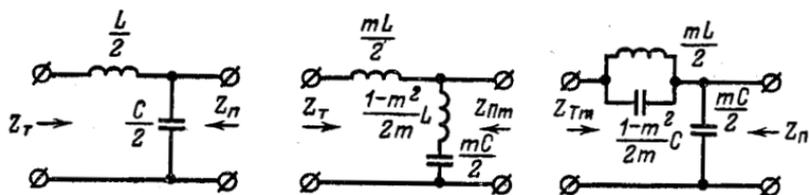


Рис. 10-16. Фильтр нижних частот типа  $m$ .

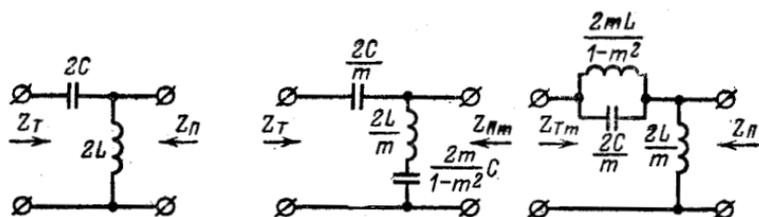


Рис. 10-17. Фильтр верхних частот типа  $m$ .

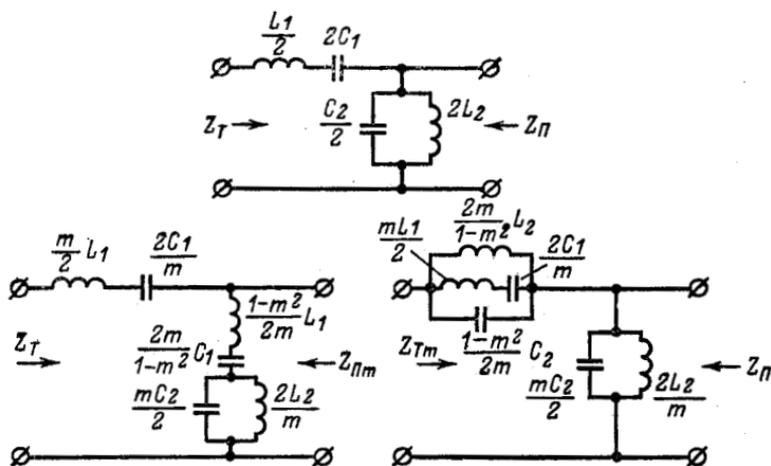


Рис. 10-18. Полосовой фильтр типа  $m$ .

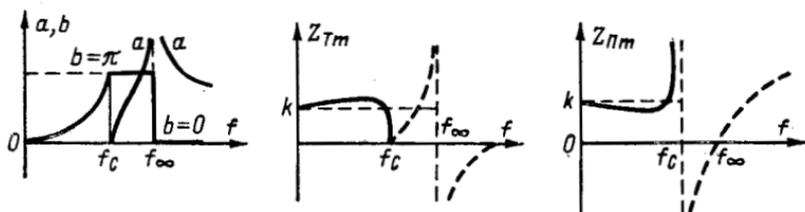


Рис. 10-19. Частотные характеристики фильтра нижних частот типа  $m$ .

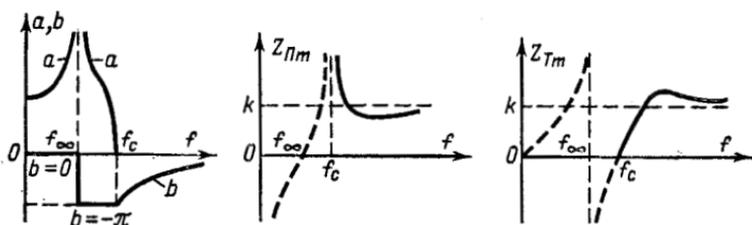


Рис. 10-20. Частотные характеристики фильтра верхних частот типа  $m$ .

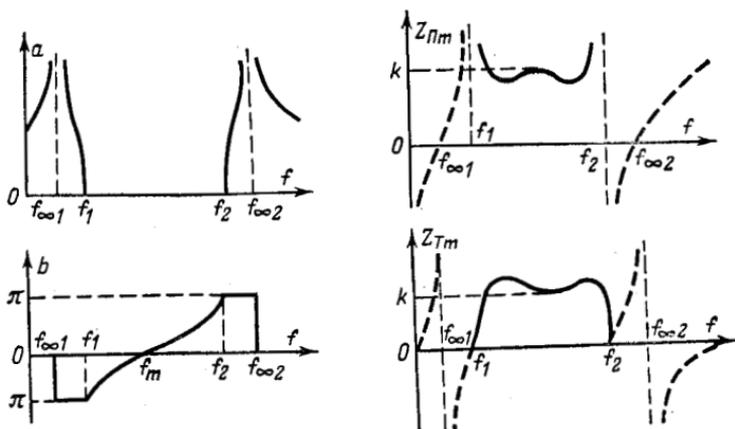


Рис. 10-21. Частотные характеристики полосового фильтра типа  $m$ .

$Z_{Tm}$  или  $Z_{\Pi m}$  (по сравнению с частотными характеристиками  $Z_T$  и  $Z_{\Pi}$ ).

На рис. 10-15 изображены кривые  $Z_{Tm}/k$  и соответственно  $k/Z_{\Pi m}$  в зависимости от величины  $\sqrt{\left|\frac{Z_1}{4Z_2}\right|}$ , равной  $f/f_c$  для фильтров нижних частот и  $f_c/f$  для фильтров верхних частот.

В спектре частот, соответствующем  $\sqrt{\left|\frac{Z_1}{4Z_2}\right|} = 0 \div 0,9$ , характеристические сопротивления  $Z_{Tm}$  и  $Z_{\Pi m}$  отклоняются от  $k$  на  $\pm 5\%$  при  $m = 0,59$  и на  $\pm 10\%$  при  $m = 0,54$ .

Типовые схемы Г-образных звеньев фильтров нижних частот, верхних частот и полосовых фильтров типов  $k$  и  $m$

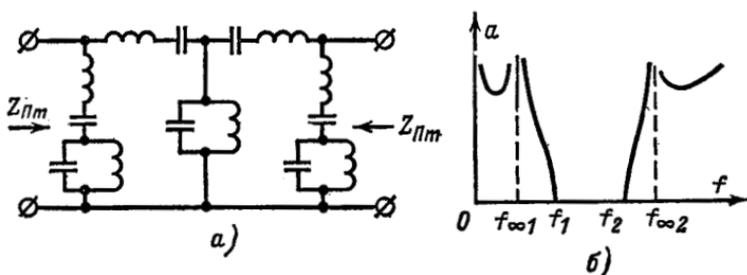


Рис. 10-22. Комбинированный фильтр.  
а — схема; б — характеристика затухания.

приведены на рис. 10-16—10-18; частотные характеристики фильтров типа  $m$  показаны на рис. 10-19—10-21.

Как видно из частотных характеристик, фильтры типа  $m$  имеют более постоянное характеристическое сопротивление в полосе пропускания, чем фильтры типа  $k$ . Кроме того, они обладают большей крутизной кривой затухания.

Недостатком фильтров типа  $m$  является снижение затухания при  $f < f_{\infty}$  (фильтры верхних частот и полосовые) и  $f > f_{\infty}$  (фильтры нижних частот и полосовые).

Соединяя последовательно звенья типов  $k$  и  $m$ , можно достигнуть некоторого постоянства характеристических сопротивлений и крутизны кривой затухания при одновременном сохранении необходимого затухания ниже или выше частоты бесконечно большого затухания. На рис. 10-22, а в виде примера показан полосовой фильтр, состоящий из Т-образного фильтра типа  $k$  (в середине) и двух Г-образных звеньев типа  $m$  (по концам). На рис. 10-22, б изображена характеристика затухания такого фильтра.

## 10-5. ИНДУКТИВНО СВЯЗАННЫЕ КОНТУРЫ КАК ФИЛЬТРУЮЩАЯ СИСТЕМА

Индуктивно связанные контуры при соответствующем подборе параметров представляют собой полосовой фильтр, пропускающий заданную полосу частот.

Положим, что в первичную и вторичную цепи трансформатора включены емкости  $C$  (рис. 10-23, а).

Индуктивности обмоток трансформатора примем равными  $L$ ; коэффициент индуктивной связи обозначим через  $k_0$ .

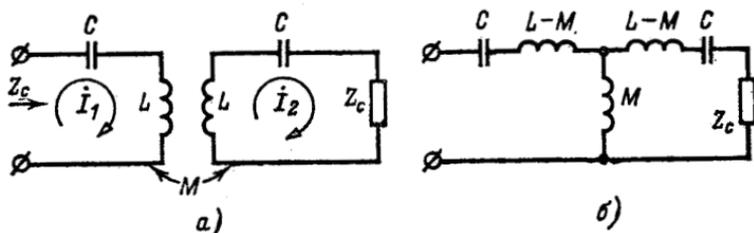


Рис. 10-23. Фильтрующая система.

а — индуктивно связанные резонансные контуры; б — схема замещения.

Трансформатор с емкостями  $C$  представляет собой симметричный четырехполюсник, эквивалентная схема которого показана на рис. 10-23, б. Выше мы уже встречались с аналогичной схемой полосового фильтра (см. рис. 10-2). Исследуем теперь более подробно фильтрующие свойства рассматриваемого четырехполюсника в предположении, что он нагружен согласованно. Его характеристическое сопротивление может быть вычислено по формуле (10-14), куда следует подставить:

$$Z_1 = j2 \left[ \omega(L - M) - \frac{1}{\omega C} \right]; \quad Z_2 = j\omega M.$$

После преобразования получим:

$$Z_c = \frac{1}{\omega C} \sqrt{-[\omega^2 C(L + M) - 1][\omega^2 C(L - M) - 1]}.$$

Приняв  $\omega_0^2 = 1/LC$  и введя коэффициент индуктивной связи  $k_0 = M/L$ , получим окончательно:

$$Z_c = \frac{1}{\omega C} \sqrt{-\left[ \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 (1 + k_0) - 1 \right] \left[ \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 (1 - k_0) - 1 \right]}.$$

Характеристическое сопротивление  $Z_c$  действительно при условии, что выражения в квадратных скобках имеют

разные знаки, а именно:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2(1+k_0)-1 > 0; \quad \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2(1-k_0)-1 < 0,$$

откуда

$$\frac{\omega_0}{\sqrt{1+k_0}} < \omega < \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k_0}}; \quad \omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k_0}}; \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k_0}};$$

$\omega_1$  и  $\omega_2$  представляют собой частоты среза данного полосового фильтра.

В области частот ниже  $\omega_1$  характеристическое сопротивление фильтра емкостное и с уменьшением частоты приближается к  $-j/2\omega C$ .

В области частот выше  $\omega_2$  характеристическое со-

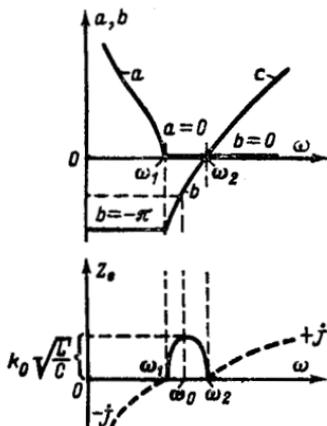


Рис. 10-24. Частотные характеристики индуктивно связанных резонансных контуров,

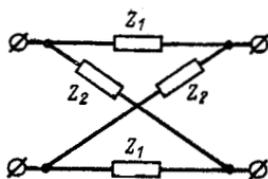


Рис. 10-25. Мостовой фильтр.

противление фильтра индуктивное и с увеличением частоты приближается к  $j\omega L\sqrt{1-k_0^2}$ .

При частоте

$$\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC},$$

$$Z_1 = -j2\omega_0 M$$

и

$$Z_c = \omega_0 M = \frac{M}{\sqrt{LC}} = \frac{k_0 L}{\sqrt{LC}} = k_0 \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

На рис. 10-24 показаны частотные характеристики данного фильтра.

## 10-6. МОСТОВЫЕ ФИЛЬТРЫ. ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ РЕЗОНАТОРЫ

Согласно § 9-15 [формулы (9-50)] характеристическое сопротивление и мера передачи симметричного мостового фильтра (рис. 10-25) находятся по формулам:

$$\left. \begin{aligned} Z_m &= \sqrt{Z_1 Z_2}; \\ \operatorname{th} \frac{g}{2} &= \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}. \end{aligned} \right\} \quad (10-36)$$

Полоса пропускания фильтра ( $a = 0$ ) имеет место при мнимых значениях корня  $\sqrt{Z_1/Z_2}$  и действительных значениях корня  $\sqrt{Z_1 Z_2}$ . При этом  $Z_1$  и  $Z_2$  имеют разные знаки.

Коэффициент фазы определяется в этом случае по формуле

$$\operatorname{tg} \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right|}. \quad (10-37)$$

В полосе задерживания  $Z_1$  и  $Z_2$  имеют одинаковые знаки. В этой полосе возможны два случая:

$$b = 0 \quad \text{или} \quad b = \pm \pi.$$

В первом случае

$$\operatorname{th} \frac{g}{2} = \operatorname{th} \frac{a}{2} = \sqrt{\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right|}.$$

Это решение соответствует условию  $|Z_1| < |Z_2|$ , так как гиперболический тангенс не может превышать единицу. Во втором случае

$$\operatorname{th} \frac{g}{2} = \operatorname{cth} \frac{a}{2} = \sqrt{\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right|}.$$

Данное решение соответствует условию  $|Z_1| > |Z_2|$ , так как гиперболический котангенс не может быть меньше единицы.

При  $Z_1 = Z_2$  затухание  $a = \infty$ , так как при этом  $\operatorname{th} \frac{a}{2} = 1$  и напряжение на выходе мостовой схемы равно нулю. Физически это объясняется тем, что мост уравновешен.

На рис. 10-26 показаны простейшие схемы мостовых фильтров: нижних частот, верхних частот, полосового и заграждающего.

Основываясь на том, что в полосе пропускания  $Z_1$  и  $Z_2$  имеют разные знаки, а в точке пересечения кривых



$Z_1$  и  $Z_2$ , т. е. при  $Z_1 = Z_2 a = \infty$ , можно легко найти частоты среза и бесконечно большого затухания. В виде примера

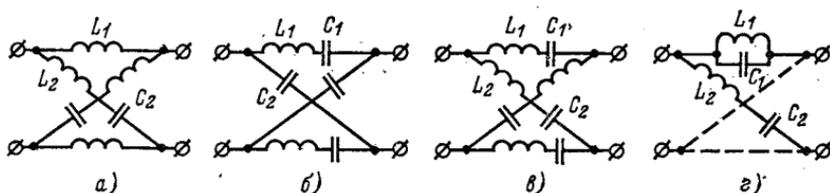


Рис. 10-26. Мостовой фильтр нижних частот (а), верхних частот (б), полосовой (в) и заграждающий (г).

это показано применительно к фильтру нижних частот на рис. 10-27. При отсутствии пересечения кривых  $Z_1$  и  $Z_2$  частота бесконечно большого затухания или удалена в бесконечность (при асимптотическом приближении  $Z_1$  к  $Z_2$ ).

На практике применяются также мостовые схемы с дифференциальным трансформатором (дифференциально-мостовые схемы), эквивалентные по своим электрическим качествам мостовым схемам, но имеющие меньшее число элементов (рис. 10-28).

Следует заметить, что в соответствии с (10-36)  $Z_m$  зависит от произведения, а  $g$  — от отношения сопротивлений плеч мостового фильтра. Поэтому характеристические параметры  $Z_m$  и  $g$  мостового фильтра не связаны друг с другом в той мере, как это, например, имеет место в Т- и П-образных фильтрах (см. задачу 10-16) и, следовательно,  $Z_m$  и  $g$  могут выбираться независимо друг от друга. Это свойство является одним из преимуществ мостовых фильтров по сравнению с другими.

Мостовые фильтры часто выполняются с помощью пьезоэлектрических резонаторов. Последние представляют собой электромеханическую систему, состоящую из пьезоэлектрической пластинки<sup>1</sup>, электродов и держателя. Пьезоэлектрическая пластинка под воздействием переменного электрического поля совершает механические колебания с частотой приложенного напряжения. При этом на ее поверхностях возникают электрические заряды. При совпадении частоты поля с частотой собственных колебаний пластинки наступает резонанс: амплитуда колебаний и соответственно заряд на пластинке достигают максимума.

<sup>1</sup> В технике связи применяются преимущественно кварцевые пластинки.

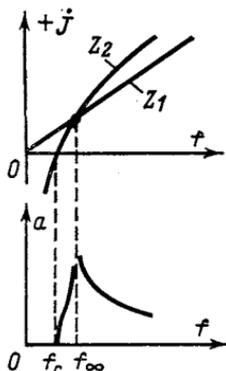


Рис. 10-27. Нахождение частот среза и бесконечно большого затухания мостового фильтра.

Эквивалентная электрическая схема пьезоэлектрического резонатора представляет собой двухполюсник (рис. 10-29, а). Частотная характеристика реактивного сопротивления резонатора изображена на рис. 10-29, б,

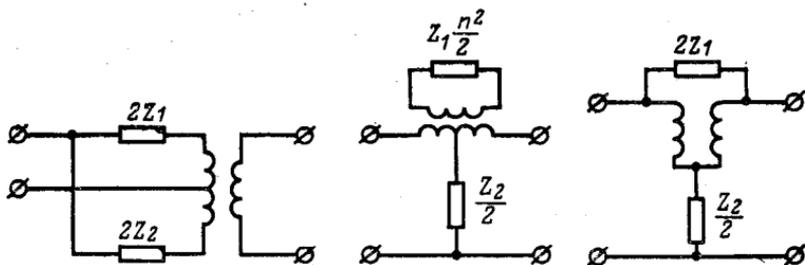


Рис. 10-28. Дифференциально-мостовые схемы.

В отличие от индуктивных катушек, добротность которых в лучшем случае измеряется сотнями единиц, добротность пьезоэлектрических резонаторов достигает десятков тысяч.

С помощью таких резонаторов удастся получить полосовые фильтры с весьма узкой полосой пропускания и высокой крутизной кривой за-

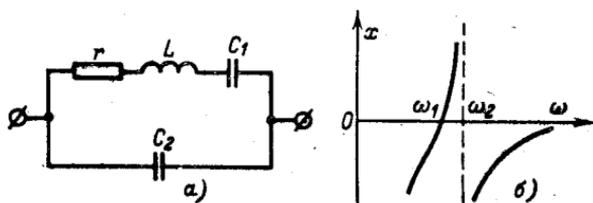


Рис. 10-29. Пьезоэлектрический резонатор.

а — эквивалентная схема; б — частотная характеристика реактивного элемента.

тухания вблизи частот среза (кварцевые мостовые фильтры допускают полосу пропускания порядка 20—50 Гц при частоте 500 кГц).

Емкость  $C_2$ , входящая в систему замещения пьезоэлектрического резонатора (рис. 10-29, а), значительно превышает емкость  $C$ ; поэтому частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (рис. 10-29, б) располагаются весьма близко друг к другу.

## 10-7. БЕЗЫНДУКТИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ

Изготовление индуктивных катушек для фильтров, работающих в области низких частот, сопряжено с трудностями, особенно когда катушки должны иметь большую индуктивность при высоком коэффициенте добротности. Увеличение сечения обмотки повышает массу, размеры и стоимость катушки, применение же магнитопровода создает зависимость индуктивности от тока, проходящего по обмотке.

Применение пьезокварцевых резонаторов для фильтров низких частот также не всегда возможно, так как самая низкая частота, на которую изготавливается кварц, составляет несколько сотен герц.

Во избежание получения громоздких фильтров с низкой добротностью катушек применяют безындуктивные фильтры ( $rC$ -фильтры), состоящие из активных сопротивлений и емкостей.

На рис. 10-30 показан  $rC$ -фильтр нижних частот. При низких частотах, когда емкостное сопротивление велико, напряжение на выходе фильтра немногим меньше напряжения на его входе и, следовательно, затухание мало. С повышением частоты емкостное сопротивление убывает, напряжение на выходе уменьшается и, следовательно, затухание возрастает.

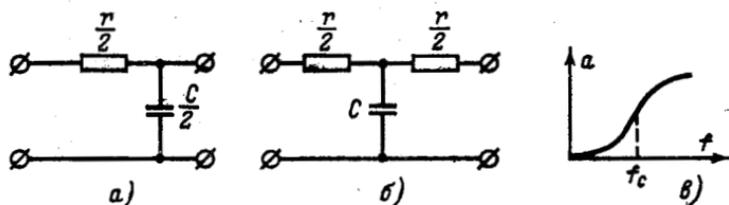


Рис. 10-30.  $rC$ -фильтр нижних частот.

На рис. 10-30, *в* показана частотная характеристика собственного затухания такого фильтра. Ввиду малой крутизны кривой затухания однозвенного  $rC$ -фильтра применяют двух- или трехзвенный фильтр, однако при этом увеличивается затухание и в полосе пропускания.

На основании (10-1)

$$\operatorname{ch} g = \operatorname{ch} (a + jb) = \operatorname{ch} a \cos b + j \operatorname{sh} a \sin b = 1 + j \frac{\omega r C}{2},$$

откуда

$$\operatorname{ch} a \cos b = 1; \quad \operatorname{sh} a \sin b = \frac{\omega r C}{2}. \quad (10-38)$$

При постоянном токе ( $\omega = 0$ )

$$\operatorname{ch} a \cos b = 1; \quad \operatorname{sh} a \sin b = 0. \quad (10-39)$$

Эти равенства удовлетворяются при  $a = 0$  и  $b = 0$  одновременно.

При  $\omega > 0$   $\frac{\omega r C}{2} > 0$  и  $\sin b > 0$ , так как  $\operatorname{sh} a > 0$ .

Итак, в отличие от реактивных фильтров, рассмотренных в предыдущих параграфах,  $rC$ -фильтр не имеет области частот, в пределах которой собственное затухание  $a$  равно нулю.

Частотные характеристики  $rC$ -фильтра нижних частот могут быть построены по выражениям для  $a$  и  $b$ , которые получаются в результате совместного решения уравнений (10-38), первое из которых можно представить в следующем виде:

$$(1 + \operatorname{sh}^2 a)(1 - \sin^2 b) = 1.$$

Подставляя сюда выражение для  $\sin b$ , получаемое из второго уравнения (10-38), приходим к биквадратному уравнению

$$\operatorname{sh}^4 a - \left(\frac{\omega r C}{2}\right)^2 \operatorname{sh}^2 a - \left(\frac{\omega r C}{2}\right)^2 = 0,$$



откуда

$$\operatorname{sh} a = \sqrt{\frac{(\omega r C)^2}{8} + \frac{\omega r C}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega r C}{4}\right)^2}. \quad (10-40)$$

При значениях  $\omega$ , при которых  $\frac{\omega r C}{2} \ll 1$ ,

$$\operatorname{sh} a \approx a \approx \sqrt{\frac{\omega r C}{2}}.$$

За частоту среза  $rC$ -фильтра нижних частот условно принимается частота, при которой равны активное и емкостное сопротивления ветвей Г-образного звена, т. е.

$$\frac{r}{2} = \frac{2}{\omega_c C} \quad \text{или} \quad \frac{\omega_c r C}{4} = 1.$$

В этом случае выражение (10-40) дает  $\operatorname{sh} a = 2,2$ , откуда  $a = 13,3$  дБ.

На рис. 10-31 представлен  $rC$ -фильтр верхних частот с примерной частотной характеристикой затухания.

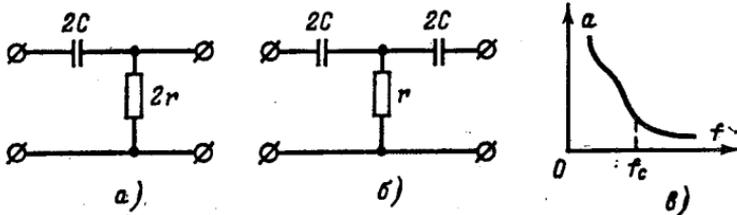


Рис. 10-31.  $rC$ -фильтр верхних частот.

При низких частотах, когда емкостное сопротивление велико, напряжение на выходе фильтра мало, т. е. получается большое затухание (при постоянном токе — бесконечно большое). С увеличением частоты емкостное сопротивление уменьшается и напряжение на выходе возрастает, т. е. затухание убывает. Частотная характеристика собственного затухания такого фильтра показана на рис. 10-31, в.

Для повышения крутизны кривой затухания применяются несколько звеньев, однако при этом неизбежно увеличивается затухание и в полосе пропускания.

Пользуясь формулой (10-1), получаем в рассматриваемом случае:

$$\operatorname{ch} a \cos b = 1; \quad \operatorname{sh} a \sin b = -\frac{1}{2r\omega C}. \quad (10-41)$$

При бесконечно большой частоте ( $\omega = \infty$ ) получаются условия (10-39), которые, как было установлено выше, выполняются, если одновременно  $a$  и  $b$  равны нулю.

При значениях  $0 < \omega < \infty$   $\operatorname{sh} a \sin b < 0$ ; поскольку  $a > 0, b < 0$ .

Совместное решение уравнений (10-41) приводит к биквадратному уравнению

$$\operatorname{sh}^4 a - \frac{1}{(2\omega r C)^2} \operatorname{sh}^2 a - \frac{1}{(2\omega r C)^2} = 0,$$



откуда

$$\operatorname{sh} a = \sqrt{\frac{1}{8(\omega r C)^2} + \frac{1}{2\omega r C}} \sqrt{1 + \frac{1}{(4\omega r C)^2}}. \quad (10-42)$$

При значениях  $\omega$ , при которых  $\frac{1}{2\omega r C} \ll 1$ ,

$$\operatorname{sh} a \approx a \approx \sqrt{\frac{1}{2\omega r C}}.$$

Если за частоту среза условно принять частоту, при которой сопротивления ветвей  $\Gamma$ -образного звена равны друг другу,

$$2r = \frac{1}{2\omega_c C} \quad \text{или} \quad \frac{1}{4\omega_c r C} = 1,$$

то на основании (10-42) будем иметь:

$$\operatorname{sh} a = 2,2; \quad a \approx 1,53 \text{ Нп.}$$

Простейшие схемы полосового и заграждающего  $rC$ -фильтров и примерные частотные характеристики затухания приведены на рис. 10-32 и 10-33.

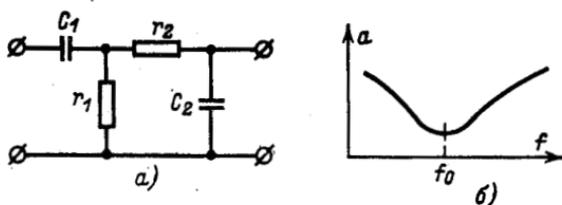


Рис. 10-32. Полосовой  $rC$ -фильтр.

Полосовой  $rC$ -фильтр основан на том, что емкость первого звена обуславливает затухание более низких частот, а емкость второго звена — затухание более высоких частот. Средняя частота полосы пропускания, при которой собственное затухание фильтра минимально (рис. 10-32, б), ориентировочно равна:

$$f_0 \approx \frac{1}{2\pi \sqrt{r_1 r_2 C_1 C_2}}.$$

При  $r_1 = r_2 = r$  и  $C_1 = C_2 = C$

$$f_0 \approx \frac{1}{2\pi r C}.$$

Как видно из рис. 10-33, а, заграждающий  $rC$ -фильтр состоит из двух параллельно соединенных  $T$ -образных  $rC$ -фильтров верхних и нижних частот. Соответствующим подбором параметров элементов можно добиться того, что при определенной частоте токи на выходе обеих  $T$ -образных схем будут равны и противоположны по знаку,



вследствие чего ток в нагрузке будет равен нулю. Следовательно, затухание на этой частоте будет бесконечно большим (рис. 10-33, б).

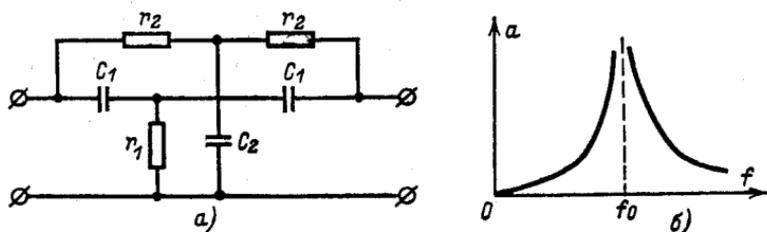


Рис. 10-33. Заграждающий  $rC$ -фильтр.

$rC$ -фильтры часто применяются в сочетании с усилителем. В этом случае в полосе пропускания не только отсутствует затухание, но, наоборот, имеет место усиление.

### 10-8. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ НАХОЖДЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ И АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДОПОЛНЕНИЙ

При анализе линейных электрических цепей используют два основных топологических метода — метод деревьев (или топологических формул) и метод сигнальных графов.

Расчет электрических цепей по методу узловых напряжений требует согласно формуле (7-6) вычисления определителя системы и его алгебраических дополнений. Эта задача может быть облегчена, если применить метод деревьев.

Определитель системы по методу узловых напряжений для цепи на рис. 7-8:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} (Y_1 + Y_2 + Y_6) & -Y_2 & -Y_6 \\ -Y_2 & (Y_2 + Y_3 + Y_5) & -Y_3 \\ -Y_6 & -Y_3 & (Y_3 + Y_4 + Y_6) \end{vmatrix}.$$

Раскрыв определитель, получаем выражение, содержащее алгебраическую сумму 38 произведений проводимостей ветвей. После приведения подобных членов в выражении останется только 16 членов. 22 члена взаимно уничтожаются и получаем:

$$\begin{aligned} \Delta_y = & Y_1 Y_2 Y_3 + Y_1 Y_2 Y_4 + Y_1 Y_2 Y_6 + Y_1 Y_3 Y_4 + \\ & + Y_1 Y_3 Y_5 + Y_1 Y_3 Y_6 + Y_1 Y_4 Y_5 + Y_1 Y_5 Y_6 + \\ & + Y_2 Y_3 Y_4 + Y_2 Y_3 Y_5 + Y_2 Y_4 Y_5 + Y_2 Y_4 Y_6 + \\ & + Y_2 Y_5 Y_6 + Y_3 Y_4 Y_6 + Y_3 Y_5 Y_6 + Y_4 Y_5 Y_6. \end{aligned} \quad (10-43)$$



Выражение (10-43) можно получить без записи лишних взаимно уничтожающихся членов, основываясь на том, что каждый член уравнения содержит произведение проводимостей ветвей, принадлежащих некоторому дереву графа цепи.

*Произведение проводимостей ветвей дерева называется величиной (весом) дерева.*

Для любого дерева, которое можно выбрать в графе цепи, в выражении (10-43) имеется соответствующий член. Отсюда следует правило: *определитель системы уравнений по методу узловых напряжений равен сумме величин всех деревьев графа цепи.*

Поскольку в соответствии с приведенным правилом определитель системы уравнений вычисляется по графу цепи, то его называют также определителем графа цепи.

Обозначим величину  $k$ -го дерева через  $t_k$ , тогда выражение для определителя можно записать так:

$$\Delta_y = \sum_k t_k = T, \quad (10-44)$$

где  $k$  — все деревья.

Суммирование в формуле (10-44) распространяется на все деревья графа цепи.

Чтобы не пропустить ни одно дерево, располагаем ветви, принадлежащие дереву, в порядке возрастания их номеров, а сами деревья записываем в порядке возрастания номеров как первых, так и последующих ветвей. Именно по такому принципу записаны величины деревьев в выражении (10-43).

Для нахождения алгебраических дополнений используются понятия *2-дерева* и *величины (веса) 2-дерева*.

*2-деревом графа цепи называется такая часть графа (подграф), которая содержит все узлы графа, не содержит ни одного контура и состоит из двух изолированных частей.* 2-дерево содержит  $q - 2$  ветви, так как при добавлении к нему одной ветви, соединяющей изолированные части, оно превращается в дерево.

Примером 2-дерева графа цепи на рис. 7-8 может служить подграф из ветвей  $Y_1$  и  $Y_3$ . Ветви  $Y_1$  и  $Y_2$  тоже образуют 2-дерево. Одна часть этого 2-дерева содержит ветви  $Y_1$  и  $Y_2$ , а также узлы 1, 2 и 4. Вторая часть состоит только из узла 3.

*Произведение проводимостей ветвей 2-дерева называется величиной (весом) 2-дерева.*



Рассмотрим алгебраическое дополнение  $\Delta_{12}$  определителя  $\Delta_y$  цепи на рис. 7-8:

$$\Delta_{12} = - \begin{vmatrix} -Y_2 & -Y_3 \\ -Y_6 & (Y_3 + Y_4 + Y_6) \end{vmatrix} = Y_2 Y_3 + Y_2 Y_4 + Y_2 Y_6 + Y_3 Y_6.$$

Последнее выражение содержит сумму величин 2-деревьев. В этой сумме учтены не все 2-деревья, а только такие, которые содержат узлы 1 и 2 в одной части 2-дерева, а базисную вершину 4 — в другой.

В результате получаем правило: *алгебраическое дополнение  $\Delta_{ik}$  определителя  $\Delta_y$  равно сумме величин таких 2-деревьев, у которых узлы  $i$  и  $k$  находятся в одной части 2-дерева, а базисная вершина  $q$  — в другой.*

Обозначим величину упомянутого выше 2-дерева через  $t_{ik,q}^2$ , тогда можно записать:

$$\Delta_{ik} = \sum T_{ik,q}^2 = T_{ik,q}^2, \quad (10-45)$$

где суммирование распространяется на все 2-деревья, у которых вершины, разделенные запятой в обозначении 2-дерева, находятся в разных его частях.

### 10-9. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ РАЗЛОЖЕНИЯ

Приведенные выше топологические формулы имеют тот недостаток, что приходится в сложных графах находить

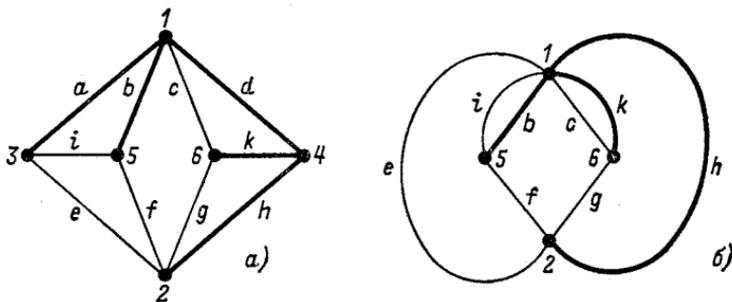


Рис. 10-34. Исходный граф  $G$  и граф  $G_h$ , соответствующий пути  $ad$ .

большое число деревьев. Так, в графе на рис. 7-8 число деревьев равно 16, а в графе на рис. 10-34—128.



С ростом числа ветвей число деревьев быстро увеличивается. Для облегчения задачи нахождения суммы величин деревьев и для более компактной записи этой суммы используются формулы разложения.

### Формула разложения по путям

*Путем в графе называется такая последовательность ветвей, в которой начало последующей ветви совпадает с концом предыдущей. Величиной (весом) пути называется произведение проводимостей ветвей пути. Путь, а также его величину обозначим буквой  $P$ .*

*Определитель графа цепи, получающейся после закорачивания всех ветвей пути  $P_k$ , называется алгебраическим дополнением пути  $P_k$  и обозначается через  $\Delta_k$ .*

Формула разложения определителя по путям записывается следующим образом:

$$\Delta_y = \sum_k P_k \Delta_k, \quad (10-46)$$

где суммирование распространяется на все пути в графе цепи между двумя выбранными узлами.

Таким образом, определитель системы уравнений по методу узловых напряжений равен сумме произведений величин путей между двумя выбранными узлами на соответствующие им алгебраические дополнения.

Докажем последнее утверждение, для чего рассмотрим граф некоторой цепи, который обозначим буквой  $G$ . Для любых выбранных узлов существует путь по ветвям дерева графа  $G$ , соединяющий эти вершины. Закоротим в графе  $G$  ветви пути  $P_k$  между выбранными узлами, тогда получим новый граф  $G_k$ , в котором оставшиеся незакороченными ветви дерева графа  $G$  образуют дерево графа  $G_k$ .

Например, если в дереве, которое показано толстыми линиями на рис. 10-34, а, закоротить ветви  $a$  и  $d$  пути между узлами 3 и 4, то получим граф  $G_k$ , показанный на рис. 10-34, б. В этом графе ветви  $b$ ,  $k$  и  $h$  образуют дерево.

С другой стороны, если в графе  $G_k$  выбрать любое другое дерево, то оно вместе с ветвями пути  $P_k$  образует дерево графа  $G$ .

Таким образом, для каждого дерева графа  $G$ , содержащего путь  $P_k$ , существует единственное дерево графа  $G_k$ , и наоборот.

Величина  $i$ -го дерева, содержащего путь  $P_k$ , равна  $P_k t_i^{(k)}$ , где  $t_i^{(k)}$  — величина  $i$ -го дерева графа  $G_k$ . Сумма величин всех деревьев, содержащих путь  $P_k$ , равна:

$$\sum_i P_k t_i^{(k)} = P_k \sum_i t_i^{(k)} = P_k \Delta_k,$$



так как сумма величин всех деревьев типа  $(Y_i^k)$  равна определителю цепи, соответствующей графу  $G_k$ , т. е.  $\Delta_k$ .

Определитель  $\Delta_y$  равен сумме всех деревьев для всех возможных путей графа  $G$ , т. е. члены вида  $P_k \Delta_k$  нужно просуммировать для всех путей, что приводит к формуле (10-46).

Вычисляя алгебраическое дополнение  $\Delta_k$ , можно также использовать формулу разложения по путям.

**Пример 10-1.** Найти определитель цепи на рис. 7-8 разложением по путям между узлами 2 и 4.

Между узлами 2 и 4 можно проследить следующие пять путей:

$$P_1 = Y_2 Y_1; \quad P_2 = Y_5; \quad P_3 = Y_3 Y_4; \quad P_4 = Y_2 Y_6 Y_4; \quad P_5 = Y_3 Y_6 Y_1.$$

После закорачивания ветвей первого пути  $P_1$  получаем граф, состоящий из трех параллельных ветвей с проводимостями  $Y_3$ ,  $Y_4$  и  $Y_6$ .

Определитель такого графа  $\Delta_1 = Y_3 + Y_4 + Y_6$ , так как любая из трех ветвей является деревом.

Если закоротить ветви пути  $P_2$  (т. е. ветвь с проводимостью  $Y_5$ ), получим граф, показанный на рис. 10-35, а. После замены параллельных ветвей эквивалентными преобразуем его к графу на рис. 10-35, б, определитель которого

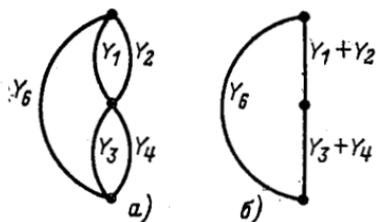


Рис. 10-35. Граф, соответствующий  $\Delta_2$ .

$$\Delta_2 = Y_6 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + (Y_1 + Y_2) (Y_3 + Y_4).$$

Для пути  $P_4$  алгебраическое дополнение  $\Delta_4 = 1$ , так как при закорачивании ветвей пути  $P_4$  все ветви оказываются закороченными. Аналогичным образом находим алгебраические дополнения

$$\Delta_3 = Y_1 + Y_2 + Y_6 \quad \text{и} \quad \Delta_5 = 1.$$

Подставляя найденные величины путей и алгебраических дополнений в формулу (10-46), получаем:

$$\Delta_y = Y_1 Y_2 (Y_3 + Y_4 + Y_6) + Y_5 [Y_6 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + (Y_1 + Y_2) (Y_3 + Y_4)] + Y_3 Y_4 (Y_1 + Y_2 + Y_6) + Y_2 Y_4 Y_6 + Y_1 Y_3 Y_6.$$

## Разложение определителя по узлу

Пусть к некоторому узлу  $s$  подходят ветви с проводимостями  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ . Поскольку все деревья касаются узла  $s$ , то любое дерево содержит хотя бы одну ветвь, касающуюся узла  $s$ . Среди этих деревьев имеются содержащие одну, две, три и т. д. ветвей, подходящих к узлу  $s$ .

Сумма величин деревьев, содержащих ветвь с проводимостью  $Y_i$ , равна  $Y_i \Delta_i$ , где  $\Delta_i$  — определитель графа, полу-

чающегося при закорачивании ветви с проводимостью  $Y_i$  и удалении остальных ветвей, подходящих к узлу  $s$ .

Аналогично сумма величин деревьев, содержащих ветви с проводимостями  $Y_i$  и  $Y_k$ , равна  $Y_i Y_k \Delta_{ik}$ , где  $\Delta_{ik}$  — определитель графа, получающегося при закорачивании ветвей с проводимостями  $Y_i$  и  $Y_k$  и удалении остальных ветвей, подходящих к узлу  $s$ .

Суммируя величины деревьев всех типов, получаем:

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^n Y_i \Delta_i + \sum_{i=1, k=1}^n Y_i Y_k \Delta_{ik} + \sum_{i=1, k=1, l=1}^n Y_i Y_k Y_l \Delta_{ikl} + \dots + Y_1 Y_2 \dots Y_n \Delta_{12 \dots n}. \quad (10-47)$$

Под знаком суммы в формуле (10-47) стоят произведения разных проводимостей ( $i \neq k$ ,  $k \neq l$ ,  $l \neq i$ ). Легко убедиться, что  $\Delta_i = \Delta_1$ .

**Пример 10-2.** Найти определитель цепи на рис. 7-8, используя формулу разложения по узлу 1.

Для данного примера формулу (10-47) запишем в виде

$$\Delta_y = (Y_1 + Y_2 + Y_6) \Delta_1 + Y_1 Y_2 \Delta_{12} + Y_1 Y_6 \Delta_{16} + Y_2 Y_6 \Delta_{26} + Y_1 Y_2 Y_6 \Delta_{126}.$$

Определитель  $\Delta_1$  соответствует графу на рис. 10-36 и равен  $Y_5 (Y_3 + Y_4) + Y_3 Y_4$ . После закорачивания ветвей 1 и 2 и удаления ветви 6 останутся параллельно соединенные ветви 3 и 4, т.е.  $\Delta_{12} = Y_3 + Y_4$ . Аналогично  $\Delta_{16} = Y_3 + Y_5$ , а  $\Delta_{26} = Y_4 + Y_5$ . После закорачивания ветвей 1, 2 и 6 все ветви будут закорочены, т.е.  $\Delta_{126} = 1$ .

С учетом приведенных выше значений находим:

$$\Delta_y = (Y_1 + Y_2 + Y_6) [Y_5 (Y_3 + Y_4) + Y_3 Y_4] + Y_1 Y_2 (Y_3 + Y_4) + Y_1 Y_6 (Y_3 + Y_5) + Y_2 Y_6 (Y_4 + Y_5) + Y_1 Y_2 Y_6.$$

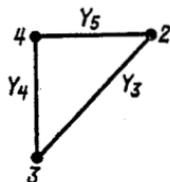


Рис. 10-36. Граф, соответствующий  $\Delta_1$ .

## Разложение алгебраических дополнений по путям

В соответствии с формулой (10-45) алгебраическое дополнение  $\Delta_{ik}$  равно сумме величин всех 2-деревьев типа  $t_{ik,q}^n$ , у которых узлы  $i$  и  $k$  находятся в одной части 2-дерева, а базисный узел  $q$  — в другой. На рис. 10-37 условно изображено одно из таких 2-деревьев.

Добавим к 2-дереву ветвь с проводимостью, равной единице, и соединяющую узлы  $k$  и  $q$  (показано пунктиром на рис. 10-37). В результате получаем дерево, величина кото-



рого равна величине исходного 2-дерева и которое содержит путь от узла  $i$  к узлу  $q$  через узел  $k$  и единичную ветвь.

Можно осуществить обратную операцию: добавить единичную ветвь к исходному графу цепи и выбрать в нем произвольное дерево, содержащее путь от узла  $i$  к узлу  $q$  через единичную ветвь. Если удалить из этого дерева единичную ветвь, то оно превращается в 2-дерево типа  $t_{ik,q}^2$ , т. е. между деревьями и 2-деревьями указанного выше типа существует взаимно однозначное соответствие.

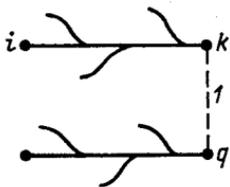


Рис. 10-37. Преобразование 2-дерева в дерево.

Из сказанного выше следует, что алгебраическое дополнение  $\Delta_{ik}$  равно сумме величин всех деревьев, содержащих путь от узла  $i$  к узлу  $k$  через единичную ветвь, т. е.

$$\Delta_{ik} = \sum P_l' \Delta_l',$$

где  $P_l'$  — величина  $l$ -го пути от узла  $i$  к узлу  $q$  через единичную ветвь;  
 $\Delta_l'$  — алгебраическое дополнение этого пути.

**Пример 10-3.** Найти алгебраическое дополнение  $\Delta_{12}$  графа цепи на рис. 7-8.

После добавления единичной ветви, соединяющей узлы 2 и 4 (базисный) получим цепь, граф которой изображен на рис. 10-38. Ветвь 5 удалена из графа, так как она шунтируется любым путем, проходящим через единичную ветвь, и не может поэтому принадлежать алгебраическому дополнению пути.

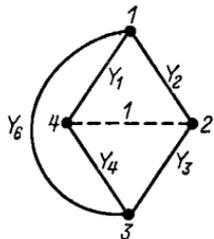


Рис. 10-38. Пример 10-3.

Записываем пути между узлами 1 и 4, а также их алгебраические дополнения:

$$P_1 = Y_2 \cdot 1; \quad \Delta_1 = Y_3 + Y_4 + Y_6;$$

$$P_2 = Y_6 Y_3 \cdot 1; \quad \Delta_2 = 1.$$

Следовательно,

$$\Delta_{12} = Y_2 (Y_3 + Y_4 + Y_6) + Y_6 Y_3.$$

## 10-10. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

В § 9-9 было отмечено, что передаточная функция определяется как отношение выходной величины четырехплюсника к входной, причем это отношение зависит от на-

грузки. Ниже при рассмотрении передаточных функций в качестве выходной величины примем напряжение холостого хода или ток короткого замыкания. Это не нарушает общности, так как, если сопротивление нагрузки отлично от нуля или бесконечности, то его можно внести внутрь четырехполюсника.

К входу четырехполюсника подключим идеальный источник э. д. с., если входная величина — напряжение, или идеальный источник тока, если входная величина — ток. На выходе подключим вольтметр в случае холостого хода или амперметр при коротком замыкании. На рис. 10-39 условно показано подключение источника  $I$  и измерительного прибора  $\Pi$ . Полярности источника и прибора соответствуют выбранным положительным направлениям напряжений.

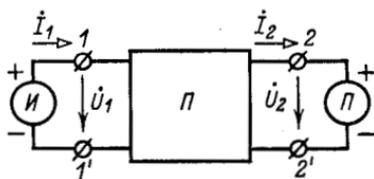


Рис. 10-39. Четырехполюсник для определения топологического закона передачи.

Передаточные функции любого типа для схемы на рис. 10-39 определяются с помощью топологического закона передачи, который выражается формулой

$$K = \sum P'_k \Delta'_k / \Delta, \quad (10-48)$$

где  $K$  — передаточная функция;

$P'_k$  — величина пути от плюса источника к его минусу, проходящего через измерительный прибор;

$\Delta'_k$  — алгебраическое дополнение пути  $P'_k$ ;

$\Delta$  — определитель графа цепи, получающейся после закорачивания источника э. д. с. и амперметра, а также удаления источника тока и вольтметра.

При определении величины пути  $P'_k$  проводимость прибора считаем равной единице (единичная ветвь). Путь  $P'_k$  берем с плюсом, если измерительный прибор проходим в положительном направлении, иначе  $P'_k$  берем с минусом. Определитель  $\Delta$  можно находить разложением по путям между любыми вершинами.

Доказательство справедливости формулы (10-48) сделаем на примере передаточного сопротивления

$$Z_{21} = \frac{U_2}{I_1} = \frac{U_{21'} - U_{2'1'}}{I_1},$$

где  $I_1$  — ток источника тока на входе цепи.



Подставив в последнее уравнение выражения узловых напряжений  $\dot{U}_{21}$  и  $\dot{U}_{2'1}$  согласно формуле (7-6), получим:

$$Z_{21} = \frac{\Delta_{12} - \Delta_{12'}}{\Delta_y}. \quad (10-49)$$

Алгебраическое дополнение  $\Delta_{12}$  согласно формуле (10-45) равно сумме величин 2-деревьев типа  $t_{12,1'}$ , у которых узлы 1 и 2 находятся в одной части 2-дерева, а базисный узел 1', — в другой. Что касается узла 2', то он может быть или в той части, где находятся узлы 1 и 2, или в той, где узел 1', т. е.

$$\Delta_{12} = T_{12,1'}^2 = T_{12,2',1'}^2 + T_{12,2'1'}^2.$$

В этом уравнении, как и ранее, запятая разделяет номера узлов, принадлежащих разным частям 2-дерева.

По аналогии можно записать, что

$$\Delta_{12'} = T_{12',1'}^2 = T_{12',2',1'}^2 + T_{12',21'}^2.$$

Подставляя полученные выражения для  $\Delta_{12}$  и  $\Delta_{12'}$  в уравнение (10-49), находим:

$$Z_{21} = \frac{T_{12,2'1'}^2 - T_{12',21'}^2}{\Delta_y}. \quad (10-50)$$

2-деревья типов  $t_{12,2'1'}$  и  $t_{12',21'}$  преобразуются в деревья добавлением единичной ветви, соединяющей узлы 2 и 2'.

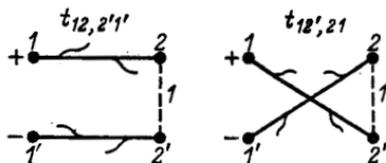


Рис. 10-40. Преобразование 2-деревьев в деревья.

Эти деревья содержат путь от плюса источника к его минусу через единичную ветвь (рис. 10-40). Причем для 2-дерева  $t_{12,2'1'}$  единичная ветвь проходит в пути от узла 2 к узлу 2', а для 2-дерева  $t_{12',21'}$  — в обратном направлении.

Соответственно в выражение (10-50) первое 2-дерево входит с плюсом, а второе — с минусом.

Разлагая суммы 2-деревьев  $T_{12,2'1'}^2$  и  $T_{12',21'}^2$  по путям описанного выше типа, получаем формулу (10-48), в которой  $\Delta = \Delta_y$ .

Аналогичным образом можно доказать справедливость формулы (10-48) для других типов передаточных функций.

Топологический закон передачи можно использовать также для определения входного сопротивления и проводи-

мости, если считать, что вход и выход совпадают. В этом случае имеется единственный путь  $P'_k$  от узла 1 к узлу 1' непосредственно через измерительный прибор. Величина этого пути равна единице, а алгебраическое дополнение равно определителю цепи при закороченном входе.

Следовательно, входное сопротивление

$$Z_{вх} = \Delta_{11} / \Delta_y,$$

где  $\Delta_{11}$  — определитель цепи при закороченном входе;  
 $\Delta_y$  — определитель цепи при разомкнутом входе.

**Пример 10-4.** Найти передаточную проводимость для цепи на рис. 10-41, а в режиме короткого замыкания и коэффициент передачи по напряжению в режиме холостого хода,

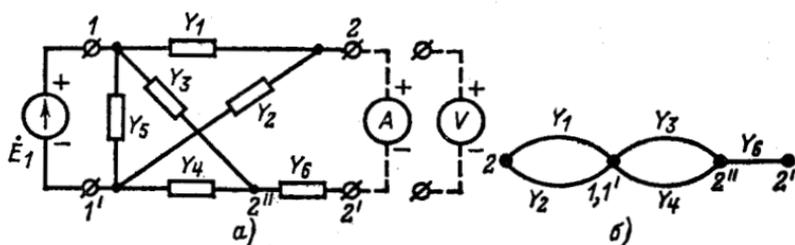


Рис. 10-41. Пример 10-4.

При определении передаточной проводимости на входе включаем источник э. д. с., а на выходе — амперметр. Используем формулу (10-48). В числителе этой формулы сумма произведений величин путей от узла 1 к 1' через амперметр на их алгебраические дополнения. В цепи существуют только два таких пути:  $P'_1 = Y_1 Y_6 Y_4$  и  $P'_2 = -Y_3 Y_6 Y_2$ . Алгебраические дополнения путей равны единице.

Следовательно,

$$\sum P'_k \Delta'_k = Y_1 Y_6 Y_4 - Y_3 Y_6 Y_2.$$

В знаменателе формулы (10-48) стоит определитель графа цепи, которая получается из исходной после закорачивания э. д. с. и амперметра. Этот граф совпадает с графом на рис. 10-35, определитель которого

$$\Delta = Y_6 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + (Y_1 + Y_2) (Y_3 + Y_4).$$

Подставляя найденные величины в (10-48), находим:

$$Y_{21} = \frac{(Y_1 Y_4 - Y_3 Y_2) Y_6}{Y_6 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + (Y_1 + Y_2) (Y_3 + Y_4)}.$$

При определении коэффициента передачи по напряжению на входе цепи вместо амперметра следует включить вольтметр. Поскольку сама схема цепи и характер включения измерительного прибора не изменяются, то пути от узла 1 к узлу 1' останутся теми же. Соответственно числитель формулы (10-48) не изменится.



Для вычисления определителя  $\Delta$  нужно закоротить вход и удалить вольтметр. Граф результирующий цепи показан на рис. 10-41, б. Определитель этого графа

$$\Delta = (Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_4)Y_6.$$

Окончательно получаем:

$$K_U = \frac{Y_1 Y_2 - Y_3 Y_4}{(Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_4)}.$$

Проводимость  $Y_6$  в числителе и знаменателе сокращается. Это можно было учесть с самого начала, подключив вольтметр к точке 2", так как напряжение на проводимости  $Y_6$  равно нулю.

### 10-11. ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ АКТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

Рассмотренный выше топологический анализ линейных цепей применим к пассивным обратимым цепям без взаимной индуктивности. Если имеется взаимная индуктивность, то от нее можно избавиться, используя развязку индуктив-

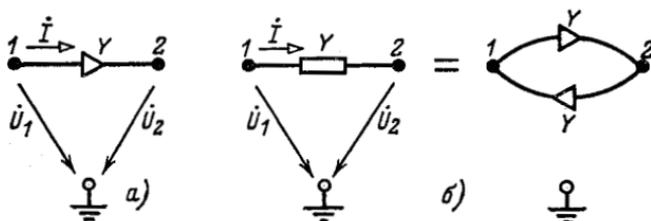


Рис. 10-42. Унисторная (а) и обычная (б) ветви.

ных связей (см. гл. 8). Необратимые цепи могут быть заменены эквивалентными схемами замещения с зависимыми источниками энергии (см. § 9-5).

Для того чтобы можно было применить топологические методы для анализа электрических цепей с зависимыми источниками, вводится в рассмотрение элемент, называемый унистором (рис. 10-42, а).

Унистор — несимметричный элемент, пропускающий ток только в одном направлении, указанном стрелкой. Ток определяется равенством  $\dot{I} = Y\dot{U}_1$ .

Для обычной ветви ток

$$\dot{I} = Y(\dot{U}_1 - \dot{U}_2) = Y\dot{U}_1 - Y\dot{U}_2.$$

Следовательно, обычная ветвь эквивалентна параллельному соединению противоположно направленных унисторов с проводимостью, равной проводимости ветви (рис. 10-42, б).

Зависимый источник тока, управляемый напряжением (рис. 10-43, а), можно заменить унитарной схемой замещения на рис. 10-43, б. Эквивалентность этих схем легко проверить, вычисляя токи, входящие в узлы цепи.

Зависимые источники других типов целесообразно преобразовать в зависимый источник тока, управляемый на-

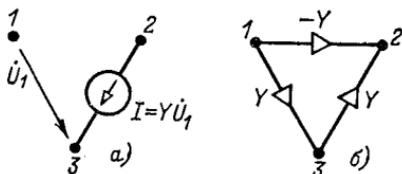


Рис. 10-43. Зависимый источник и его унитарная схема замещения.

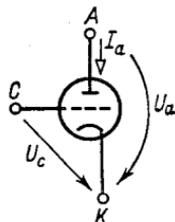


Рис. 10-44. Электронная лампа (триод).

пряжением, чтобы можно было использовать схему замещения на рис. 10-43, б.

Схемы замещения с зависимыми источниками используются при анализе электронных схем в линейном режиме. Например, электронная лампа триод (рис. 10-44), используемая для усиления переменных сигналов, при пренебрежении внутренним сопротивлением эквивалентна зависимому источнику тока, показанному на рис. 10-43, а. При этом узел 1 соответствует сетке С, узел 2 — аноду А и узел 3 — катоду К. Роль проводимости  $Y$  в этом случае выполняет крутизна лампы  $S$ . Соответственно ток лампы

$$I_a = S U_c.$$

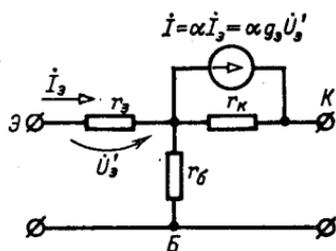


Рис. 10-45. Схема замещения транзистора.

Чтобы учесть внутреннюю проводимость лампы  $g_i$ , ее включают параллельно источнику тока в схеме на рис. 10-43, а.

На рис. 10-45 показана схема замещения транзистора, которая содержит зависимый источник тока. Здесь  $r_e$  — сопротивление эмиттера;  $r_k$  — сопротивление коллектора;  $r_b$  — сопротивление базы. Если заменить  $I_s$  на  $g_s U_s'$  ( $U_s'$  —



напряжение на сопротивлении эмиттера), то получим источник тока, управляемый напряжением  $U'_s$ , который заменяется унисторной схемой на рис. 10-43, б с  $Y = \alpha g_s$ .

Основные топологические правила, применимые к обычным цепям, справедливы и для цепей, содержащих унисторы. Все отличия сводятся к следующему:

1) в рассмотренных выше топологических формулах учитываются только такие деревья, 2-деревья или пути, в которых все унисторы направлены в сторону базисного (заземленного) узла;

2) в случае 2-дерева базисный узел выбирают в каждой части 2-дерева;

3) при использовании топологического закона передачи заземленным узлом должен быть один из выводов измерительного прибора.

**Пример 10-5.** На рис. 10-46, а показана схема катодного повторителя. Определить для нее передаточную проводимость, представляющую собой отношение тока катода к входному напряжению,

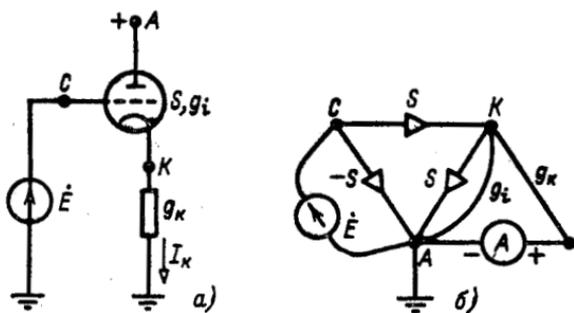


Рис. 10-46. Схема катодного повторителя (а) и ее унисторный граф (б).

На анод схемы подано постоянное по отношению к земле напряжение. Поскольку, анализируя усиление сигналов, постоянную составляющую отбрасывают, можно считать, что анод присоединен к земле. С учетом этого после замены лампы унисторной схемой замещения получаем граф на рис. 10-46, б. В этой схеме существует лишь один путь  $P_1 = Sg_k$  — от плюса источника к минусу через амперметр. Этот путь следует учесть, так как унистор направлен к заземленному узлу. Алгебраическое дополнение  $\Delta'_1 = 1$ .

Для нахождения определителя  $\Delta$  в знаменателе формулы (10-48) закорачиваем источник и амперметр. Получаем граф из проводимостей  $g_s$ ,  $g_k$  и двух унисторов, соединенных параллельно. Любая из этих

ветвей образует дерево. Однако один из унисторов следует отбросить, так как он направлен от заземленного узла. Следовательно,

$$\Delta = g_i + g_k + S$$

и передаточная проводимость

$$Y_{21} = \frac{i}{\dot{E}} = \frac{Sg_k}{g_i + g_k + S}.$$

## 10-12. СИГНАЛЬНЫЕ ГРАФЫ И МЕТОДЫ ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Выше был рассмотрен топологический метод, использующий понятие деревьев. Особенность этого метода в том, что он оперирует с графом электрической схемы, отображающим ее топологию.

Сигнальные графы, применяемые для анализа электрических цепей, не отображают топологию электрических схем. Они используются для решения систем линейных уравнений и их конфигурация определяется этой системой.

Возьмем, например, систему уравнений, полученных для схемы рис. 7-6 в примере 7-2. Для построения сигнального графа необходимо сначала разрешить каждое уравнение относительно одной переменной (разной для разных уравнений). Разрешим, например, первое уравнение относительно  $\dot{I}_1$ , второе — относительно  $\dot{I}_2$  и третье относительно  $\dot{I}_3$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= t_{12}\dot{I}_2 + t_{13}\dot{I}_3; \\ \dot{I}_2 &= t_{21}\dot{I}_1 + t_{23}\dot{I}_3; \\ \dot{I}_3 &= t_{31}\dot{I}_1 + t_{32}\dot{I}_2 + t_{31}\dot{E}. \end{aligned} \right\} \quad (10-51)$$

Здесь коэффициенты

$$\begin{aligned} t_{12} &= \frac{Z_5}{Z_1 + Z_2 + Z_5}; & t_{13} &= \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_5}; \\ t_{21} &= \frac{Z_5}{Z_2 + Z_4 + Z_5}; & t_{23} &= \frac{Z_3}{Z_3 + Z_1 + Z_5}; \\ t_{31} &= \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3 + Z_6}; & t_{32} &= \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3 + Z_6}; \\ t_{34} &= \frac{1}{Z_2 + Z_3 + Z_6}. \end{aligned}$$

Полученной системе уравнений соответствует сигнальный граф, изображенный на рис. 10-47, а.

Сигнальный граф обладает следующими свойствами:

1. Сигнальный граф состоит из узлов и ветвей. Ветвь изображается направленным отрезком,



соединяющим два узла сигнального графа. Направление ветви указывается стрелкой.

2. Каждая ветвь графа характеризуется передачей ветви  $t_{ik}$ . Первый индекс ветви ( $i$ ) соответствует номеру узла, в который входит ветвь, а второй ( $k$ ) — номеру узла, из которого она выходит.

3. В каждом узле графа имеется сигнал, который передается от узла по всем ветвям, выходящим из него. При решении уравнений электрических цепей под сигналами понимаются токи, напряжения и т. д.

4. При прохождении по ветви сигнал умножается на передачу ветви.

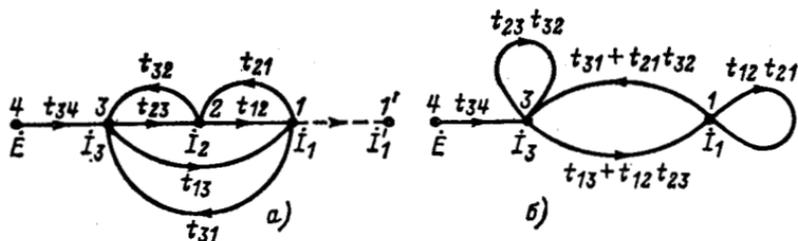


Рис. 10-47. Сигнальные графы для системы (10-51).

5. Результирующий сигнал в узле равен сумме всех сигналов, приходящих в данный узел по ветвям, входящим в этот узел.

В соответствии с вышесказанным ток  $I_1$  представляет собой сигнал в вершине 1 графа на рис. 10-47, а, ток  $I_2$  — сигнал в вершине 2, ток  $I_3$  — сигнал в вершине 3 и э. д. с.  $E$  — сигнал в вершине 4. Согласно первому уравнению системы (10-51) в вершину 1 должны входить ветвь с передачей  $t_{12}$ , выходящая из вершины 2, и ветвь с передачей  $t_{13}$ , выходящая из вершины 3 (рис. 10-47). Аналогичные рассуждения относятся и к остальным ветвям графа, изображенного на рис. 10-47, а.

Выше отмечалось, что для построения сигнального графа следует каждое уравнение разрешить относительно одной переменной. Очевидно, это можно сделать по-разному. Например, первое уравнение рассмотренной выше системы уравнений можно разрешить относительно  $I_2$ , а не  $I_1$ , второе уравнение — относительно  $I_3$ , третье — относительно  $I_1$ . В результате получится система уравнений, отличная по форме от системы (10-51), и соответственно сигнальный граф для такой системы будет отличаться от графа на рис. 10-47, а.

Таким образом, для данной системы уравнений можно построить различные графы, но данному графу соответствует совершенно определенная система уравнений.

После построения сигнального графа для данной системы уравнений ее решение сводится к вычислению передачи сигнального графа.

*Передачей сигнального графа от истока, откуда только выходят ветви графа, к стоку, куда только входят ветви графа, называется отношение сигнала в стоке к сигналу в истоке.* Узел 4 графа на рис. 10-47, а является источником. Узел 1 не является стоком, но можно добавить узел  $I'$  с сигналом  $I'_1$  и соединить его с узлом 1 ветвью с единичной передачей, что соответствует уравнению  $I'_1 = I_1$ . Узел  $I'$  является стоком, тогда передача от узла 4 к узлу  $I'$

$$T_{1'4} = \frac{I'_1}{E} = \frac{I_1}{E},$$

откуда  $I_1 = T_{1'4}E$ , т. е., зная передачу графа от узла 4 к узлу  $I'$ , можно определить ток  $I_1$ .

Ниже рассмотрены два метода нахождения передачи сигнального графа: 1) последовательным упрощением графа и 2) вычислением передачи по формуле Мейсона.

Метод упрощения сигнального графа основан на следующих правилах:

1. Параллельно соединенные ветви, направленные в одну сторону, заменяются одной ветвью, передача которой равна сумме передач параллельно соединенных ветвей (рис. 10-48, а).

2. Последовательно соединенные ветви, направленные в одну сторону, заменяются одной ветвью, передача которой равна произведению передач ветвей (рис. 10-48, б).

3. Если в точке соединения двух ветвей с передачами  $t_{12}$  и  $t_{23}$  имеется петля с передачей  $t_{22}$  (петля — это ветвь, выходящая из того же узла, куда она входит), то все эти три ветви заменяются одной ветвью с передачей (рис. 10-48, в)

$$t_{13} = \frac{t_{12}t_{23}}{1 - t_{22}}.$$

Указанные выше правила являются частными случаями общего правила устранения вершин. При устранении вершины графа устраняется и сигнал, соответствующий этой вершине, т. е. устранение вершины равносильно исключению переменной из системы уравнений. Вообще всякому



преобразованию графа соответствует определенное преобразование системы уравнений.

При устранении некоторой вершины (рис. 10-48, а) удаляются все ветви, входящие или выходящие из этой вершины. Передачи оставшихся ветвей (вблизи удаленного

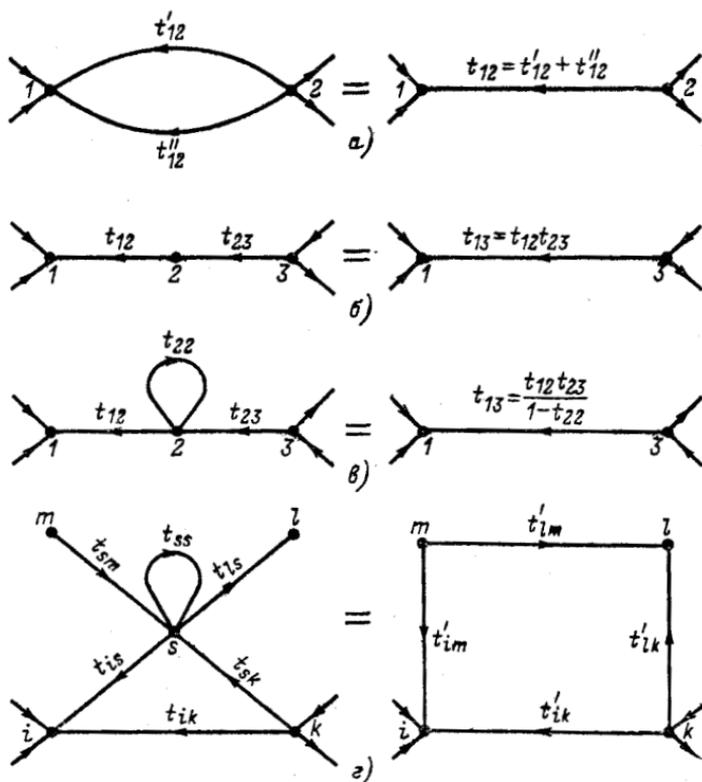


Рис. 10-48. Преобразование сигнальных графов.

узла) соответствующим образом меняются. Если в исходном графе имеется ветвь, идущая из узла  $k$  в узел  $s$  с передачей  $t_{sk}$ , и ветвь, идущая из узла  $s$  в узел  $i$  с передачей  $t_{is}$  (рис. 10-48, в), то новая передача ветви между узлами  $k$  и  $i$  вычисляется по формуле

$$t'_{ik} = t_{ik} + \frac{t_{is}t_{sk}}{1 - t_{ss}}, \quad (10-52)$$

где  $t_{ss}$  — передача петли в вершине  $s$ .

Если в исходном графе отсутствует ветвь между узлами  $k$  и  $i$ , то в формуле (10-52) следует положить  $t_{ik} = 0$ . Аналогично  $t_{ss} = 0$  при отсутствии петли в вершине  $s$ . В частном случае вершины  $i$  и  $k$  могут совпадать, что приведет к появлению петли в новом графе. Передачи  $t'_{im}$ ,  $t'_{im}$  и  $t'_{ik}$  находятся по формуле, аналогичной формуле (10-52).

В качестве примера применения формулы (10-52) устраним вершину 2 из графа на рис. 10-47, а. В результате получится граф, изображенный на рис. 10-47, б. Выражения для передач ветвей указаны на рисунке.

Далее можно удалить узел 3 из графа на рис. 10-47, б; получится граф, содержащий узлы 1 и 4, причем в узле 1 будет петля. Для удаления этой петли можно добавить ветвь с единичной передачей, как указано было ранее (пунктирная линия на рис. 10-47, а) и устранить узел 1. Окончательно получится граф, содержащий единственную ветвь с передачей  $T_{1'4} = I_1/E$ . Указанные преобразования предлагается выполнить в качестве упражнения и результат сравнить с (10-57).

В графе на рис. 10-47, а узел 4 является истоком. Соответствующий ему сигнал (э. д. с.  $\dot{E}$ ) считается известным и находится только в правой части уравнений (10-51). Может возникнуть обратная задача определения э. д. с.  $\dot{E}$ , которую в этом случае необходимо перенести в левую часть уравнения, после чего узел 4 перестает быть истоком. Ветвь с передачей  $t_{34}$  после такого преобразования будет входить в узел 4.

Операция изменения направления ветвей называется инверсией.

Рассмотрим сначала инверсию одной ветви, выходящей из истока  $i$  и входящей в узел  $k$ . Поскольку узел  $i$  является истоком, то соответствующий ему сигнал  $x_i$  находится только в правой части системы уравнений, т. е. нет уравнения, выражающего сигнал  $x_i$  через другие сигналы. Для  $k$ -го узла такое уравнение имеет вид:

$$x_k = t_{k1}x_1 + t_{k2}x_2 + \dots + t_{ki}x_i + \dots + t_{kk}x_k. \quad (10-53)$$

Определим из этого уравнения сигнал  $x_i$ :

$$x_i = -\frac{t_{ki}}{t_{ki}}x_1 - \frac{t_{k2}}{t_{ki}}x_2 - \dots + \frac{1-t_{kk}}{t_{ki}}x_k. \quad (10-54)$$

Уравнению (10-53) соответствует часть графа, показанная на рис. 10-49, а. После преобразования уравнения (10-53) сигнал узла  $k$  переходит в правую часть уравнения, т. е.



узел  $k$  становится истоком. Граф, соответствующий уравнению (10-54), показан на рис. 10-49, б. Сравнивая эти графы, получаем правило для инверсии ветви  $t_{ki}$ :

- 1) устраним петлю в узле  $k$  (если она имеется);
- 2) инвертируем ветвь  $t_{ki}$  заменяем ветвью с передачей  $t'_{ik} = (1 - t_{kk})/t_{ki}$ , имеющей противоположное направление;
- 3) концы ветвей, входивших в узел  $k$ , переносим в узел  $i$ , умножая передачи этих ветвей на  $-1/t_{ki}$ .

После инверсии ветви с передачей  $t_{ki}$  узел  $k$  становится истоком. В связи с этим можно инвертировать любую ветвь, выходящую из узла  $k$ , скажем, ветвь  $t_{lk}$ . В результате ока-

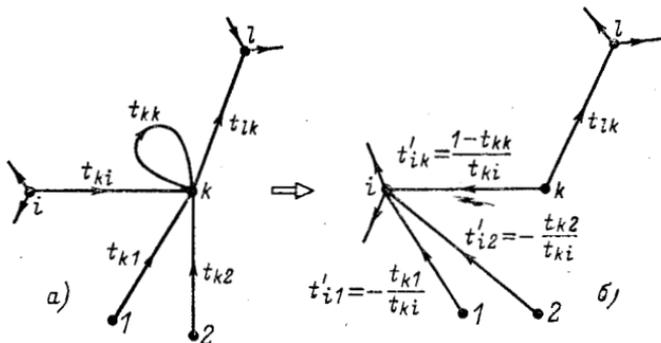


Рис. 10-49. Инверсия ветви.

жется инвертированным путь  $t_{ki}t_{lk}$ . Таким образом, используя приведенное выше правило, можно инвертировать путь, начинающийся в истоке.

Описанный выше метод является громоздким. Его целесообразно использовать лишь для предварительных упрощений и преобразований сигнальных графов. Более удобно вычислять передачу графа по формуле Мейсона.

Передача сигнального графа от истока к стоку

$$T = \frac{\sum_k P_k \Delta_k}{\Delta}, \quad (10-55)$$

где  $\Delta$  — определитель графа;

$P_k$  — передача  $k$ -го пути в графе от истока к стоку;

$\Delta_k$  — алгебраическое дополнение пути.

Суммирование выполняется по всем возможным путям.

Путь в графе берется с учетом направления ветвей, т. е., идя от истока до стока, необходимо все время идти

в направлении стрелок. *Передача пути равна произведению передач всех ветвей пути.*

Определитель графа

$$\Delta = 1 - \sum_i L_i + \sum_{i, k}^* L_i L_k - \sum_{i, k, m}^* L_i L_k L_m + \dots, \quad (10-56)$$

где  $L_i$  — передача  $i$ -го контура, равная произведению передач всех ветвей контура. Контур выбирается так, чтобы все ветви в контуре были направлены в одну сторону. Звездочки у знака сумм означают, что следует брать произведения величин двух, трех и т. д. некасающихся контуров.

Алгебраическое дополнение  $\Delta_k$  вычисляется по той же формуле (10-56), но при этом следует учитывать во всех суммах лишь контуры, не касающиеся пути  $P_k$ .

**Пример 10-6.** Вычислить передачу графа на рис. 10-47,  $a$  от узла 4 к узлу 1.

Поскольку все контуры графа касаются друг друга, то в соответствии с формулой (10-56) в выражении определителя необходимо учесть единицу и взятую со знаком минус сумму передач контуров. Следовательно, определитель графа

$$\Delta = 1 - (t_{23}t_{32} + t_{12}t_{21} + t_{31}t_{13} + t_{13}t_{21}t_{32} + t_{23}t_{12}t_{31}).$$

В графе на рис. 10-47,  $a$  имеются два пути от истока к стоку:  $P_1 = t_{34}t_{23}t_{12}$  и  $P_2 = t_{34}t_{13}$ . Алгебраические дополнения этих путей равны единице, так как все контуры касаются их.

Теперь остается подставить выражения определителя, передач путей и их алгебраических дополнений в выражение (10-55) или в равенство

$$T_{i4} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta},$$

что дает

$$T_{i4} = \frac{t_1}{\dot{E}} = \frac{t_{34}t_{23}t_{12} + t_{34}t_{13}}{1 - (t_{23}t_{32} + t_{12}t_{21} + t_{13}t_{31} + t_{13}t_{21}t_{32} + t_{23}t_{12}t_{31})}. \quad (10-57)$$

### 10-13. ПОСТРОЕНИЕ СИГНАЛЬНЫХ ГРАФОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Как указывалось ранее, для любой системы линейных уравнений можно построить сигнальный граф. При анализе электрических цепей в качестве такой системы уравнений можно взять уравнения или по законам Кирхгофа, или по методу контурных токов, или по методу узловых напряжений. Чтобы исключить промежуточную операцию составления уравнений, нужно найти метод построения графа по схеме электрической цепи. Ниже рассмотрены



правила построения графа для расчетов методами контурных токов и узловых напряжений.

Независимо от схемы электрической цепи уравнения по методу контурных токов имеют, например, для трех контуров, такой вид (см. § 7-2):

$$Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + Z_{13}I_3 = \dot{E}_1;$$

$$Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + Z_{23}I_3 = \dot{E}_2;$$

$$Z_{31}I_1 + Z_{32}I_2 + Z_{33}I_3 = \dot{E}_3.$$

Перенесем все члены этих уравнений в правую часть. Прибавим к обеим частям первого уравнения  $I_1$ , второго  $I_2$ , третьего  $I_3$ . В результате получаем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= (1 - Z_{11})I_1 - Z_{12}I_2 - Z_{13}I_3 + E_1; \\ I_2 &= -Z_{21}I_1 + (1 - Z_{22})I_2 - Z_{23}I_3 + E_2; \\ I_3 &= -Z_{31}I_1 - Z_{32}I_2 + (1 - Z_{33})I_3 + E_3. \end{aligned} \right\} \quad (10-58)$$

Этой системе уравнений соответствует сигнальный граф, показанный на рис. 10-50. Его можно построить, не записывая системы уравнений, при любом числе контуров, имея в виду следующие свойства графа:

1. В  $k$ -м узле графа, соответствующем  $k$ -му контурному току  $I_k$ , имеется петля с передачей  $(1 - Z_{kk})$ .

2. Между  $k$ -м и  $i$ -м узлами имеются две ветви. Одна с передачей  $-Z_{ik}$  направлена от узла  $k$  в узел  $i$ , другая с передачей  $-Z_{ki}$  — из узла  $i$  в узел  $k$ .

3. К  $k$ -му узлу подходит ветвь из узла с сигналом  $\dot{E}_k$ , имеющая единичную передачу.

По этим правилам легко построить сигнальный граф, не составляя системы уравнений. В

Рис. 10-50. Сигнальный граф уравнений по методу контурных токов.

этом нет необходимости, так как сам сигнальный граф представляет собой геометрическую запись системы уравнений. Передачи ветвей графа вычисляются по тем же правилам, по которым вычисляются собственные и общие сопротивления контуров.

Аналогично можно составить сигнальный граф для уравнений по методу узловых напряжений. Для случая трех узлов имеем такие уравнения:

$$\begin{aligned} Y_{11}\dot{U}_1 - Y_{12}\dot{U}_2 - Y_{13}\dot{U}_3 &= \dot{I}_1; \\ -Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 - Y_{23}\dot{U}_3 &= \dot{I}_2; \\ -Y_{31}\dot{U}_1 - Y_{32}\dot{U}_2 + Y_{33}\dot{U}_3 &= \dot{I}_3. \end{aligned}$$

Преобразуя эти уравнения аналогично тому, как это делалось с уравнениями по методу контурных токов, получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= (1 - Y_{11})\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 + Y_{13}\dot{U}_3 + \dot{I}_1; \\ \dot{U}_2 &= Y_{21}\dot{U}_1 + (1 - Y_{22})\dot{U}_2 + Y_{23}\dot{U}_3 + \dot{I}_2; \\ \dot{U}_3 &= Y_{31}\dot{U}_1 + Y_{32}\dot{U}_2 + (1 - Y_{33})\dot{U}_3 + \dot{I}_3. \end{aligned} \right\} \quad (10-59)$$

Полученные уравнения отличаются по структуре от уравнений (10-58) только знаками при общих проводимостях. Соответственно этому и правило составления графа будет отличаться тем, что знаки передач ветвей, соединяющих разные узлы, будут положительны. Конфигурация же графа не изменится.

#### 10-14. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

10-1. Рассчитать фильтр нижних частот с частотой среза 1000 Гц и характеристическим сопротивлением 100 Ом при нулевой частоте.

Ответ:  $L = 31,8$  мГ;  $C = 3,18$  мкФ.

10-2. Задан Т-образный фильтр нижних частот, состоящий из двух индуктивностей, каждая из которых равна 0,1 мГ, и емкости 2 мкФ. Определить частоту среза и построить график характеристического сопротивления.

Ответ:  $\omega_c = 10^5$  рад/с;  $Z_T = 10\sqrt{1 - \omega^2 \cdot 10^{-10}}$  Ом.

10-3. Задан П-образный фильтр нижних частот, состоящий из индуктивности 0,2 мГ и двух емкостей по 1 мкФ каждая. Определить частоту среза и построить график характеристического сопротивления.

Ответ:  $\omega_c = 10^5$  рад/с;

$$Z_{\Pi} = \frac{10}{\sqrt{1 - \omega^2 \cdot 10^{-10}}} \text{ Ом.}$$

10-4. Пользуясь результатом решения задачи 9-1, доказать, что в случае Т- или П-образного фильтра нижних частот (см. рис. 10-4), нагруженного согласованно, передаточная функция по напряжению имеет вид:

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} + j \frac{\omega}{\omega_c} \right]^{-2}.$$

10-5. Основываясь на предыдущей задаче, показать, что в полосе пропускания коэффициент передачи по напряжению равен единице.

10-6. Два Г-образных фильтра верхних частот, каждый из которых состоит из емкости 1 мкФ и индуктивности 10 мГ, образуют Т-образ-



ный фильтр. Вычислить для Т-образного фильтра частоту среза  $f_c$ , характеристическое сопротивление и собственное затухание при  $2f_c$ ; характеристическое сопротивление и коэффициент фазы при  $0,5 f_c$ .

О т в е т:  $10^4$  рад/с; 86,6 Ом;  $-j 730$  Ом; 0;  $-\pi$ .

10-7. Два Г-образных фильтра верхних частот, указанные в предыдущей задаче, образуют П-образный фильтр. Вычислить для П-образного фильтра то же, что в задаче 10-6.

О т в е т:  $10^4$  рад/с; 116 Ом;  $j 57,7$  Ом; 0;  $-\pi$ .

10-8. Пояснить, исследуя формулы для симметричного фильтра без потерь, почему в полосе пропускания фильтра его характеристическое сопротивление активное, а в полосе задержания реактивное.

10-9. Как определить характеристические сопротивления несимметричного фильтра по данным опытов холостого хода и короткого замыкания?

10-10. Как найти полосу пропускания фильтра по заданной частотной зависимости его характеристического сопротивления?

10-11. Пояснить физическую сущность коэффициента фазы фильтра.

10-12. Как определяется в полосе пропускания и в полосе задерживания угол фазового сдвига между напряжениями на входе и выходе Г-образного фильтра, нагруженного согласованно?

10-13. Начертить схемы последовательно-производного и параллельно-производного звеньев заграждающего фильтра типа  $m$ .

10-14. На примерах схем реактивных мостовых фильтров, показанных на рис. 10-26, убедиться в том, что при разных знаках  $Z_1$  и  $Z_2$  появляются полосы пропускания.

10-15. Доказать, что в полосе пропускания реактивного мостового фильтра выполняется условие  $-1 \leq \frac{Z_1}{Z_2 - Z_1} \leq 0$ , что равносильно условию  $-\infty \leq \frac{Z_1}{Z_2} \leq 0$ . Пояснить физический смысл последнего условия.

10-16. Вывести для фильтра типа  $k$  зависимости

$$Z_{\text{T}} = k \operatorname{ch} \frac{g}{2} \quad \text{и} \quad Z_{\text{П}} = \frac{k}{\operatorname{ch} \frac{g}{2}}.$$

10-17. Пояснить с помощью табл. 10-1 построение частотных характеристик фильтров типа  $k$  (см. рис. 10-8—10-11).

---

## ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

### ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

#### 11-1. ПЕРВИЧНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ОДНОРОДНОЙ ЛИНИИ

До сих пор рассматривались электрические цепи с сосредоточенными параметрами, т. е. предполагалось, что электрическая цепь представляет собой совокупность не-



которых самостоятельно существующих элементов  $r$ ,  $L$  и  $C$ , сосредоточенных в различных точках ее. Напряжение и ток этих элементов связываются соотношениями

$$u_r = ri; \quad u_L = L \frac{di}{dt}; \quad i = C \frac{du_C}{dt},$$

основанными на предположении, что ток, входящий в каждый из этих элементов цепи, равен току, выходящему из него. Решение этих уравнений дает закон изменения исследуемой электрической величины в зависимости от времени, но не от координаты длины, которая в эти уравнения не входит.

Однако представление электротехнических устройств в виде цепей с сосредоточенными параметрами не всегда возможно. Например, рассматривая электромагнитные процессы, происходящие в электрических линиях, при помощи которых электрическая энергия или сигналы передаются на расстояние, необходимо иметь в виду, что магнитное и электрическое поля распределены по всей длине линии и превращение электромагнитной энергии в тепло также происходит по всей длине линии. Таким образом, линия является цепью с распределенными параметрами.

Если мысленно выделить какой-либо конечный участок этой линии, то токи на концах этого участка окажутся неодинаковыми вследствие наличия токов смещения, обусловленных емкостью между токоведущими проводниками, и токов утечки через изоляцию. Только при бесконечном уменьшении участков линии токи на концах их можно считать равными друг другу.

Следовательно, приведенные выше уравнения непосредственно не применимы ко всей линии в целом или конечным участкам ее; строго говоря, они могут быть применимы только к участкам бесконечно малой длины.

Магнитный поток, который сцепляется с контуром тока, образуемым токоведущими проводниками, определяет индуктивность цепи.

Емкость между проводами, а также емкости этих проводов по отношению к земле (или соответственно к корпусу машины, самолета, корабля и т. д.) и другим соседним проводам определяют емкость цепи.

Тепловые потери в проводах с учетом поверхностного эффекта и эффекта близости обуславливают продольное активное сопротивление цепи.

Наконец, несовершенство изоляции (проводимость изоляции и диэлектрические потери, возникающие в ней) определяет поперечную активную проводимость цепи.

В качестве цепи с распределенными параметрами ниже рассматривается однородная двухпроводная линия, т. е. такая линия, индуктивность, емкость, активное сопротивление и проводимость которой равномерно распределены вдоль всей длины линии. Эти электрические параметры, отнесенные к единице длины линии, называются первичными параметрами линии; они обозначаются через  $L$ ,  $C$ ,  $r$  и  $g^*$ .

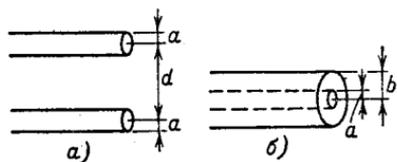


Рис. 11-1. Двухпроводные линии.

$a$  — воздушная;  $b$  — коаксиальный кабель.

Однородная двухпроводная линия является распространенным типом линии; она используется в электропроводной связи и радиотехнике и выполняется в виде параллельных проводников (рис. 11-1,  $a$ ) или коаксиального кабеля (рис. 11-1,  $b$ ).

Уравнения для напряжений и токов такой линии в принципе применимы и к другим типам линий — трехфазным и многопроводным.

Первичные параметры линии зависят от ее конструкции и частоты. Вычисление первичных параметров относится к задачам теории электромагнитного поля, составляющей содержание третьей части курса «Теоретические основы электротехники».

В области радиочастот первичные параметры однородной двухпроводной линии с медными проводами вычисляются по следующим формулам (размеры в метрах).

*Воздушная линия (параллельные провода) (рис. 11-1,  $a$ ):*

$$r \approx \frac{8,33\sqrt{f}}{a} 10^{-8}, \text{ Ом/м (линии);}$$

$$L \approx 0,921 \lg \frac{d}{a} 10^{-6} \text{ Г/м; } C \approx \frac{12,07}{\lg \frac{d}{a}} 10^{-12}, \text{ Г/м.}$$

\* Следует обратить внимание на то, что здесь  $r \neq 1/g$ , так как параметры линии  $r$  и  $g$  не связаны друг с другом: параметр  $r$  — продольный (активное сопротивление проводов), параметр  $g$  — поперечный (активная проводимость изоляции).

Коаксиальный кабель (рис. 11-1, б):

$$r \approx 4,16 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \sqrt{f} \cdot 10^{-8}, \text{ Ом/м}; \quad g = \omega C \operatorname{tg} \delta, \text{ См/м}$$

( $\delta$  — угол диэлектрических потерь);

$$L \approx 0,46 \lg \frac{b}{a} 10^{-6}, \text{ Г/м}; \quad C \approx \frac{0,241\epsilon}{\lg \frac{b}{a}} 10^{-10}, \text{ Ф/м}$$

( $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость изоляции).

С повышением частоты угол потерь  $\delta$  уменьшается. Изоляция, применяемая для коаксиальных кабелей, обычно имеет  $\operatorname{tg} \delta$  порядка  $10^{-3} - 10^{-4}$ .

Активная проводимость  $g$  между параллельными проводами, зависящая от метеорологических условий, состояния изоляторов, к которым подвешены провода, и других факторов, определяется экспериментально.

Практически во многих случаях можно считать, что  $g \approx 0$ .

На высоких частотах ввиду значительного преобладания индуктивного сопротивления токоведущего проводника над его активным сопротивлением последним можно во многих случаях пренебречь.

Следует заметить, что на низких частотах и при малой длине линии, когда емкостная и активная проводимости незначительны, токи в начале и конце линии практически одинаковы; в этом случае линия с достаточной точностью может рассматриваться как цепь с сосредоточенными параметрами. Разграничение понятий «короткая» и «длинная» линии связано с частотой, на которой работает рассматриваемая линия; этот вопрос освещен в § 11-3.

## 11-2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ ЛИНИИ

Напряжение и ток в линии являются функциями двух независимых переменных: пространственной координаты  $x$ , определяющей место наблюдения, и времени  $t$ , определяющего момент наблюдения. Здесь предполагается, что направление координатной оси  $x$  совпадает с направлением оси линии.

Нашей ближайшей задачей является нахождение пространственно-временного распределения тока в линии  $i(x, t)$  и напряжения между проводами  $u(x, t)$ . При этом в общем



случае может рассматриваться передача электромагнитной энергии по линии, когда источник и приемник имеются на обоих концах линии.

Выберем положительное направление тока в линии слева направо (рис. 11-2) и условимся называть «началом» линии левый конец, а «концом» линии — правый конец. Расстояние до произвольной точки линии от начала обозначим через  $x$ , а от конца — через  $x'$ . Таким образом, вся длина линии  $l = x + x'$ .

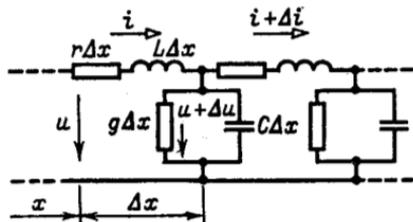


Рис. 11-2. Элементарный участок цепи с равномерно распределенными параметрами.

Выделим элементарный участок линии длиной  $\Delta x$ , находящийся на расстоянии  $x$  от начала. Пользуясь первичными параметрами  $r$ ,  $g$ ,  $L$  и  $C$ , отнесенными к единице длины линии, приблизительно представим рассматриваемый элементарный участок линии в виде последовательно

включенных сопротивления  $r\Delta x$  и индуктивности  $L\Delta x$  и параллельно включенных активной проводимости  $g\Delta x$  и емкости  $C\Delta x$ .

Обозначим:

$u$  — напряжение между верхним и нижним проводами в точке  $x$ ;

$\Delta u$  — приращение напряжения на участке  $\Delta x$ ;

$i$  — ток в точке  $x$ ;

$\Delta i$  — приращение тока на участке  $\Delta x$ .

Уравнения для приращений напряжений и тока на элементе длины  $\Delta x$  запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u &= \left( r i + L \frac{\partial i}{\partial t} \right) \Delta x; \\ -\Delta i &= \left[ g(u + \Delta u) + C \frac{\partial (u + \Delta u)}{\partial t} \right] \Delta x. \end{aligned} \right\} \quad (11-1)$$

Ввиду наличия двух независимых переменных ( $x$  и  $t$ ) уравнения записываются в частных производных.

По мере стремления  $\Delta x$  к нулю степень точности этих уравнений повышается, причем величина второго порядка малости  $\left[ g\Delta u + C \frac{\partial (\Delta u)}{\partial t} \right] \Delta x$  в правой части нижнего уравнения (11-1) может быть опущена.

Итак, линия рассматривается как цепная схема с бесконечно большим числом звеньев, электрические параметры которых бесконечно малы.

Разделив обе части уравнений (11-1) на  $\Delta x$  и перейдя к пределу  $\Delta x = 0$ , получаем дифференциальные уравнения линии:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= ri + L \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= gu + C \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (11-2)$$

Эти уравнения известны в литературе под названием телеграфных уравнений.

Если за начало отсчета принять конец линии, т. е. ввести координату  $x'$ , то уравнения примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x'} &= ri + L \frac{\partial i}{\partial t}; \\ \frac{\partial i}{\partial x'} &= gu + C \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (11-3)$$

Уравнения (11-2) или (11-3) могут быть решены однозначно при использовании начальных и граничных условий. Начальными условиями будут значения напряжения и тока в начале или конце линии в момент времени, принятый за нуль. Граничные условия определяются связями между напряжением и током в начале или конце линии, зависящими от заданного режима работы линии.

Решение указанных выше уравнений дает функциональные зависимости напряжения и тока в линии от переменных  $x$  (или  $x'$ ) и  $t$ .

### 11-3. СИНУСОИДАЛЬНЫЙ РЕЖИМ В ОДНОРОДНОЙ ЛИНИИ

При периодическом режиме под воздействием приложенного к линии синусоидального напряжения в любой точке линии напряжение и ток изменяются синусоидально с частотой источника<sup>1</sup>. Обозначим комплексные действующие значения напряжения и тока на расстоянии  $x$  от начала линии через  $\dot{U} = \dot{U}(x)$  и  $\dot{I} = \dot{I}(x)$ .

<sup>1</sup> Обоснованием высказанного положения является линейность уравнений (11-2) и (11-3), так как только в таких уравнениях сохраняется синусоидальность всех функций.

Применяя комплексную форму записи, перепишем уравнения в комплексном виде:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d\dot{U}}{dx} &= (r + j\omega L) \dot{I}; \\ -\frac{d\dot{I}}{dx} &= (g + j\omega C) \dot{U}. \end{aligned} \right\} \quad (11-4)$$

Ввиду того что комплексные значения  $\dot{U}$  и  $\dot{I}$  не зависят от  $t$  и являются только функциями  $x$ , при переходе от уравнений (11-2) к (11-4) частные производные по  $x$  заменены обыкновенными.

Исключая из системы (11-4) ток  $\dot{I}$ , получаем уравнение относительно  $\dot{U}$ :

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = (r + j\omega L)(g + j\omega C) \dot{U}. \quad (11-5)$$

Аналогично, исключая из (11-4) напряжение  $\dot{U}$ , получаем уравнение относительно  $\dot{I}$ :

$$\frac{d^2\dot{I}}{dx^2} = (r + j\omega L)(g + j\omega C) \dot{I}. \quad (11-6)$$

Обозначим квадратный корень из комплексного множителя при  $\dot{U}$  или  $\dot{I}$  через

$$\gamma = \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)} = \alpha + j\beta \quad (11-7)$$

и назовем эту величину коэффициентом распространения<sup>1</sup>. Смысл такого названия выяснится позже.

Итак, уравнения (11-5) и (11-6) записываются в виде

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = \gamma^2 \dot{U}; \quad \frac{d^2\dot{I}}{dx^2} = \gamma^2 \dot{I}. \quad (11-8)$$

Получились одинаковые однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Решение первого из них имеет вид:

$$\dot{U} = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}. \quad (11-9)$$

Ток  $\dot{I}$  после этого получается подстановкой (11-9) в первое уравнение (11-4):

$$\dot{I} = \frac{1}{r + j\omega L} (A_1 \gamma e^{-\gamma x} - A_2 \gamma e^{\gamma x}) = \sqrt{\frac{g + j\omega C}{r + j\omega L}} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}),$$

<sup>1</sup> В литературе ранее применялось обозначение  $\gamma = \beta + j\alpha$ .



или

$$i = \frac{1}{Z_B} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}), \quad (11-10)$$

где

$$Z_B = \sqrt{\frac{r + j\omega L}{g + j\omega C}} \quad (11-11)$$

называется волновым сопротивлением линии.

Смысл такого названия объяснен дальше.

Подставив (11-7) в (11-9), получим:

$$\dot{U} = A_1 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + A_2 e^{\alpha x} e^{j\beta x}.$$

Мгновенное значение напряжения в точке  $x$  равно мнимой части выражения  $\sqrt{2} \dot{U} e^{j\omega t}$ :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \text{Im} [\sqrt{2} A_1 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} e^{j\omega t} + \sqrt{2} A_2 e^{\alpha x} e^{j\beta x} e^{j\omega t}] = \\ &= \sqrt{2} |A_1| e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_1 - \beta x) + \\ &+ \sqrt{2} |A_2| e^{\alpha x} \sin(\omega t + \psi_2 + \beta x); \end{aligned} \quad (11-12)$$

здесь  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — аргументы комплексных величин  $A_1$  и  $A_2$ .

Таким образом, мгновенное значение напряжения в любой точке линии складывается из двух функций.

Рассмотрим вначале первую из этих слагающих функций.

Если считать точку  $x$  фиксированной и рассматривать изменение напряжения в данной точке в зависимости от времени, то первая слагающая выражения (11-12) представит собой синусоидальную функцию с постоянной амплитудой.

Если же считать момент времени  $t$  фиксированным и рассматривать изменение мгновенного напряжения вдоль линии (т. е. в зависимости от  $x$ ), то получим затухающую синусоидальную волну напряжения, амплитуда которой  $\sqrt{2} |A_1| e^{-\alpha x}$  убывает с ростом  $x$ , т. е. по мере удаления от начала линии к концу.

Величина  $\alpha$ , характеризующая изменение амплитуды волны на единицу длины линии, называется коэффициентом ослабления<sup>1</sup>, а величина  $\beta$ , равная изменению фазы на единицу длины линии, называется коэффициентом фазы.

<sup>1</sup> Ранее применялся термин коэффициент затухания.

Убывание амплитуды волны вдоль линии обусловливается потерями в линии, а изменение фазы — конечной скоростью распространения электромагнитных колебаний.

Оба эти коэффициента  $\alpha$  и  $\beta$  входят в комплексный параметр  $\gamma = \alpha + j\beta$ , который, следовательно, характеризует распространение волны напряжения и тока по линии.

На рис. 11-3, а буквой  $\lambda$  обозначена длина волны напряжения, равная расстоянию между двумя точками ли-

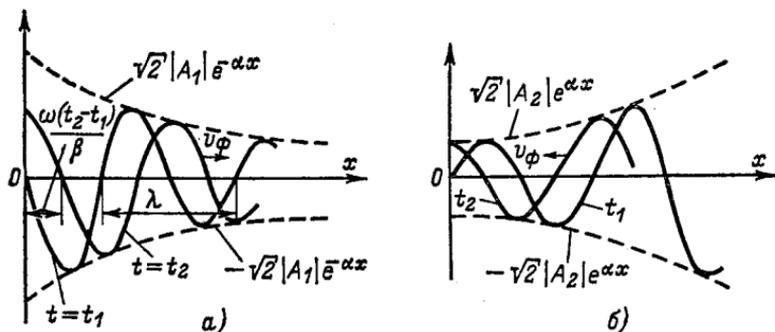


Рис. 11-3. Прямая (падающая — а) и обратная (отраженная — б) волны.

нии, в которых фазы рассматриваемой слагающей напряжения различаются на  $2\pi$ . Следовательно,

$$[\omega t + \psi_1 - \beta x] - [\omega t + \psi_1 - \beta (x + \lambda)] = 2\pi,$$

откуда

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}. \quad (11-13)$$

Полученная формула выражает зависимость, существующую между длиной волны и коэффициентом фазы линии.

На рис. 11-3, а изображены волны напряжения, соответствующие двум следующим друг за другом моментам времени:  $t_1$  и  $t_2$ .

С течением времени волна перемещается от начала линии к ее концу; она носит название прямой, или падающей, волны.

Скорость перемещения падающей волны вдоль линии, называемая фазовой скоростью<sup>1</sup>, оп-

<sup>1</sup> Скорость распространения группы смежных по частоте волн характеризуется понятием групповой скорости [Л, 1].



ределяется как скорость перемещения точки, фаза колебания в которой остается постоянной. Это условие записывается для прямой волны в виде

$$\omega t + \psi_1 - \beta x = \text{const},$$

откуда

$$\frac{d}{dt} (\omega t + \psi_1 - \beta x) = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{dx}{dt} = v_{\phi} = \frac{\omega}{\beta}. \quad (11-14)$$

Аналогичное исследование второго слагаемого выражения (11-12) показывает, что для произвольного момента времени оно представляет синусоидальную волну, амплитуда которой  $\sqrt{2}|A_2|e^{\alpha x}$  возрастает с увеличением  $x$ , т. е. по мере удаления от начала линии к ее концу. С течением времени волна перемещается от конца линии к ее началу (рис. 11-3, б); она называется *о б р а т н о й*, или *о т р а ж е н н о й*, *в о л н о й*.

Фазовая скорость обратной волны получается равной  $v_{\phi} = -\frac{\omega}{\beta}$ ; знак минус указывает, что обратная волна движется в направлении, противоположном направлению прямой волны.

Итак, мгновенное напряжение можно рассматривать как сумму двух волн, движущихся в противоположных направлениях, причем каждая из этих волн затухает в направлении движения.

На основании (11-13) и (11-14)

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{\omega}{v_{\phi}} = \frac{2\pi f}{v_{\phi}}; \\ \lambda &= \frac{v_{\phi}}{f} = v_{\phi} T, \end{aligned} \right\} \quad (11-15)$$

т. е. за время, равное одному периоду, как падающая, так и отраженная волны перемещаются на расстояние, равное длине волны.

Линии, физическая длина которых соизмерима с длиной волны, считаются *д л и н н ы м и* *л и н и я м и*. При достаточно высоких частотах практически любая протяженная электрическая цепь становится «длинной» по отношению к длине волны.

Как будет показано ниже, фазовая скорость в воздушной линии близка к скорости света (около  $3 \cdot 10^8$  м/с),



и поэтому частоте 50 Гц будет соответствовать длина волны 6000 км, а частоте  $3 \cdot 10^9$  Гц — длина волны 10 см. Следовательно, в первом случае длинной линией будет линия, измеряемая многими сотнями или тысячами километров, а во втором случае — цепь протяженностью в несколько сантиметров.

Возвращаясь к уравнениям (11-9) и (11-10) и записывая прямую и обратную волны в комплексной форме, имеем:

$$\dot{U} = \dot{U}_n + \dot{U}_0; \quad \dot{I} = \frac{\dot{U}_n}{Z_B} - \frac{\dot{U}_0}{Z_B} = \dot{I}_n - \dot{I}_0,$$

где

$$\dot{U}_n = A_1 e^{-\gamma x}; \quad \dot{U}_0 = A_2 e^{\gamma x}.$$

Напряжение и ток прямой и соответственно обратной волн связаны законом Ома:

$$\frac{\dot{U}_n}{\dot{I}_n} = \frac{\dot{U}_0}{\dot{I}_0} = Z_B.$$

Это соотношение объясняет смысл названия  $Z_B$  — волновое сопротивление.

Постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$ , входящие в (11-9) и (11-10), находятся в зависимости от напряжения и тока в начале линии (граничные условия), если они заданы. При  $x = 0$

$$\dot{U}(0) = \dot{U}_1 = A_1 + A_2; \quad Z_B \dot{I}(0) = Z_B \dot{I}_1 = A_1 - A_2,$$

откуда

$$A_1 = \frac{\dot{U}_1 + Z_B \dot{I}_1}{2}; \quad A_2 = \frac{\dot{U}_1 - Z_B \dot{I}_1}{2}.$$

Введем понятие коэффициента отражения волны в начале линии:

$$n_1 = \frac{\dot{U}_0(0)}{\dot{U}_n(0)} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\dot{U}_1 - Z_B \dot{I}_1}{\dot{U}_1 + Z_B \dot{I}_1} = \frac{Z_1 - Z_B}{Z_1 + Z_B}, \quad (11-16)$$

где  $Z_1 = \dot{U}_1 / \dot{I}_1$  — входное сопротивление линии.

Подстановка выражений для  $A_1$  и  $A_2$  в (11-9) и (11-10) с учетом (11-16) дает:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \frac{\dot{U}_1 + Z_B \dot{I}_1}{2} (e^{-\gamma x} + n_1 e^{\gamma x}); \\ \dot{I} &= \frac{\dot{U}_1 + Z_B \dot{I}_1}{2Z_B} (e^{-\gamma x} - n_1 e^{\gamma x}). \end{aligned} \right\} \quad (11-17)$$



Если заданы граничные условия на конце линии, то удобнее отсчитывать расстояние от конца, приняв координату  $x'$ .

Заменяя в уравнениях (11-9) и (11-10)  $x$  на  $(l - x')$  и используя заданные граничные условия  $\dot{U}(l) = \dot{U}_2$ ;  $\dot{I}(l) = \dot{I}_2$ , получаем для  $A_1$  и  $A_2$  следующие выражения:

$$A_1 = \frac{\dot{U}_2 + Z_B \dot{I}_2}{2} e^{\gamma l}, \quad A_2 = \frac{\dot{U}_2 - Z_B \dot{I}_2}{2} e^{-\gamma l}.$$

Подставив их в (11-9) и (11-10), получим окончательные выражения для  $\dot{U}$  и  $\dot{I}$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \frac{\dot{U}_2 + Z_B \dot{I}_2}{2} (e^{\gamma x'} + n_2 e^{-\gamma x'}); \\ \dot{I} &= \frac{\dot{U}_2 + Z_B \dot{I}_2}{2 Z_B} (e^{\gamma x'} - n_2 e^{-\gamma x'}), \end{aligned} \right\} \quad (11-18)$$

где аналогично предыдущему  $n_2$  — коэффициент отражения в конце линии:

$$n_2 = \frac{\dot{U}_0(l)}{\dot{U}_n(l)} = \frac{A_2 e^{\gamma l}}{A_1 e^{-\gamma l}} = \frac{\dot{U}_2 - Z_B \dot{I}_2}{\dot{U}_2 + Z_B \dot{I}_2} = \frac{Z_2 - Z_B}{Z_2 + Z_B}; \quad (11-16a)$$

$Z_2 = \dot{U}_2 / \dot{I}_2$  — выходное сопротивление на конце линии или в случае приемника входное сопротивление его.

Если сопротивление приемника равно волновому сопротивлению линии ( $Z_2 = Z_B$ ), то коэффициент отражения равен нулю ( $n_2 = 0$ ). При этом в линии имеется только одна прямая волна; обратная волна отсутствует.

Это важное свойство реализуется в линиях связи, отражения в которых нежелательны по ряду причин.

Во-первых, если затухание в линии невелико, то отраженная волна создает эффект эха в начале линии.

Во-вторых, отражения связаны с потерей энергии. Часть энергии, достигшая приемного конца, не поступает в приемник, а возвращается по линии в виде энергии отраженной волны. При этом возникают дополнительные потери энергии в сопротивлении  $r$  и проводимости  $g$  линии. Если сопротивление источника, питающего линию, не равно волновому сопротивлению линии, то отраженная волна, достигнув начала линии, претерпевает повторное отражение и т. д. Происходящая вследствие этого потеря энергии в линии понижает общий к. п. д. передачи.

В-третьих, в случае отражений может иметь место нежелательное увеличение напряжения или тока в линии (см. § 11-6).



Вследствие указанных причин на практике стремятся согласовать сопротивление приемника с волновым сопротивлением линии. При согласовании нагрузки с линией выражения (11-18) упрощаются: с учетом того, что  $Z_B I_2 = \dot{U}_2$ , находим:

$$\dot{U} = \dot{U}_2 e^{\gamma x'}; \quad \dot{I} = \dot{I}_2 e^{\gamma x'}. \quad (11-19)$$

Эти выражения показывают, что при перемещении точки наблюдения вдоль линии, нагруженной согласованно на конце, в направлении от конца к началу линии, модуль напряжения возрастает в  $e^{\alpha x'}$  раз, а фаза — на  $\beta x'$  рад.

Уравнения (11-19) аналогичны уравнениям симметричного четырехполюсника при согласованной нагрузке. Поэтому показатель распространения на всю длину линии  $\gamma l$  эквивалентен мере передачи четырехполюсника  $g$ , а волновое сопротивление линии  $Z_B$  аналогично характеристическому сопротивлению четырехполюсника  $Z_C$ .

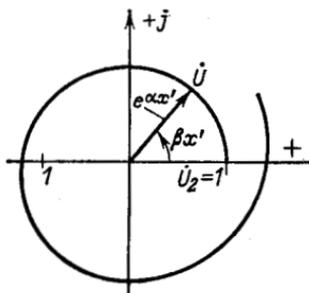


Рис. 11-4. Геометрическое место конца вектора напряжения при согласованной нагрузке.

Выражения (11-19) показывают, что при согласованной нагрузке ( $Z_2 = Z_B$ ) геометрическим местом конца вектора напряжения  $\dot{U}$  является логарифмическая спираль. На рис. 11-4, иллюстрирующем сказанное,

принято  $\dot{U}_2 = U_2 \angle 0^\circ$  (вектор  $\dot{U}_2$  направлен по действительной оси).

Большой интерес представляет также рассмотрение двух частных случаев нагрузки линии, а именно случаев, когда линия на конце разомкнута (режим холостого хода) или замкнута (режим короткого замыкания). В первом случае  $Z_2 = \infty$  и соответственно коэффициент отражения  $n_2 = 1$ ; во втором случае  $Z_2 = 0$  и  $n_2 = -1$ .

К рассмотрению этих двух случаев мы вернемся несколько позже.

Система уравнений (11-18) может быть переписана в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \frac{e^{\gamma x'} + e^{-\gamma x'}}{2} + Z_B \dot{I}_2 \frac{e^{\gamma x'} - e^{-\gamma x'}}{2}; \\ \dot{I} &= \frac{\dot{U}_2}{Z_B} \frac{e^{\gamma x'} - e^{-\gamma x'}}{2} + \dot{I}_2 \frac{e^{\gamma x'} + e^{-\gamma x'}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (11-20)$$

Уравнения (11-18) и (11-20) представляют собой уравнения линии в показательной (или волновой) форме при отсчете расстояния от конца линии. Они преобразуются с помощью гиперболических функций:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x' + Z_B \dot{I}_2 \operatorname{sh} \gamma x'; \\ \dot{I} &= \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma x' + \frac{1}{Z_B} \dot{U}_2 \operatorname{sh} \gamma x'. \end{aligned} \right\} \quad (11-21)$$

Положив в этих уравнениях  $x' = l$ , получим уравнения линии в гиперболической форме, выражающие напряжение и ток в начале через напряжение и ток в конце линии:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + Z_B \dot{I}_2 \operatorname{sh} \gamma l; \\ \dot{I}_1 &= \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \frac{1}{Z_B} \dot{U}_2 \operatorname{sh} \gamma l. \end{aligned} \right\} \quad (11-22)$$

Обращает на себя внимание сходство полученных уравнений с уравнениями симметричного четырехполюсника (см. § 9-7). Эти уравнения показывают, что однородная линия представляет собой симметричный четырехполюсник с характеристическими параметрами  $g = \gamma l$  и  $Z_c = Z_B$ .

Применяя параметры  $\| A \|$  четырехполюсника, получим связь между коэффициентами его и параметрами линии:

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= A_{22} = \operatorname{ch} \gamma l; \\ A_{12} &= Z_B \operatorname{sh} \gamma l; \\ A_{21} &= \frac{1}{Z_B} \operatorname{sh} \gamma l. \end{aligned} \right\} \quad (11-23)$$

Показательная и гиперболическая формы записи уравнений линии (11-18) и (11-21) дополняют друг друга и применяются в зависимости от условий задачи.

Преимущество показательной формы записи уравнений заключается в большей наглядности рассмотрения физических процессов в линии с помощью прямых и обратных волн и удобстве построения геометрических мест на комплексной плоскости. Поэтому уравнения (11-18) широко использованы в последующих параграфах данной главы.

Гиперболическая форма записи уравнений также представляет в ряде случаев известные удобства с точки зрения исследования и расчета электрических величин в линии и их фазовых соотношений.

Рассмотрение линии как четырехполюсника базируется обычно на гиперболической форме записи уравнений.



#### 11-4. ВТОРИЧНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ОДНОРОДНОЙ ЛИНИИ

Вторичными, или характеристическими, параметрами линии являются коэффициент ослабления, коэффициент фазы  $\beta$  и волновое сопротивление  $Z_{в}$ , которые в свою очередь выражаются через первичные параметры линии и частоту.

Из выражения

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)} = \\ &= \sqrt{rg - \omega^2 LC + j\omega(Lg + Cr)} = \alpha + j\beta\end{aligned}$$

следует, что

$$\alpha^2 + j2\alpha\beta - \beta^2 = rg - \omega^2 LC + j\omega(Lg + Cr),$$

откуда

$$\alpha^2 - \beta^2 = rg - \omega^2 LC; \quad 2\alpha\beta = \omega Lg + \omega Cr.$$

Совместное решение этих уравнений дает:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} [rg - \omega^2 LC + \sqrt{(r^2 + \omega^2 L^2)(g^2 + \omega^2 C^2)}]}; \quad (11-24)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} [\omega^2 LC - rg + \sqrt{(r^2 + \omega^2 L^2)(g^2 + \omega^2 C^2)}]}. \quad (11-25)$$

Из полученных выражений следует, что  $\alpha$  и  $\beta$  в общем случае зависят от частоты. Однако, как показывает исследование, в отличие от коэффициента ослабления, который изменяется в сравнительно ограниченных пределах, коэффициент фазы неограниченно растет с частотой.

Формула (11-25) позволяет выразить фазовую скорость распространения электромагнитной волны через первичные параметры линии и частоту по формуле (11-14).

Выражения (11-24) и (11-25) неудобны для практического использования ввиду их громоздкости. Существует ряд приближенных расчетных формул для вычисления вторичных параметров линии, учитывающих, что в области высоких частот (порядка 1 МГц и выше) сопротивление  $r$  весьма мало по сравнению с  $\omega L$ , а проводимость  $g$  ничтожно мала по сравнению с  $\omega C$ . Первое допущение ( $\omega L \gg r$ ) обусловлено тем, что индуктивное сопротивление прямо пропорционально частоте, между тем как сопротивление проводов  $r$  пропорционально квадратному корню из частоты вследствие поверхностного эффекта (см. § 11-1). Второе допущение справедливо для высокочастотных фидеров, которые, будучи «длинными» по сравнению с длиной



волны, имеют весьма малую физическую длину и поэтому могут иметь надежную изоляцию между проводками. Особенно ничтожно мала проводимость  $g$  кабельных линий.

Используя для выражения

$$\gamma = j\omega \sqrt{LC} \left(1 - j \frac{r}{\omega L}\right)^{1/2} \left(1 - j \frac{g}{\omega C}\right)^{1/2} \quad (11-26)$$

бином Ньютона, ограничиваясь первыми двумя членами разложения

$$\gamma \approx j\omega \sqrt{LC} \left(1 - j \frac{r}{2\omega L}\right) \left(1 - j \frac{g}{2\omega C}\right) \quad (11-27)$$

и пренебрегая ввиду малости слагаемым  $-j \frac{rg}{4\omega \sqrt{LC}}$ , получим окончательно:

$$\alpha \approx \frac{r}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{g}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}; \quad (11-28)$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{LC}. \quad (11-29)$$

Эти формулы представляют собой пределы, к которым стремятся коэффициент ослабления и коэффициент фазы с ростом частоты.

Выражение (11-28) не следует понимать в том смысле, что  $\alpha$  не зависит от частоты; входящие в него параметры  $r$  и  $g$  сами являются функциями частоты (см. § 11-1).

Первое слагаемое в правой части выражения (11-28) определяет ту долю ослабления, которая обусловливается продольным активным сопротивлением линии. Второе слагаемое определяет долю ослабления, которая вносится в передачу вследствие наличия поперечной активной проводимости линии.

Для уменьшения потерь при передаче электромагнитной энергии по линии стремятся к тому, чтобы сопротивление линии  $r$  и проводимость изоляции  $g$  были по возможности малы.

Фазовая скорость согласно (11-14) и (11-29) равна:

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (11-30)$$

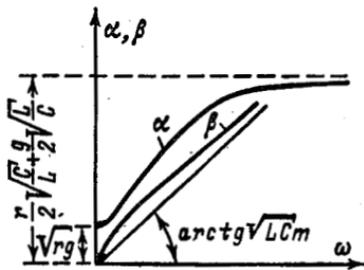
Это предельная фазовая скорость распространения волны вдоль линии при бесконечно большой частоте. При постоянном токе ( $\omega = 0$ ) понятия коэффициент фазы и фазовая скорость теряют физический смысл; на основа-



нии выведенной ранее формулы для  $\gamma$  (11-7) при  $\omega = 0$

$$\alpha = \sqrt{rg}; \quad \beta = 0.$$

На рис. 11-5 показан характер изменений  $\alpha$  и  $\beta$  в зависимости от частоты; коэффициент  $\beta$  с ростом частоты асимптотически приближается к прямой, образующей с осью  $\omega$  угол



$$\arctg(\sqrt{LC} m),$$

где  $m$  — масштабный коэффициент.

Для кабельных линий характерна резко выраженная емкостная проводимость  $\omega C$ , по сравнению с которой проводимость изоляции  $g$  ничтожно мала. Кроме того, если частота не очень велика, то

Рис. 11-5. Частотные характеристики  $\alpha$  и  $\beta$ .

индуктивное сопротивление  $\omega L$  мало по сравнению с активным сопротивлением  $r$  из-за малого расстояния между жилами. Поэтому в случае кабельной линии, пренебрегая параметрами  $g$  и  $L$  по сравнению с  $r$  и  $C$ , получаем упрощенные расчетные формулы

$$\gamma \approx \sqrt{j r \omega C} = \sqrt{r \omega C} \angle 45^\circ$$

или

$$\gamma \approx \sqrt{r \omega C} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Следовательно,

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{r \omega C}{2}}. \quad (11-31)$$

Соответственно фазовая скорость распространения волны в кабельной линии равна

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} \approx \sqrt{\frac{2\omega}{rC}}, \quad (11-32)$$

т. е. прямо пропорциональна корню квадратному из частоты.

В теории электромагнитного поля доказывается, что произведение удельных значений индуктивности и емко-

сти в линии

$$LC = \epsilon\mu/c^2, \quad (11-33)$$

где  $c$  — скорость света в пустоте (около  $3 \cdot 10^8$  м/с);  $\epsilon$  и  $\mu$  — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, окружающей токоведущие проводники.

Предел, к которому с ростом частоты стремится фазовая скорость волны, равен на основании (11-30) и (11-33):

$$v_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

В случае воздушной линии  $\epsilon \approx 1$  и  $\mu \approx 1$ , и потому фазовая скорость в пределе стремится к скорости света в пустоте.

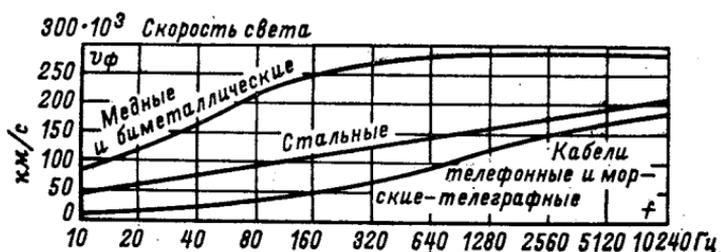


Рис. 11-6. Зависимость фазовой скорости распространения волны от частоты и типа линии,

В случае кабельной линии  $\epsilon = 4 \div 5$  и поэтому предельная фазовая скорость примерно вдвое меньше скорости света в пустоте.

Рисунок 11-6 иллюстрирует зависимость фазовой скорости волны от частоты и типа линии.

Волновое сопротивление линии

$$Z_{\text{в}} = \sqrt{\frac{r + j\omega L}{g + j\omega C}} = \sqrt{\frac{r}{g} \frac{1 + j\omega \frac{L}{r}}{1 + j\omega \frac{C}{g}}} \quad (11-34)$$

при постоянном токе ( $\omega = 0$ ) и бесконечной частоте ( $\omega = \infty$ ) имеет действительные значения

$$z_{\text{в}} = \sqrt{\frac{r}{g}} \quad (\omega = 0)$$

и

$$z_{\text{в}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (\omega = \infty).$$



В остальной части диапазона частот волновое сопротивление линии имеет емкостной характер, так как обычно

$\frac{C}{g} > \frac{L}{r}$  [аргумент знаменателя в правой части (11-34) больше аргумента числителя].

На рис. 11-7 показаны кривые изменения модуля  $Z_B$  и угла  $\varphi$  волнового сопротивления линии в зависимости от частоты.

Подставив выражения для  $L$  и  $C$  из § 11-1 в формулу  $z_B = \sqrt{L/C}$ , получим приближенные расчетные формулы для высоких частот в зависимости от размеров:

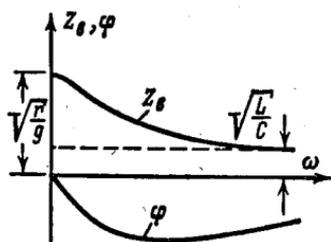


Рис. 11-7. Зависимости модуля и угла волнового сопротивления линии от частоты.

$$\left. \begin{aligned} z_B &= 276 \lg \frac{d}{a} \quad (\text{воздушная линия}); \\ z_B &= \frac{138}{\sqrt{\epsilon}} \lg \frac{b}{a} \quad (\text{коаксиальный кабель}). \end{aligned} \right\} \quad (11-35)$$

Средние значения  $z_B$  для воздушных линий 400—500 Ом, для кабелей 50—70 Ом.

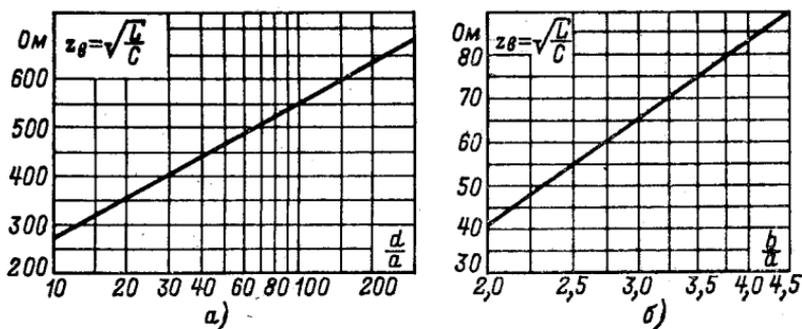


Рис. 11-8. Волновое сопротивление линии, а — воздушной; б — кабельной.

Рисунок 11-8 иллюстрирует графические зависимости  $z_B$  от  $d/a$  и  $b/a$  для воздушных и кабельных линий, построенные по формулам (11-35).

## 11-5. ЛИНИЯ БЕЗ ИСКАЖЕНИЙ

Сигналы, передаваемые по линии связи, представляют собой совокупность множества различных частот: дискретных — в случае периодических несинусоидальных сигналов (см. гл. 13) и образующих непрерывный спектр — в случае непериодических сигналов (см. гл. 16).

Неискаженной передачей сигнала называется такая передача, при которой форма сигнала в начале и конце линии одинакова, т. е. все ординаты кривой напряжения или тока в конце линии прямо пропорциональны соответствующим ординатам кривой в начале линии. Такое явление имеет место в том случае, когда коэффициент ослабления линии, а также фазовая скорость на всех частотах одинаковы.

Неодинаковое затухание на разных частотах создает так называемые амплитудные искажения, а неодинаковая скорость волн на разных частотах — фазовые искажения.

Согласно (11-31) и (11-32) коэффициент ослабления и фазовая скорость в случае кабельных линий пропорциональны квадратному корню из частоты. В случае воздушных линий также существует зависимость  $\alpha$  и  $v_\phi$  от частоты. В результате этого получаются амплитудные и фазовые искажения.

Итак, для неискаженной передачи требуется, чтобы коэффициент ослабления  $\alpha$  не зависел от частоты, а коэффициент фазы  $\beta$  был прямо пропорционален частоте; в последнем случае фазовая скорость  $v_\phi = \omega/\beta$  получается не зависящей от частоты.

Такое положение имеет место при условии, что

$$\frac{L}{r} = \frac{C}{g}. \quad (11-36)$$

В этом случае коэффициент распространения равен:

$$\gamma = \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)} = \sqrt{rg \left(1 + j\omega \frac{L}{r}\right) \left(1 + j\omega \frac{C}{g}\right)};$$

с учетом (11-36)

$$\gamma = \sqrt{rg} + j\omega \sqrt{rg} \frac{L}{r}$$

или

$$\gamma = \sqrt{rg} + j\omega \sqrt{LC}.$$

Если считать, что первичные параметры линии не зависят от частоты, то коэффициент ослабления в данном



случае будет постоянен:

$$\alpha = \sqrt{rg}, \quad (11-37)$$

а коэффициент фазы — прямо пропорционален частоте:

$$\beta = \omega \sqrt{LC}. \quad (11-38)$$

Линия, параметры которой удовлетворяют условию (11-36), называется линией без искажений, поскольку любые сигналы распространяются по ней с сохранением их формы. Линия без искажений является одновременно и линией с минимальным затуханием, которое только и возможно при заданных параметрах  $r$  и  $g$ .

Волновое сопротивление линии без искажений — действительное число, что равносильно активному сопротивлению, не зависящему от частоты; в соответствии с (11-34) оно выражается простой формулой

$$z_{\text{в}} = \sqrt{\frac{r}{g}} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (11-39)$$

Фазовая скорость в линии без искажений постоянна и совпадает с полученным ранее выражением (11-30) для предельной скорости распространения волны вдоль линии при бесконечно большой частоте:

$$v_{\text{ф}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Для устранения искажений, вызываемых несогласованностью сопротивления приемника с сопротивлением линии, т. е. во избежание возникновения отражений на приемном конце, сопротивление приемника должно быть равно  $z_{\text{в}}$ . Коэффициент полезного действия линии имеет в этом случае наибольшее возможное значение, равное  $e^{-2\alpha l}$ , как в линии при согласованной нагрузке.

Ввиду того что волновое сопротивление линии без искажений является активным, при согласованной нагрузке напряжение и ток в любой точке линии совпадают по фазе. Отношение мгновенных значений напряжения и тока в любой точке такой линии равно:

$$\frac{u}{i} = \sqrt{\frac{L}{C}},$$

откуда

$$\frac{Li^2}{2} = \frac{Cu^2}{2}. \quad (11-40)$$



Следовательно, на любом отрезке линии без искажений, нагруженной согласованно, энергия магнитного поля в каждый момент времени равна энергии электрического поля.

Следует заметить, что на практике условие (11-36), как правило, не выполняется; отношение  $L/r$  обычно значительно меньше отношения  $C/g$ . Вследствие этого затухание линии всегда превышает минимальное. Наименее соответствуют условию (11-36) кабельные линии.

Чтобы линия наиболее соответствовала условию (11-36), следовало бы изменить какой-либо первичный параметр, например уменьшить  $r$  или  $C$  либо увеличить  $g$  или  $L$ .

Уменьшение активного сопротивления  $r$  возможно за счет применения проводов большего диаметра, что, однако, значительно удорожало бы линию. Увеличение проводимости изоляции  $g$  невыгодно, так как при этом возросло бы затухание линии.

Наилучшим средством для приближения первичных электрических параметров к оптимальному соотношению (11-36) является искусственное увеличение индуктивности включением в линию через определенное расстояние индуктивных катушек или применением кабеля, проводящие жилы которого обмотаны тонкой лентой из материала с высокой магнитной проницаемостью [Л. 1].

#### 11-6. ЛИНИЯ БЕЗ ПОТЕРЬ

Независимо от того, соблюдается ли оптимальное соотношение первичных параметров (11-36) или не соблюдается, во всех случаях желательно, чтобы активное сопротивление  $r$  и проводимость изоляции  $g$  были по возможности малы (для уменьшения потерь энергии).

В воздушных линиях обычно индуктивное сопротивление линии  $\omega L$  превышает активное сопротивление  $r$ , а емкостная проводимость  $\omega C$  превышает активную проводимость  $g$ . С ростом частоты разница между указанными величинами становится еще более значительной.

В ряде случаев оказывается полезным в первом приближении рассматривать линию, не имеющую потерь, т. е. пренебрегать активными сопротивлением и проводимостью по сравнению с соответствующими реактивными составляющими. Такая идеализация допускается для приближенной качественной и количественной оценки исследуемых явлений. При этом весьма упрощаются расчетные

выражения и гиперболические уравнения линии переходят в тригонометрические.

Итак, основным исходным предложением, которое делают при рассмотрении линии без потерь, является приближенное условие, что  $r \approx 0$  и  $g \approx 0$ . В этом случае вторичные параметры линии принимают весьма простой вид, а именно:

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC}; \quad \alpha = 0; \quad \beta = \omega\sqrt{LC}; \quad Z_B = z_B = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Следовательно, в линии без потерь ослабление отсутствует. Ввиду постоянства фазовой скорости

$$v_\phi = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

отсутствуют также фазовые искажения.

Выражения для коэффициента фазы, фазовой скорости и волнового сопротивления линии без потерь совпадают с выражениями, полученными для линии без искажений. Следовательно, все сказанное о линии без искажений полностью относится и к линии без потерь.

Ввиду того, что гиперболические функции с мнимым аргументом преобразуются в тригонометрические функции, гиперболические уравнения линии (11-21) принимают тригонометрическую форму:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \cos \beta x' + jz_B \dot{I}_2 \sin \beta x'; \\ \dot{I} &= \dot{I}_2 \cos \beta x' + j \frac{\dot{U}_2}{z_B} \sin \beta x'. \end{aligned} \right\} \quad (11-41)$$

Эти уравнения используются ниже при рассмотрении стоячих волн в линии без потерь (см. § 11-7).

Энергия, передаваемая по линии, складывается из энергии электрического и магнитного полей.

В том случае, когда к концу линии без потерь присоединено сопротивление, равное волновому, на любом отрезке линии соблюдается условие (11-40), полученное для линии без искажений. При этом вся энергия, доставляемая падающей волной, поглощается в сопротивлении нагрузки.

Если сопротивление нагрузки отлично от волнового, то в месте присоединения нагрузки энергия перераспределяется между полями, в результате чего возникают отражения.



В предельном случае, когда линия на конце разомкнута, падающая волна встречает бесконечно большое сопротивление; ток в конце линии обращается в нуль, и соответственно энергия магнитного поля переходит в энергию электрического поля. Напряжение на разомкнутом конце линии удваивается, и возникает отраженная волна того же знака, что и падающая [ $n_2 = 1$ ; см. (11-16a)].

В другом предельном случае, когда линия на конце замкнута накоротко, падающая волна встречает сопротивление, равное нулю, напряжение в конце линии обращается в нуль и соответственно энергия электрического поля переходит в энергию магнитного поля. Ток на короткозамкнутом конце линии удваивается, и возникает отраженная волна, знак которой противоположен знаку падающей волны ( $n_2 = -1$ ).

При активной нагрузке и  $r_2 > z_B$  коэффициент отражения  $n_2 > 0$ ;  $n_2 < 0$  при  $r_2 < z_B$ . Поэтому в первом случае возрастает напряжение и убывает ток, а во втором случае, наоборот, убывает напряжение и возрастает ток по сравнению с режимом согласованной нагрузки ( $n_2 = 0$ ).

#### 11-7. РЕЖИМЫ РАБОТЫ ЛИНИИ БЕЗ ПОТЕРЬ. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Исследуем закон распределения действующих напряжения и тока вдоль линии без потерь. С этой целью воспользуемся уравнениями линии (11-18) и (11-41) в комплексной и гиперболической формах.

Приняв в (11-18) мнимый коэффициент распространения  $\gamma = j\beta = j2\pi/\lambda$ , получим для любой точки линии на расстоянии  $x'$  от конца:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \frac{1}{2} U_2 \left( 1 + \frac{z_B}{Z_2} \right) \left( e^{j \frac{2\pi}{\lambda} x'} + n_2 e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} x'} \right); \\ \dot{I} &= \frac{1}{2z_B} \dot{U}_2 \left( 1 + \frac{z_B}{Z_2} \right) \left( e^{j \frac{2\pi}{\lambda} x'} - n_2 e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} x'} \right). \end{aligned} \right\} \quad (11-42)$$

Входящий в эти уравнения коэффициент отражения

$$n_2 = \frac{Z_2 - z_B}{Z_2 + z_B}$$

представляет собой в общем случае комплексную величину.

Выражения (11-42) наглядно свидетельствуют о том, что комплексное напряжение в любой точке  $x'$  складывается



из падающей и отраженной волн напряжения, амплитуды которых находятся в соотношении  $1 : |n_2|$ ; в свою очередь комплексный ток равен разности падающей и отраженной волн тока с тем же соотношением амплитуд.

Точкам  $x' = k \frac{\lambda}{2}$  ( $k$  — целое число), удовлетворяющим условию

$$\left| e^{j \frac{2\pi}{\lambda} x'} + n_2 e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} x'} \right| = 1 + |n_2|, \quad (11-43)$$

соответствует максимальное действующее значение  $U$ , так как при этом фазы падающей и отраженной волн напряжения совпадают. На расстоянии  $\lambda/4$  от этих точек падающая и отраженная волны оказываются в противофазе и действующее напряжение имеет минимум. При этом удовлетворяется условие

$$\left| e^{j \frac{2\pi}{\lambda} x'} - n_2 e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} x'} \right| = 1 - |n_2|. \quad (11-44)$$

Координаты максимумов и минимумов  $U$ , являющиеся многозначными функциями  $n_2$  и  $\lambda$ , не зависят от времени, т. е. с течением времени они остаются на одном и том же месте; минимум  $U$  располагается посередине между двумя соседними максимумами  $U$ , причем расстояние между ближайшими максимумами (или минимумами) составляет  $\lambda/2$ .

Таким образом, кривая действующих значений напряжения вдоль линии без потерь представляет собой волнообразную кривую, максимумы и минимумы которой чередуются (см. дальше рис. 11-10, б и г).

Аналогичные рассуждения приводят к выводу, что и кривая действующих значений тока вдоль линии без потерь представляет собой волнообразную кривую, смещенную относительно кривой действующих значений напряжения на четверть длины волны. Места максимумов напряжения совпадают с местами минимумов тока и, наоборот, минимумы  $U$  совпадают с максимумами  $I$ .

При отсутствии отраженной волны ( $n_2 = 0$ ) действующие значения  $U$  и  $I$  вдоль линии без потерь не изменяются.

Чем больше приближается коэффициент отражения  $|n_2|$  к единице, тем больше разнятся максимумы и минимумы  $U$  (или  $I$ ).

При  $|n_2| = 1$ , т. е. при равенстве амплитуд прямой и обратной волн, в линии устанавливаются стоячие

волны напряжения и тока. Кривые действующих значений  $U$  и  $I$  вдоль линии представляют собой в этом случае «выпрямленные» синусоиды; на линии образуются узлы, т. е. точки, в которых  $U$  или  $I$  равны нулю, и пучности, т. е. точки, в которых  $U$  или  $I$  максимальны.

Из сказанного выше следует, что узлы напряжения совпадают с пучностями тока и, наоборот, узлы тока сов-

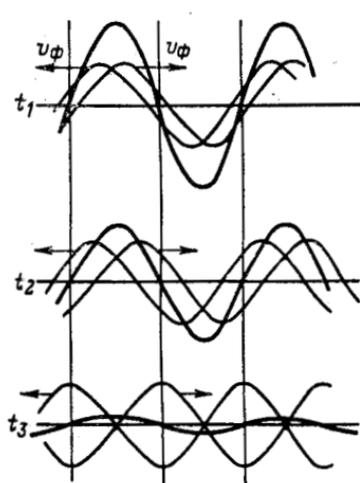


Рис. 11-9. Сложение прямой и обратной волн.

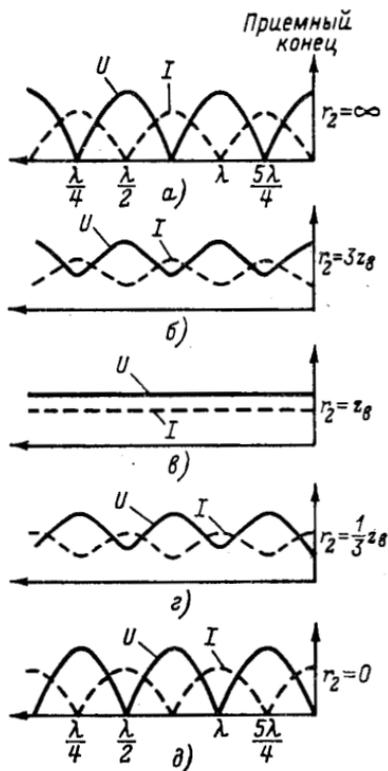


Рис. 11-10. Действующие значения напряжения и тока вдоль линии без потерь.

падают с пучностями напряжения. Соответственно узлы (или пучности) напряжения и тока сдвинуты на четверть длины волны друг относительно друга.

На рис. 11-9 в виде примера показано сложение прямой и обратной волн напряжения, имеющих одинаковые амплитуды, для трех моментов времени:  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t_3$ . Сумма бегущих в противоположные стороны волн образует стоячую волну, показанную на рис. 11-9 в виде мгновенных значений для моментов времени  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t_3$ .

Из этого рисунка видно, что на протяжении всего участка между двумя соседними узлами стоячей волны синусоидальное изменение напряжения во времени происходит с одинаковой начальной фазой: при прохождении узла начальная фаза синусоидальных колебаний изменяется скачкообразно на величину  $\pi$ . Сказанное в равной мере относится и к стоячей волне тока.

На основании приведенного выше выражения для коэффициента отражения  $n_2$  можно заключить, что условие  $|n_2| = 1$  выполнимо в трех случаях: при  $Z_2 = \infty$  (холостой ход),  $Z_2 = 0$  (короткое замыкание) и  $Z_2 = jx$  (реактивная нагрузка). Этим условиям соответствуют стоячие волны, возникающие в линии без потерь.

Распределение действующих значений напряжения и тока вдоль линии для холостого хода и короткого замыкания иллюстрируется на рис. 11-10, а и б.

Для сравнения на рис. 11-10 показано распределение напряжения и тока для других режимов работы линии.

При активной нагрузке  $Z_2 = r_2 = 3z_B$ ,  $n_2 = 0,5$  (случай б) максимумы и минимумы  $U$  и  $I$  совпадают по своему местоположению с аналогичными значениями для режима холостого хода; при активной нагрузке  $Z_2 = r_2 = 1/3z_B$ ;  $n_2 = -0,5$  (случай в) максимумы и минимумы расположены так же, как при коротком замыкании; при согласованной нагрузке  $Z_2 = r_2 = z_B$ ,  $n_2 = 0$  (случай в) кривые  $U$  и  $I$  изображаются прямыми, параллельными оси абсцисс.

Стоячие волны легко исследуются с помощью уравнений (11-41) линии без потерь.

При холостом ходе ( $I_2 = 0$ )

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} x'; \\ \dot{I} &= j \frac{\dot{U}_2}{z_B} \sin \frac{2\pi}{\lambda} x'. \end{aligned} \right\} \quad (11-45)$$

Узлы напряжения находятся в точках, для которых

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda} x' = 0$$

или

$$\frac{2\pi}{\lambda} x' = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

откуда

$$x'_{уз} = \frac{2k+1}{4} \lambda.$$



Пучности напряжения находятся в точках, для которых

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda} x' = \pm 1$$

или

$$\frac{2\pi}{\lambda} x' = k\pi,$$

откуда

$$x'_{\text{пуч}} = \frac{k}{2} \lambda.$$

Разомкнутый конец линии совпадает с узлом тока и пучностью напряжения (рис. 11-10, а).

Как видно из (11-45), ток опережает по фазе напряжение на  $90^\circ$ , когда  $\sin \frac{2\pi}{\lambda} x'$  и  $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x'$  имеют одинаковый знак ( $0 \leq x' \leq \frac{\lambda}{4}$ ;  $\frac{\lambda}{2} \leq x' \leq \frac{3}{4} \lambda$  и т. д.), и отстает на  $90^\circ$  от напряжения, когда знаки  $\sin \frac{2\pi}{\lambda} x'$  и  $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x'$  различны ( $\frac{\lambda}{4} \leq x' \leq \frac{\lambda}{2}$ ;  $\frac{3}{4} \lambda \leq x' \leq \lambda$  и т. д.).

При коротком замыкании, положив в (11-41)  $U_2 = 0$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= jz_n \dot{I}_2 \sin \frac{2\pi}{\lambda} x'; \\ \dot{I} &= \dot{I}_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} x'. \end{aligned} \right\} \quad (11-46)$$

На замкнутом конце линии  $x' = 0$  и в точках, удаленных от него на целое число полуволн  $x' = k\lambda/2$ , находятся узлы напряжения и пучности тока, а в точках, удаленных от конца на нечетное число четвертей волн  $[x' = (2k+1) \frac{\lambda}{4}]$ , находятся пучности напряжения и узлы тока (рис. 11-10, б).

Как видно из (11-46), ток отстает по фазе от напряжения на  $90^\circ$ , когда  $\sin \frac{2\pi}{\lambda} x'$  и  $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x'$  имеют одинаковые знаки ( $0 \leq x' \leq \frac{\lambda}{4}$ ;  $\frac{\lambda}{2} \leq x' \leq \frac{3}{4} \lambda$  и т. д.), и опережает на  $90^\circ$  напряжение, когда знаки  $\sin \frac{2\pi}{\lambda} x'$  и  $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x'$  различны ( $\frac{\lambda}{4} \leq x' \leq \frac{\lambda}{2}$ ;  $\frac{3}{4} \lambda \leq x' \leq \lambda$  и т. д.).



Следует заметить, что наличие хотя бы самых малых потерь в реальных линиях приводит к тому, что действующие значения  $U$  и  $I$  не снижаются до нуля, а достигают некоторых минимальных значений в точках, соответствующих узлам.

В случае стоячих волн мощность в узлах напряжения и тока равна нулю. В остальных точках линии имеет место только реактивная мощность, так как напряжение и ток сдвинуты по фазе на  $90^\circ$ . В этом случае энергия не передается вдоль линии, а происходит лишь обмен энергией между электрическим и магнитным полями на участках линии, ограниченных узлами напряжения и тока.

Если в линии имеются потери или приемник потребляет активную мощность, то узлы исчезают; амплитуда падающей волны превышает амплитуду отраженной волны, и за счет разности амплитуд происходит процесс передачи энергии вдоль линии.

Для количественной оценки степени согласования линии с нагрузкой в радиотехнике используется коэффициент бегущей волны, под которым понимается отношение минимума кривой распределения  $U$  или  $I$  к максимуму той же величины:

$$K_6 = \frac{U_{\text{мин}}}{U_{\text{макс}}} = \frac{I_{\text{мин}}}{I_{\text{макс}}}. \quad (11-47)$$

С учетом (11-43) и (11-44) имеем:

$$K_6 = \frac{1 - |n_2|}{1 + |n_2|}, \quad (11-48)$$

откуда

$$|n_2| = \frac{1 - K_6}{1 + K_6} = \frac{U_{\text{макс}} - U_{\text{мин}}}{U_{\text{макс}} + U_{\text{мин}}}. \quad (11-49)$$

В случае активной нагрузки выражение (11-48) упрощается. При  $r_2 > z_B$   $|n_2| = \frac{r_2 - z_B}{r_2 + z_B}$  и согласно (11-48)

$$K_6 = \frac{z_B}{r_2}; \quad (11-50)$$

при  $r_2 < z_B$   $|n_2| = \frac{z_B - r_2}{z_B + r_2}$  и, следовательно,

$$K_6 = \frac{r_2}{z_B}. \quad (11-51)$$

В реальных условиях коэффициент бегущей волны обычно не ниже 0,5—0,6.



Кривую распределения действующих значений напряжения вдоль линии используют на практике для измерения длины волны или частоты. Длина волны определяется удвоенным расстоянием между соседними максимумами или минимумами кривой распределения, а частота вычисляется по длине волны на основании (11-15).

### 11-8. ВХОДНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ЛИНИИ

Входное сопротивление линии, измеренное в произвольной точке на расстоянии  $x'$  от конца, определяется отношением  $Z = \dot{U}/\dot{I}$  и может быть представлено в комплексной или гиперболической форме. Ради общности рассмотрения вопроса будем считать, что линия нагружена на конце некоторым сопротивлением  $Z_2$ , которое в зависимости от условий может быть любым.

Комплексная форма выражения для входного сопротивления линии получается на основании (11-18):

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z_B \frac{e^{\gamma x'} + n_2 e^{-\gamma x'}}{e^{\gamma x'} - n_2 e^{-\gamma x'}}$$

или

$$Z = Z_B \frac{1 + n_2 e^{-2\alpha x'} e^{-j2\beta x'}}{1 - n_2 e^{-2\alpha x'} e^{-j2\beta x'}}. \quad (11-52)$$

Данное выражение показывает, что с изменением координаты  $x'$  модуль входного сопротивления линии колеблется между некоторыми максимумами и минимумами (которые в общем случае отличаются друг от друга).

Допустим, что модуль  $Z$  достигает некоторого максимума в точке  $x'_{\text{ext}}$ . Тогда максимумы будут также в точках, соответствующих изменению аргумента  $2\beta x'$  на величину  $2k\pi$ , что даст:

$$2\beta'_{\text{ext}} + 2k\pi = 2\beta \left( x'_{\text{ext}} + k \frac{\pi}{\beta} \right) = 2\beta \left( x'_{\text{ext}} + k \frac{\lambda}{2} \right).$$

Следовательно, максимумы чередуются через каждые полволны. Посредине между максимумами будут минимумы, которые также чередуются через каждые полволны.

Если вместо координаты  $x'$  варьировать коэффициентом фазы  $\beta = 2\pi/\lambda$ , меняя частоту источника, то получится аналогичная волнообразная кривая, причем максимумы и соответственно минимумы будут отстоять друг от друга на  $\pi/x'$  (здесь  $x' = \text{const}$ ). Исследуя изменение



входного сопротивления линии при плавном изменении частоты источника, можно зафиксировать два следующих друг за другом максимума (или минимума)  $z$ , соответствующих частотам  $f_1$  и  $f_2$ .

В этом случае

$$\beta_1 = \frac{\omega_1}{v_1} = \frac{2\pi f_1}{v_1}; \quad \beta_2 = \frac{\omega_2}{v_2} = \frac{2\pi f_2}{v_2}$$

и, следовательно,

$$\beta_2 - \beta_1 = 2\pi \left( \frac{f_2}{v_2} - \frac{f_1}{v_1} \right) = \frac{\pi}{x'},$$

откуда

$$x' = \frac{v_1 v_2}{2(v_1 f_2 - v_2 f_1)}.$$

При малом расхождении частот  $f_1$  и  $f_2$  фазовые скорости  $v_1$  и  $v_2$  почти одинаковы:  $v_1 \approx v_2 \approx v_\Phi$ .

При этом

$$x' \approx \frac{v_\Phi}{2(f_2 - f_1)}.$$

Данная формула позволяет определить расстояние от точки наблюдения до ближайшей точки линии, в которой имеет место отражение (например, при коротком замыкании на линии), производя измерение только в одной точке.

Волнообразный характер кривой  $z$  подчиняется в общем случае закону изменения модуля гиперболического тангенса с комплексным аргументом, что видно из следующего вывода.

Непосредственно из (11-21) следует:

$$Z = \frac{\dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x' + Z_B I_2 \operatorname{sh} \gamma x'}{I_2 \operatorname{ch} \gamma x' + \frac{\dot{U}_2}{Z_B} \operatorname{sh} \gamma x'} = \frac{Z_2 + Z_B \operatorname{th} \gamma x'}{1 + \frac{Z_2}{Z_B} \operatorname{th} \gamma x'}. \quad (11-53)$$

Обозначив  $Z_2/Z_B = \operatorname{th} M$ , имеем:

$$Z = Z_B \frac{\operatorname{th} M + \operatorname{th} \gamma x'}{1 + \operatorname{th} M \operatorname{th} \gamma x'} = Z_B \operatorname{th} (\gamma x' + M). \quad (11-54)$$

При холостом ходе ( $Z_2 = \infty$ ) входное сопротивление линии согласно (11-53) равно:

$$Z_x = Z_B \operatorname{cth} \gamma x', \quad (11-55)$$

а при коротком замыкании ( $Z_2 = 0$ )

$$Z_k = Z_B \operatorname{th} \gamma x'. \quad (11-56)$$

С учетом (11-55) и (11-56) входное сопротивление  $Z$  легко выразить через  $Z_x$  и  $Z_k$ :

$$Z = Z_x \frac{Z_2 + Z_k}{Z_2 + Z_x}.$$



Этой формулой пользуются в том случае, когда из опытов холостого хода и короткого замыкания известны  $Z_x$  и  $Z_k$ .

Данные опытов холостого хода и короткого замыкания используются также для вычисления характеристических параметров линии.

На основании (11-55) и (11-56)

$$Z_B = \sqrt{Z_x Z_k}; \quad \text{th } \gamma x' = \sqrt{\frac{Z_k}{Z_x}}. \quad (11-57)$$

Эти формулы совпадают с (9-35). Ввиду того что коэффициент фазы  $\beta$  определяется по (11-57) неоднозначно, при вычислении производится проверка на основании (11-14), причем первоначально фазовая скорость  $v_\phi$  выбирается ориентировочно. Вычисление характеристических параметров по формулам (11-57) иллюстрировано ниже примером 11-1.

На рис. 11-11 показаны кривые изменения модулей  $Z_x$  и  $Z_k$  в зависимости от координаты  $x'$ . В пределе, т. е. при  $x' \rightarrow \infty$ , максимумы и минимумы кривой стремятся к значению  $z_B$ .

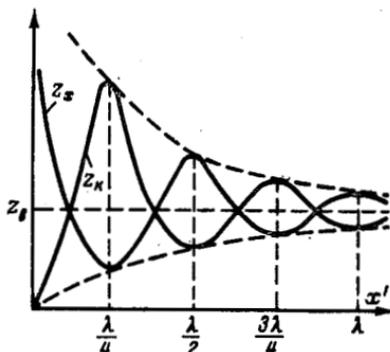


Рис. 11-11. Входные сопротивления линии при холостом ходе и коротком замыкании.

Входные сопротивления линии без потерь при холостом ходе и коротком замыкании могут быть получены из (11-55) и (11-56) заменой  $\gamma = j\beta = j2\pi/\lambda$ :

$$Z_x = -jz_B \text{ctg } \frac{2\pi}{\lambda} x'; \quad Z_k = jz_B \text{tg } \frac{2\pi}{\lambda} x'.$$

Эти реактивные входные сопротивления с учетом их знака изображаются котангенсоидами и тангенсоидами (рис. 11-12). Аргументом может служить также величина  $\beta$ , если изменять частоту при постоянной длине  $x'$ .

Сопоставляя эти графики с частотными характеристиками сопротивлений реактивных двухполюсников (см. гл. 5), легко убедиться в их сходстве: резонансы напряжений и токов чередуются; однако в отличие от двухполюсников, имеющих ограниченное число резонансов, линия без потерь имеет бесконечное число резонансных то-

чек, что соответствует представлению линии как цепочки из бесконечного числа индуктивностей и емкостей.

Входное сопротивление линии без потерь при  $x' \leq \frac{\lambda}{4}$  индуктивно в случае короткого замыкания и емкостно в случае холостого хода. При  $x' = \lambda/4$  в первом случае наступает резонанс токов ( $z = \infty$ ), во втором случае — резонанс напряжений ( $z = 0$ ).

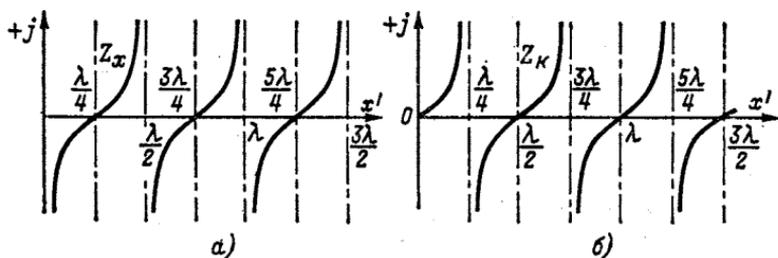


Рис. 11-12. Входные сопротивления линии без потерь.

*a* — холостой ход; *б* — короткое замыкание.

Следует отметить, что в реальных условиях вследствие наличия потерь входное сопротивление линии никогда не снижается до нуля и никогда не достигает бесконечного значения.

При этом короткозамкнутая линия при  $x' = \lambda/4$  имеет большее входное сопротивление, чем разомкнутая линия при  $x' = \lambda/2$ , а разомкнутая линия при  $x' = \lambda/4$  имеет меньшее входное сопротивление, чем короткозамкнутая при  $x' = \lambda/2$ .

**Пример 11-1.** Даны результаты измерения входных сопротивлений линии длиной 160 км на частоте 1000 Гц при холостом ходе и коротком замыкании:  $Z_x = 887 \angle -35^\circ$ ;  $Z_k = 540 \angle 21^\circ$  Ом. Требуется вычислить первичные и вторичные параметры линии.

Расчет начинается с вычисления волнового сопротивления и коэффициента распространения:

$$Z_B = \sqrt{Z_x Z_k} = \sqrt{(887 \angle -35^\circ)(540 \angle 21^\circ)} = 692 \angle -7^\circ \text{ Ом};$$

$$\text{th } \gamma l = \sqrt{\frac{Z_k}{Z_x}} = \sqrt{\frac{540 \angle 21^\circ}{887 \angle -35^\circ}} = 0,78 \angle 28^\circ = 0,688 + j0,366;$$

$$e^{2\gamma l} = \frac{1 + \text{th } \gamma l}{1 - \text{th } \gamma l} = \frac{1,688 + j0,366}{0,312 - j0,366} = \frac{1,726 \angle 12^\circ 15'}{0,480 \angle -49^\circ 35'} =$$

$$= 3,6 \angle 61^\circ 50' = 3,6 \angle 61,83^\circ = 3,6 \angle (1,08 + 2\pi k).$$

Целое число  $k$  находится на основании ориентировочного расчета величины  $2\beta l$ ; если исходить из приближенного значения фазовой скорости  $v_{\phi} \approx 300\,000$  км/с (если линия воздушная), то

$$2\beta l = 2l \frac{\omega}{v_{\phi}} \approx 320 \frac{6280}{300\,000} \approx 6,7 \text{ рад} = 384^{\circ}.$$

Следовательно, надо принять

$$k = 1 \text{ и } 2\beta l = 1,08 + 6,28 = 7,36 \text{ рад.}$$

Итак,

$$e^{2\gamma l} = e^{1,28} e^{j7,36},$$

откуда

$$2\alpha l = 1,28 \text{ Нп} = 11,12 \text{ дБ.}$$

Коэффициент ослабления

$$\alpha = \frac{11,12}{2 \cdot 160} = 0,0348 \text{ дБ/км} = 0,004 \text{ Нп/км;}$$

коэффициент фазы

$$\beta = \frac{7,36}{2 \cdot 160} = 0,023 \text{ рад/км;}$$

коэффициент распространения

$$\gamma = \alpha + j\beta = 0,004 + j0,023 = 0,0233 \angle 80^{\circ}8' \text{ км}^{-1};$$

фазовая скорость

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{6280}{0,023} = 273\,040 \text{ км/с;}$$

длина волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{6,28}{0,023} = 273,04 \text{ км.}$$

Первичные параметры линии находятся на основании выражений:

$$\gamma Z_{\text{в}} = r + j\omega L \text{ и } \frac{\gamma}{Z_{\text{в}}} = g + j\omega C;$$

$$r + j\omega L = (0,0233 \angle 80^{\circ}8') (692 \angle -7^{\circ}) =$$

$$= 16,12 \angle 73^{\circ}8' = 4,887 + j15,426 \text{ Ом/км;}$$

$$g + j\omega C = \frac{0,0233 \angle 80^{\circ}8'}{692 \angle 7^{\circ}} = 10^{-6} \cdot 33,6 \angle 87^{\circ}8' =$$

$$= (1,68 + j33,6) \cdot 10^{-6} \text{ См/км.}$$

Таким образом,

$$r = 4,887 \text{ Ом/км;}$$

$$L = \frac{15,426}{6280} = 0,00245 \text{ Г/км; } g = 1,68 \cdot 10^{-6} \text{ См/км;}$$

$$C = \frac{33,6 \cdot 10^{-6}}{6280} = 0,00535 \text{ мкФ/км.}$$

## 11-9. ЛИНИЯ КАК ЭЛЕМЕНТ РЕЗОНАНСНОЙ ЦЕПИ

Четвертьволновая линия с малыми потерями, разомкнутая на конце, обладает свойствами резонансной цепи, состоящей из последовательно соединенных  $r$ ,  $L$  и  $C$ . При частоте, при которой на линии укладывается четверть волны (такую частоту условимся называть резонансной), входное сопротивление линии будет активным и притом минимальным.

При малом отклонении частоты от резонансной модуль входного сопротивления линии резко возрастает: входное сопротивление приобретает емкостный характер при понижении частоты и индуктивный характер — при повышении.

Входное сопротивление линии с малыми потерями, разомкнутой на конце, можно получить из (11-21), разлагая  $\text{sh } \gamma x'$  и  $\text{ch } \gamma x'$  по формулам тригонометрии и приняв ввиду малости  $\alpha \text{ ch } \alpha x' \approx 1$ , а  $\text{sh } \alpha x' \approx \alpha x'$ .

Выражение примет вид:

$$Z_x = z_B \frac{\cos \beta x' + j \alpha x' \sin \beta x'}{\alpha x' \cos \beta x' + j \sin \beta x'}$$

Вблизи резонансной частоты  $\beta x' \approx \pi/2$  и  $\sin \beta x' \approx 1$ , а  $\cos \beta x' \ll 1$ . Поэтому

$$Z_x \approx z_B (\alpha x' - j \cos \beta x') = z_B \alpha x' \left( 1 - j \frac{\cos \beta x'}{\alpha x'} \right)$$

Если через  $\beta_0$  обозначить коэффициент фазы при резонансной частоте, т. е. принять  $\beta_0 x' = \pi/2$ , и учесть соотношение  $v_\phi = \omega/\beta \approx \approx \omega_0/\beta_0$ , то  $\cos \beta x'$  можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \cos \beta x' &\approx \cos \beta_0 \frac{\omega}{\omega_0} x' = \cos (\beta_0 x' + \beta_0 x' \delta) = \\ &= \cos \left( \frac{\pi}{2} + \beta_0 x' \delta \right) = -\sin \beta_0 x' \delta \approx -\beta x' \delta. \end{aligned}$$

Здесь, так же как и в гл. 5,  $\delta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$  — расстройка частоты по отношению к резонансной. Следовательно,

$$Z_x \approx z_B \alpha x' \left( 1 + j \frac{\beta \delta}{\alpha} \right). \quad (11-58)$$

В гл. 5 было показано, что при частоте, близкой к резонансной, когда  $\delta$  значительно, меньше единицы, комплексное сопротивление резонансной цепи равно:

$$\tilde{Z} \approx r (1 + j2Q\delta). \quad (11-59)$$

Рассматривая четвертьволновую линию как резонансную цепь, можно в силу одинаковой структуры выражений (11-58) и (11-59) считать, что добротность линии равна:

$$Q = \beta/2\alpha.$$

При этом резонансные характеристики, приведенные в гл. 5, применимы и к рассматриваемой линии.



Соответственно полоса пропускания, представляющая собой величину, обратную добротности (см. § 5-2), равна:

$$\delta_2 - \delta_1 = \frac{1}{Q} = \frac{2\alpha}{\beta}.$$

Здесь под полосой пропускания, так же как и в § 5-2, подразумевается отнесенная к резонансной частоте ширина резонансной кривой между точками, соответствующими половине максимальной мощности (когда  $r = |x|$ ).

При малых значениях коэффициента  $\alpha$  добротность получается высокой, достигая примерно 1000—4000, что намного превышает добротность контуров  $r$ ,  $L$  и  $C$ . В связи с этим возрастает и острота настройки.

## 11-10. ИСКУССТВЕННЫЕ ЛИНИИ

Искусственной линией называется цепь с сосредоточенными параметрами, приближающаяся по своим частотным характеристикам (в заданном диапазоне частот) к цепи с распределенными параметрами.

Искусственные линии находят широкое применение в лабораторных условиях и в особенности в современной импульсной радиотехнике для получения требуемого запаздывания сигналов.

В § 11-3 отмечалось, что всякая однородная линия представляет собой симметричный четырехполюсник с мерой передачи, равной

$$\gamma l = l \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)},$$

и характеристическим сопротивлением, равным волновому:

$$Z_B = \sqrt{\frac{r + j\omega L}{g + j\omega C}}.$$

Заменяя линию эквивалентным Т-образным четырехполюсником, согласно рис. 9-17, *a* получаем на основании формул (11-23) расчетные выражения:

$$\frac{Z_1}{2} = Z_B \operatorname{th} \frac{\gamma l}{2}; \quad Z_2 = \frac{Z_B}{\operatorname{sh} \gamma l}. \quad (11-60)$$

Для какой-либо фиксированной частоты такой Т-образный четырехполюсник может быть осуществлен. Однако при передаче сигналов в некоторой заданной полосе частот величины  $Z_1$  и  $Z_2$  представляют сложные функции от частоты, не реализуемые в виде простейших элементов. В этом случае искусственная линия создается



в виде цепной схемы, каждое звено которой с достаточной степенью точности заменяет весьма малый участок однородной линии.

### 11-11. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

11-1. Вычислить при частоте 1000 Гц волновое сопротивление однородной линии, коэффициент распространения и фазовую скорость по заданным первичным параметрам:

$r = 6,5 \text{ Ом/км}$ ;  $L = 2,29 \cdot 10^{-3} \text{ Г/км}$ ;  $C = 5,22 \cdot 10^{-9} \text{ мкФ/км}$ ;  $g = 0,5 \times 10^{-6} \text{ См/км}$ .

Ответ:  $Z_{\text{в}} = 692 \angle -12^\circ \text{ Ом}$ ;  $\gamma = (49,2 + j222) 10^{-4} \text{ км}^{-1}$ ;  $v_{\text{ф}} = 283 \text{ 000 км/с}$ .

11-2. К линии, указанной в предыдущей задаче, присоединена активная нагрузка 200 Ом. Вычислить коэффициент отражения.

Ответ:  $0,558 \angle 173^\circ$ .

11-3. Входное сопротивление линии длиной 200 км при частоте 800 Гц равно: при холостом ходе  $747 \angle -26,5^\circ \text{ Ом}$ , при коротком замыкании  $516 \angle 0,5^\circ \text{ Ом}$ . Вычислить вторичные и первичные параметры.

Ответ:  $Z_{\text{в}} = 620 \angle 13^\circ \text{ Ом}$ ;  $\gamma = (47,5 + j180) \cdot 10^{-4} \text{ км}^{-1}$ ;  $r = 5,4 \text{ Ом/км}$ ;  $L = 2,04 \cdot 10^{-3} \text{ Г/км}$ ;  $C = 6 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/км}$ ;  $g = 8,7 \cdot 10^{-7} \text{ См/км}$ .

11-4. Входное сопротивление линии длиной 50 км при частоте 800 Гц равно: при холостом ходе  $328 \angle -29^\circ 12' \text{ Ом}$ , при коротком замыкании  $1548 \angle 6^\circ 48' \text{ Ом}$ . Вычислить вторичные и первичные параметры.

Ответ:  $Z_{\text{в}} = 712 \angle -11^\circ 12' \text{ Ом}$ ;  $\gamma = (91,6 + j280) \cdot 10^{-4} \text{ км}^{-1}$ ;  $r = 10,25 \text{ Ом/км}$ ;  $L = 3,66 \cdot 10^{-3} \text{ Г/км}$ ;  $C = 8,22 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/км}$ ;  $g = 5 \cdot 10^{-6} \text{ См/км}$ .

11-5. Однородная линия имеет параметры:  $r = 5 \text{ Ом/км}$ ;  $C = 5 \cdot 10^{-3} \text{ мкФ/км}$ ;  $g = 10^{-6} \text{ См/км}$ .

При какой индуктивности в линии отсутствовали бы искажения?

Ответ:  $25 \text{ мГ/км}$ .

11-6. Вычислить входное сопротивление линии без потерь при коротком замыкании. Длина линии 35 м; длина волны 50 м; волновое сопротивление линии 505 Ом.

Ответ:  $1554 \angle 90^\circ \text{ Ом}$ .

11-7. Условия и требование предыдущей задачи, но принять длину линии равной 23 м.

Ответ:  $129 \angle -90^\circ \text{ Ом}$ .

11-8. Волновое сопротивление линии без потерь  $z_{\text{в}} = 500 \text{ Ом}$ . Определить амплитуду тока на расстоянии 1 м от разомкнутого конца линии при частоте  $f = 10^8 \text{ Гц}$ , если действующее значение напряжения на разомкнутом конце равно 10 В.

Ответ:  $0,0245 \text{ А}$ .

11-9. Однородная линия с первичными параметрами  $r = 10,4 \text{ Ом/км}$ ,  $L = 3,67 \text{ мГ/км}$ ,  $C = 0,00835 \text{ мкФ/км}$  и  $g = 0,8 \cdot 10^{-6} \text{ См/км}$  длиной 100 км подключена к источнику э. д. с. 100 В; частота равна 1000 Гц; линия нагружена активным сопротивлением 200 Ом. Вычислить: токи в начале и конце линии; напряжение в конце линии; активную мощность в начале и конце линии.

Ответ:  $0,167 \angle 0^\circ 30' \text{ А}$ ;  $0,113 \angle -200^\circ 30' \text{ А}$ ;  $22,6 \angle -200^\circ 30' \text{ В}$ ;  $16,7 \text{ Вт}$ ;  $2,55 \text{ Вт}$ .

11-10. Чем отличаются цепи с распределенными параметрами от цепей с сосредоточенными параметрами?



11-11. В каких линиях и при каких условиях возникают стоячие волны?

11-12. Будет ли передаваться энергия по линии без потерь, замкнутой на реактивное сопротивление?

11-13. Каковы первичные и вторичные параметры линии без потерь?

11-14. Как определяются параметры  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$  и  $A_{22}$  однородной линии?

11-15. Как определяются напряжение и ток в начале (или конце) линии в зависимости от напряжения и тока в конце (или начале) линии?

11-6. При каких условиях отношение  $U_1/U_2$  равно  $e^{al}$ ?

## ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

### ЦЕПИ ТРЕХФАЗНОГО ТОКА

#### 12-1. ТРЕХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Трехфазная электрическая цепь может быть представлена как совокупность трех однофазных цепей, в которых действуют э. д. с. одной и той же частоты, сдвинутые друг относительно друга на одну треть периода, или, что то же, на угол  $2\pi/3$ .

Эти три составные части трехфазной цепи называются фазами<sup>1</sup> и им ниже будут приписываться буквенные обозначения  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

На рис. 12-1 схематично показана трехфазная цепь, фазы которой электрически не связаны друг с другом. Такие трехфазные цепи называются несвязанными (в настоящее время не применяются).

На рис. 12-1 для упрощения обмотки трехфазного генератора не показаны. Сопротивления обмоток и шести соединительных проводов ввиду их малости по сравнению с сопротивлениями нагрузки можно для начала пренебречь.

<sup>1</sup> Таким образом, термином «фаза» в электротехнике обозначаются два понятия: угол, определяющий стадию периодического процесса, и составная часть многофазной цепи.

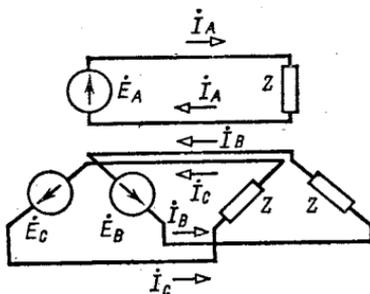


Рис. 12-1. Несвязанная трехфазная цепь.



Фазы  $A$ ,  $B$  и  $C$  изображены на рис. 12-1 под углом  $120^\circ$ , для того чтобы подчеркнуть, что э. д. с.  $\dot{E}_A$ ,  $\dot{E}_B$  и  $\dot{E}_C$  сдвинуты друг относительно друга на одну треть периода. При равенстве амплитуд э. д. с. и одинаковых сопротивлений в фазах токи  $\dot{I}_A$ ,  $\dot{I}_B$  и  $\dot{I}_C$  также равны по величине и сдвинуты друг относительно друга на одну треть периода, образуя так называемый трехфазный ток.

Сумма этих токов в любой момент времени равна нулю; поэтому если три провода, по которым токи возвращаются к источникам, объединить в один провод, то ток в этом проводе будет равен нулю. При отсутствии в проводе тока излишним в данном случае является и сам провод; от него можно отказаться, перейдя, таким образом, к схеме рис. 12-2. В результате этого достигается экономия материала проводов; кроме того, по сравнению с не связанной трехфазной цепью исключаются потери мощности от токов  $\dot{I}_A$ ,  $\dot{I}_B$  и  $\dot{I}_C$  в обратных проводах.

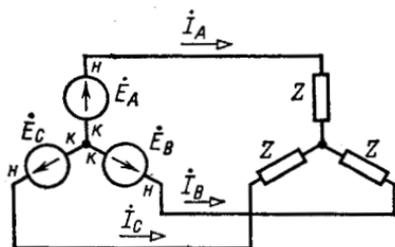


Рис. 12-2. Связанная трехфазная цепь.

Трехфазная цепь на рис. 12-2, фазы которой соединены электрически, представляет собой одну из разновидностей связанных трехфазных цепей.

Благодаря технико-экономическим преимуществам связанных трехфазных цепей они получили широкое распространение.

Для получения связанной трехфазной цепи не требуются отдельные однофазные генераторы, а используется трехфазный генератор, схематически показанный на рис. 12-3. Обмотки, в которых наводятся э. д. с., помещаются в пазах статора<sup>1</sup>. Обмотки фаз сдвинуты друг относительно друга на угол  $120^\circ/p$ , где  $p$  — число пар полюсов. В случае двухполюсного генератора (рис. 12-3)  $p = 1$  и угол равен  $120^\circ$  (подробнее см. § 12-6).

При вращении ротора в силу идентичности трех обмоток генератора в них наводятся э. д. с., имеющие одинаковую амплитуду и частоту, причем эти э. д. с. сдвинуты по фазе по отношению друг к другу на одну треть пери-

<sup>1</sup> Следует отметить, что на практике применяются также трехфазные генераторы, в которых полюсы неподвижны, а обмотки вращаются.

ода. Векторы, изображающие эти э. д. с., равны по модулю и расположены под углом  $120^\circ$  (рис. 12-4, б).

Мгновенные э. д. с. трехфазного генератора, показанные на рис. 12-4, а, выражаются аналитически следующим образом:

$$e_A = E_m \sin \omega t;$$

$$e_B = E_m \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right);$$

$$e_C = E_m \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right).$$

Мгновенные значения э. д. с. равны соответствующим проекциям трех векторов:  $\dot{E}_{mA}$ ,  $\dot{E}_{mB}$  и  $\dot{E}_{mC}$  (рис. 12-4, б), образующих симметричную звезду и вращающихся в положительном направлении с угловой скоростью  $\omega$  (на рис. 12-3 положение ротора соответствует моменту  $t = 0$ ).

Положительные направления э. д. с. в обмотках указаны на рис. 12-3 точками и крестиками; точка означает острие, а крестик — конец стрелки, совпадающей с положительным направлением э. д. с. (положительное нап-

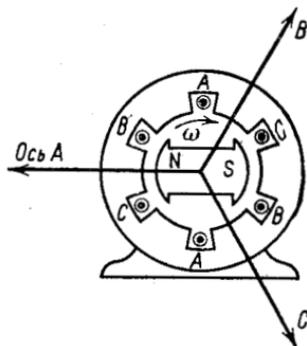


Рис. 12-3. Принцип выполнения трехфазного синхронного генератора.

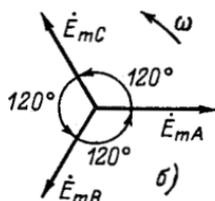
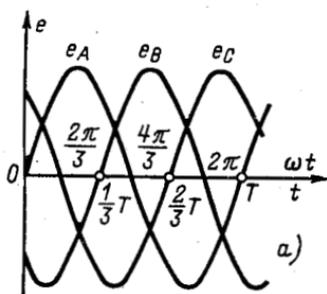


Рис. 12-4. Мгновенные э. д. с. (а) и векторная диаграмма э. д. с. (б) трехфазного генератора,

равление э. д. с. не следует смешивать с действительным направлением э. д. с. в произвольный момент времени).

Создание в 1889 г. связанной трехфазной цепи переменного тока явилось важным событием в истории электротехники.

Впервые такую цепь осуществил выдающийся русский инженер и ученый Михаил Осипович Доливо-Добровольский (1862—1919). Им были разработаны основные звенья генерирования, передачи, распределения и преобразования электроэнергии трехфазного тока, именно: трехфазные генератор, трансформатор и асинхронный двигатель. Изобретение М. О. Доливо-Добровольским асинхронного двигателя, являющегося простейшим и самым дешевым двигателем переменного тока, существенно способствовало широкому промышленному внедрению трехфазного тока.

Технические и экономические преимущества трехфазного тока обеспечили ему ведущую роль в современной электротехнике.

Неуклонно возрастает также роль трехфазного переменного тока в авиации.

## 12-2. СОЕДИНЕНИЕ ЗВЕЗДОЙ И ТРЕУГОЛЬНИКОМ

Каждая фазная обмотка имеет две крайние точки или два вывода, которые условно называются *началом* и *концом* обмотки. За начало обмотки генератора обычно принимается тот вывод, к которому направлена положительная э. д. с. На рис. 12-2 одноименные выводы фазных обмоток генератора обозначены буквами *n* (начало) и *k* (конец).

Показанное на схеме рис. 12-2 соединение обмоток трехфазного генератора называется *звездой*: все концы фазных обмоток генератора соединены в одной общей точке. В дальнейшем для упрощения мы не будем располагать фазы генератора под углом  $120^\circ$ , а будем изображать их параллельно (рис. 12-5, *a*).

Общая точка фазных обмоток генератора называется *нейтральной точкой*. В зависимости от требований нейтральная точка может быть выведена к отдельному выводу, обозначенному на рис. 12-5, *a* буквой *N*.

При соединении обмоток трехфазного генератора треугольником (рис. 12-6, *a*) начало одной фазной обмотки соединяется с концом следующей по порядку фазной обмотки так, что все три обмотки образуют замкнутый треугольник, причем направления э. д. с. в контуре треугольника совпадают и сумма э. д. с. равна нулю. Общие точки соединенных обмоток генератора выводятся к выводам, к которым присоединяются линейные провода или нагрузка.

При отсутствии нагрузки, т. е. при режиме холостого хода в обмотках генератора, соединенных треугольником, ток не циркулирует, так как сумма трех фазных э. д. с. равна нулю (рис. 12-6, б).

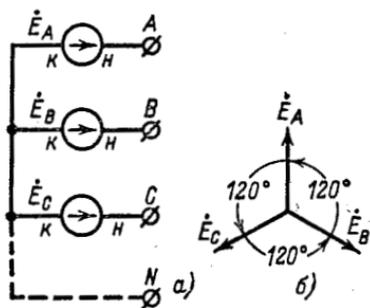


Рис. 12-5. Соединение трехфазного генератора звездой.  
а — схема; б — векторная диаграмма э. д. с.

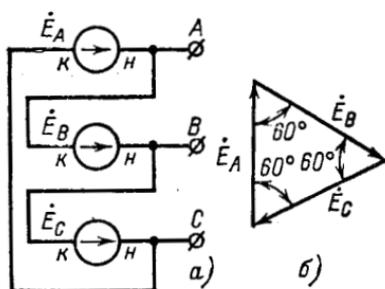


Рис. 12-6. Соединение трехфазного генератора треугольником.  
а — схема; б — векторная диаграмма э. д. с.

Ради упрощения в схемах рис. 12-5, а и 12-6, а показаны только э. д. с. генератора; обмотки и их сопротивления на схеме не показаны.

Нагрузка в трехфазной цепи также может быть соединена звездой (см. рис. 12-7, а) или треугольником (рис. 12-7, б и в).

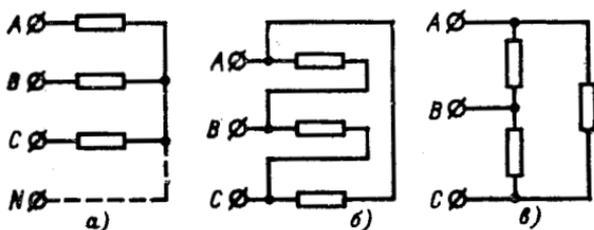


Рис. 12-7. Соединение нагрузки звездой (а) и треугольником (б и в).

На практике применяются различные комбинации соединений, например: 1) генератор может быть соединен звездой, а нагрузка — звездой или треугольником; 2) генератор может быть соединен треугольником, а нагрузка — звездой или треугольником.

Соединение нагрузки звездой по схеме рис. 12-2 применяется только при одинаковой нагрузке всех трех фаз. Между тем условие равномерной загрузки фаз на практике не всегда выполняется (например, в случае осветительной нагрузки). При неравномерной нагрузке напряжения на фазах, т. е. на сопротивлениях лучей звезды нагрузки, получаются неодинаковыми (см. § 12-4). Кроме того, в схеме рис. 12-2 недопустимым является включение или отключение одной фазы нагрузки.

В этом отношении соединение нагрузки треугольником имеет преимущество: сопротивления фаз, т. е. сторон треугольника, могут быть неодинаковы и даже в край-

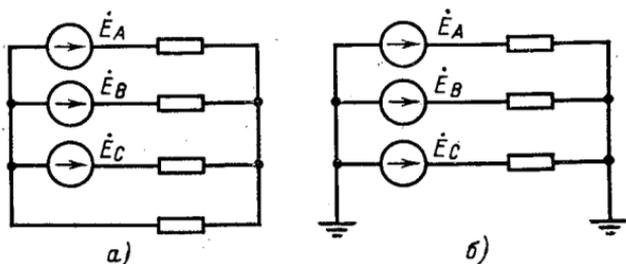


Рис. 12-8. Соединение звезда — звезда с нейтральным проводом (а) и заземленными нейтральными точками (б).

нем случае могут включаться и отключаться независимо друг от друга.

Такая же возможность имеется при соединении генератора и нагрузки звездой, если их нейтральные точки соединены нейтральным проводом или через землю (рис. 12-8, а и б). На самолетах и кораблях нейтральным проводом может служить металлическая обшивка (корпус), к которой присоединяются нейтральные точки генераторов и нагрузок.

Электродвижущие силы, наводимые в фазных обмотках генератора, напряжения на их выводах, напряжения на фазах нагрузки и токи в них называются соответственно фазными э. д. с., напряжениями и токами и обозначаются  $E_{\phi}$ ,  $U_{\phi}$  и  $I_{\phi}$ .

Напряжения между линейными проводами и токи в них называются л и н е й н ы м и напряжениями и токами и обозначаются  $U_{л}$  и  $I_{л}$ .

При соединении фаз звездой фазные токи равны линейным токам:  $I_{\phi} = I_{л}$ . При соединении фаз треугольни-

ком фазное напряжение равно соответствующему линейному напряжению:  $U_{\phi} = U_{л}^*$ .

Различают симметричный и несимметричный режимы работы трехфазной цепи. При симметричном режиме сопротивления всех трех фаз одинаковы и э. д. с. образуют симметричную систему; в противном случае имеет место несимметричный режим.

### 12-3. СИММЕТРИЧНЫЙ РЕЖИМ РАБОТЫ ТРЕХФАЗНОЙ ЦЕПИ

Расчет трехфазной цепи, так же как и расчет всякой сложной цепи, ведется обычно в комплексной форме. Ввиду того что фазные э. д. с. генератора сдвинуты друг относительно друга на  $120^\circ$ , для краткости математической записи применяется фазовый оператор — комплексная величина

$$a = e^{j120^\circ} = \cos 120^\circ + j \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Умножение вектора на оператор  $a$  означает поворот вектора на  $120^\circ$  в положительном направлении (против хода часовой стрелки).

Соответственно умножение вектора на множитель  $a^2$  означает поворот вектора на  $240^\circ$  в положительном направлении или, что то же, поворот его на  $120^\circ$  в отрицательном направлении.

Очевидно,

$$a^2 = e^{j240^\circ} = e^{-j120^\circ} = -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Если э. д. с. фазы  $A$  равна  $\dot{E}_A$ , то э. д. с. фаз  $B$  и  $C$  равны соответственно:

$$\dot{E}_B = a^2 \dot{E}_A; \quad \dot{E}_C = a \dot{E}_A.$$

В простейшем случае симметричного режима работы трехфазной цепи, когда генератор и нагрузка соединены звездой (рис. 12-9, *а*), векторная диаграмма э. д. с. и токов имеет вид, показанный на рис. 12-9, *б*.

Ток в каждой фазе отстает от э. д. с. той же фазы на угол  $\varphi = \arctg \frac{x}{r}$ , где  $r$  и  $x$  — активное и реактивное сопротивления фаз.

\* Кроме того, применяется понятие «фазное напряжение в данном сечении» трехфазной цепи по отношению к какой-либо точке, принимаемой за нуль, например земле, нулевой точке генератора или искусственной нулевой точке.

Ток в фазе  $A$  находят так же, как в однофазной цепи, потому что нейтральные точки генератора и нагрузки в симметричном режиме могут быть соединены как имеющие одинаковые потенциалы:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_A}{Z}.$$

Соответственно токи в фазах  $B$  и  $C$  через ток  $\dot{I}_A$ :

$$\dot{I}_B = a^2 \dot{I}_A, \quad \dot{I}_C = a \dot{I}_A.$$

Наличие нейтрального провода не вносит при симметричном режиме никаких изменений, так как сумма токов трех фаз равна нулю и ток в нем отсутствует:

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = (1 + a^2 + a) \dot{I}_A = 0.$$

Таким образом, при симметричном режиме работы трехфазной цепи задача сводится к расчету одной из фаз

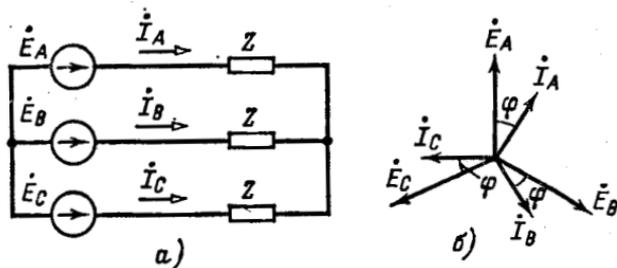


Рис. 12-9. Симметричный режим работы трехфазной цепи.

$a$  — трехфазная цепь;  $b$  — векторная диаграмма.

аналогично расчету однофазной цепи. При этом сопротивление обратного (нейтрального) провода не учитывается, так как ток в нем и соответственно падение напряжения на нем отсутствуют.

По мере удаления от генератора фазные напряжения, определяемые падениями напряжения до нейтральной точки нагрузки, изменяются по модулю (обычно убывают) и по фазе. Линейные напряжения определяются как разности соответствующих фазных напряжений, например:  $\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B$ . В любом месте трехфазной линии при симметричном режиме соблюдается следующее соотношение между модулями линейных и фазных напряжений:

$$U_{\text{л}} = \sqrt{3} U_{\text{ф}}.$$

Действительно,

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A (1 - a^2) = \sqrt{3} \dot{U}_A \angle 30^\circ,$$

т. е.  $\dot{U}_{AB}$  опережает по фазе  $\dot{U}_A$  на  $30^\circ$ , причем модуль  $U_{AB}$  в  $\sqrt{3}$  раз превышает  $U_A$ .

В случае соединения треугольником линейные токи определяются в соответствии с первым законом Кирхгофа как разности фазных токов и при симметричном режиме соблюдается соотношение  $I_\lambda = \sqrt{3} I_\phi$ .

Соединение фаз генератора или нагрузки треугольником должно быть для расчета заменено эквивалентным соединением фаз звездой; вследствие этого расчет трехфазной цепи с соединением фаз треугольником приводится в конечном итоге к расчету эквивалентной трехфазной цепи с соединением фаз звездой.

Между сопротивлениями сторон треугольника ( $Z_\Delta$ ) и лучей звезды ( $Z_\lambda$ ) имеет место соотношение  $Z_\lambda = \frac{1}{3} Z_\Delta$ , вытекающее из формул преобразования треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду (см. § 4-4). Это соотношение справедливо как для сопротивлений симметричной трехфазной нагрузки, так и для сопротивлений симметричного трехфазного генератора. При этом фазные э. д. с. эквивалентного генератора, соединенного звездой, берутся в  $\sqrt{3}$  раз меньшими фазных э. д. с. заданного генератора, соединенного треугольником (кроме того, они должны быть сдвинуты на угол  $30^\circ$ ). Это легко усмотреть из векторной потенциальной диаграммы напряжений генератора.

Активная мощность симметричной трехфазной нагрузки равна:

$$P = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi.$$

Ввиду того что при соединении нагрузки звездой  $\sqrt{3} U_\phi = U_\lambda$  и  $I_\phi = I_\lambda$ , а при соединении нагрузки треугольником  $U_\phi = U_\lambda$  и  $\sqrt{3} I_\phi = I_\lambda$ , активная мощность трехфазной цепи независимо от вида соединения выражается через линейные напряжения и ток следующим образом:

$$P = \sqrt{3} U_\lambda I_\lambda \cos \varphi;$$

здесь  $\varphi$  — угол сдвига фазного тока относительно одноименного фазного напряжения.



Аналогичным образом для реактивной и полной мощностей симметричной трехфазной нагрузки имеем:

$$Q = \sqrt{3} U_{л} I_{л} \sin \varphi; \quad S = \sqrt{3} U_{л} I_{л}.$$

Приведенные выражения не означают, что при пересоединении нагрузки со звезды на треугольник (или наоборот) активная и реактивная мощности не изменяются. При пересоединении нагрузки со звезды на треугольник при заданном линейном напряжении фазные токи возрастут в  $\sqrt{3}$  раз, в линейный ток — в 3 раза и поэтому мощность возрастет в 3 раза.

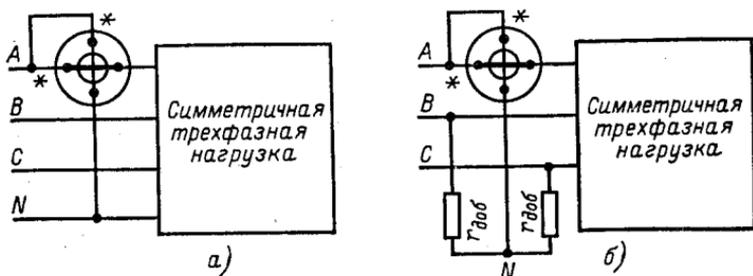


Рис. 12-10. Измерение активной мощности при симметричном режиме.

Если нейтральная точка симметричной трехфазной нагрузки выведена, то измерение активной мощности может быть осуществлено одним ваттметром, включенным по схеме рис. 12-10, а (одноименные или так называемые генераторные выводы последовательной и параллельной цепей ваттметра отмечены на рис. 12-10, а звездочками). Утроенное показание ваттметра равно суммарной активной мощности трех фаз.

Если нейтральная точка не выведена или нагрузка соединена треугольником, то можно воспользоваться схемой рис. 12-10, б, где параллельная цепь ваттметра и два добавочных активных сопротивления  $r_{доб}$ , равные по величине сопротивлению параллельной цепи ваттметра, образуют искусственную нейтральную точку 0\*.

\* Следует заметить, что здесь применим только электродинамический или ферродинамический ваттметр, сопротивление параллельной цепи которого является чисто активным. Индукционный ваттметр неприменим по той причине, что сопротивление параллельной цепи такого ваттметра имеет реактивное сопротивление; для создания искусственной нейтральной точки в этом случае потребовались бы реактивные добавочные сопротивления.

Для получения суммарной мощности, как и в предыдущем случае, показание ваттметра угаивается.

На рис. 12-11 показан способ измерения реактивной мощности в симметричной трехфазной цепи при помощи одного ваттметра: последовательная цепь ваттметра включена в фазу *A*, а параллельная — между фазами *B* и *C*, причем генераторные выводы ваттметра присоединены к фазам *A* и *B*.

Показание ваттметра в этом случае равно:

$$U_{BC} I_A \cos(\varphi - 90^\circ) = U_{BC} I_A \sin \varphi.$$

Для получения суммарной реактивной мощности показание умножается на  $\sqrt{3}$ .

Разделив активную мощность на полную мощность, получим:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}.$$

**Пример 12-1.** Определить ток в генераторе при симметричном режиме работы трехфазной цепи, представленной на рис. 12-12, *a*.

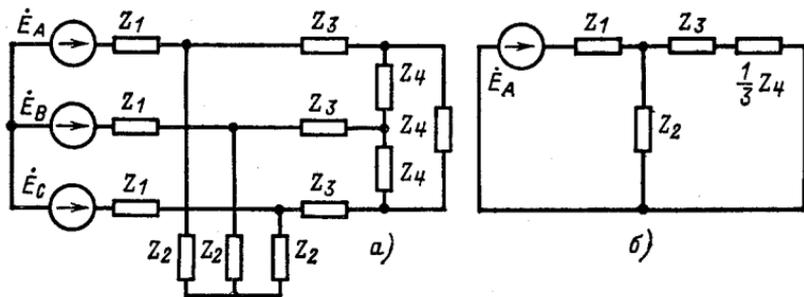


Рис. 12-12. Пример 12-1.

Сопротивления  $Z_4$ , соединенные треугольником, заменяются эквивалентной звездой из сопротивлений  $Z_4/3$ .

При симметричном режиме нейтральные точки генератора и нагрузки, как было указано выше, могут быть объединены. Тогда режим работы каждой фазы, например фазы *A*, может быть рассмотрен в однофазной расчетной схеме (рис. 12-12, *б*).

Результатирующее сопротивление цепи одной фазы равно:

$$Z = Z_1 + \frac{Z_2(Z_3 + Z_4/3)}{Z_2 + Z_3 + Z_4/3}.$$

Искомый ток в фазе  $A$

$$I_A = \dot{E}_A / Z.$$

#### 12-4. НЕСИММЕТРИЧНЫЙ РЕЖИМ РАБОТЫ ТРЕХФАЗНОЙ ЦЕПИ

Несимметрия в трехфазной цепи может быть вызвана различными причинами: 1) неодинаковым сопротивлением фаз (несимметричная нагрузка); 2) несимметричным коротким замыканием (например, между двумя фазами или фазой и нейтралью); 3) размыканием фазы; 4) неравенством э. д. с. и т. п.

Расчет токов и напряжений в трехфазной цепи при несимметричном режиме может производиться теми же методами, которые применяются для расчета однофазных цепей.

Рассмотрим несколько простейших вариантов (без взаимной индукции между фазами).

1. Несимметричная трехфазная цепь, соединенная звездой, с нейтральным проводом (рис. 12-13).

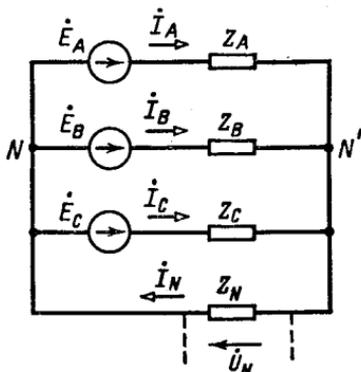


Рис. 12-13. Несимметричная трехфазная цепь, соединенная звездой (с нейтральным проводом).

Несимметричная трехфазная цепь, показанная на рис. 12-13, может рассматриваться как трехконтурная цепь с тремя э. д. с. Такая цепь может быть рассчитана методами контурных токов, узловых напряжений и другими. Поскольку в схеме имеются только два узла, наиболее целесообразно в данном случае определить узловое напряжение (напряжение смещения) между нейтральными точками  $N'$  и  $N$  по формуле, аналогичной (4-4):

$$\dot{U}_{N'N} = \dot{U}_N = \frac{Y_A \dot{E}_A + Y_B \dot{E}_B + Y_C \dot{E}_C}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_N}, \quad (12-1)$$

где  $Y_A$ ,  $Y_B$ ,  $Y_C$  и  $Y_N$  — проводимости соответствующих ветвей.



После этого найдем токи:

$$\dot{I}_A = Y_A(\dot{E}_A - \dot{U}_N);$$

$$\dot{I}_B = Y_B(\dot{E}_B - \dot{U}_N);$$

$$\dot{I}_C = Y_C(\dot{E}_C - \dot{U}_N).$$

В симметричной трехфазной цепи  $Y_A = Y_B = Y_C$ , и поэтому при  $\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0$  узловое напряжение  $\dot{U}_N$  равно нулю.

Случаю размыкания какой-либо фазы или нейтрального провода соответствует равенство нулю проводимости данной фазы или нейтрального провода.

При отсутствии нейтрального провода, полагая в (12-1)  $Y_N = 0$ , имеем:

$$\dot{U}_N = \frac{Y_A \dot{E}_A + Y_B \dot{E}_B + Y_C \dot{E}_C}{Y_A + Y_B + Y_C}.$$

2. Несимметричная трехфазная нагрузка, соединенная звездой (без нейтрального провода), с заданными линейными напряжениями на выводах (рис. 12-14).

Если заданы линейные напряжения  $\dot{U}_{AB}$ ,  $\dot{U}_{BC}$  и  $\dot{U}_{CA}$  на выводах нагрузки, соединенной звездой, то токи в фазах звезды определяются следующим образом.

Обозначив фазные напряжения на выводах нагрузки через  $\dot{U}_A$ ,  $\dot{U}_B$  и  $\dot{U}_C$  (рис. 12-14), получим

$$\dot{I}_A = Y_A \dot{U}_A; \quad \dot{I}_B = Y_B \dot{U}_B; \quad \dot{I}_C = Y_C \dot{U}_C,$$

где  $Y_A$ ,  $Y_B$  и  $Y_C$  — проводимости фаз нагрузки.

Равенство нулю суммы токов трех фаз записывается в виде:

$$Y_A \dot{U}_A + Y_B \dot{U}_B + Y_C \dot{U}_C = 0. \quad (12-2)$$

Фазные напряжения  $\dot{U}_B$  и  $\dot{U}_C$  могут быть выражены через  $\dot{U}_A$  и заданные линейные напряжения:

$$\dot{U}_B = \dot{U}_A - \dot{U}_{AB}; \quad \dot{U}_C = \dot{U}_{CA} + \dot{U}_A. \quad (12-3)$$

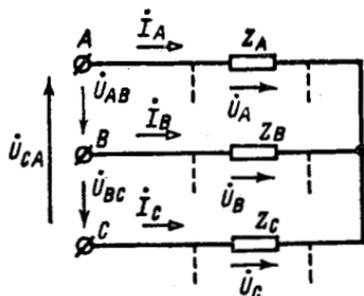


Рис. 12-14. Несимметричная трехфазная нагрузка, соединенная звездой (без нейтрального провода).

Подстановка (12-3) в (12-2) дает:

$$\dot{U}_A = \frac{Y_B \dot{U}_{AB} - Y_C \dot{U}_{CA}}{Y_A + Y_B + Y_C}.$$

Круговой заменой индексов (с порядком следования *ABCA* и т. д.) находятся:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_B &= \frac{Y_C \dot{U}_{BC} - Y_A \dot{U}_{AB}}{Y_A + Y_B + Y_C}; \\ \dot{U}_C &= \frac{Y_A \dot{U}_{CA} - Y_B \dot{U}_{BC}}{Y_A + Y_B + Y_C}. \end{aligned} \right\} \quad (12-4)$$

По фазным напряжениям нагрузки находятся фазные токи.

В случае симметричной нагрузки  $Y_A = Y_B = Y_C$  вектор фазного напряжения равен одной трети диагонали параллелограмма, построенного на соответствующих линейных напряжениях. Фазные напряжения в этом случае определяются векторами, соединяющими центр тяжести треугольника напряжений (точка пересечения медиан) с вершинами треугольника.

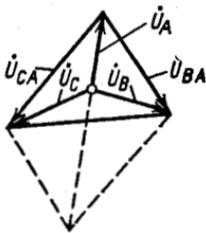


Рис. 12-15. Нахождение фазных напряжений.

На рис. 12-15 построение сделано для фазы *A* по формуле (12-4):

$$\dot{U}_A = \frac{1}{3} (\dot{U}_{AB} - \dot{U}_{CA}) = -\frac{1}{3} (\dot{U}_{BA} + \dot{U}_{CA}).$$

В качестве примера рассмотрим схему фазоуказателя, используемую для определения чередования фаз по времени, состоящую из конденсатора и двух одинаковых электрических ламп, соединенных звездой<sup>1</sup>.

Положим, что конденсатор присоединен к фазе *A*, лампы — к фазам *B* и *C*; емкостное сопротивление конденсатора берется равным по модулю сопротивлению лампы, т. е.  $Z_A = -jx_C$ ,  $Z_B = Z_C = r$ , причем  $x_C = r$ .

Неравенство напряжений на лампах проявится в том, что накал ламп будет разным. Отношение напряжений согласно выведенным выше выражениям (12-4) равно при

<sup>1</sup> Для определения чередования фаз на практике обычно пользуются специальным прибором, в котором создается вращающееся магнитное поле (см. § 12-6), увлекающее за собой диск в ту или другую сторону.

симметрии линейных напряжений:

$$\frac{U_B}{U_C} = \left| \frac{a^2 - a - j(1 - a^2)}{j(a - 1) - (a^2 - a)} \right| = \left| \frac{3,23 + j0,866}{0,23 + j0,866} \right| \approx 3,73.$$

Следовательно, лампа, присоединенная к фазе  $B$  (т. е. к фазе, опережающей ту, к которой присоединена вторая лампа), будет светить ярко, а лампа, присоединенная к отстающей фазе, — тускло.

Вместо конденсатора можно применить индуктивную катушку, подобрав ее индуктивное сопротивление приблизительно равным по модулю сопротивлению лампы. В этом случае ярче будет светить лампа, присоединенная к отстающей фазе. Эти соотношения также могут быть получены непосредственно из векторной диаграммы.

3. Несимметричная трехфазная нагрузка, соединенная треугольником, с заданными напряжениями на выводах (рис. 12-16).

Если на выводах несимметричной трехфазной нагрузки, соединенной треугольником, заданы линейные напряжения  $\dot{U}_{AB}$ ,  $\dot{U}_{BC}$  и  $\dot{U}_{CA}$  (рис. 12-16), то токи в сопротивлениях нагрузки равны:

$$\frac{\dot{U}_{AB}}{Z_{AB}}, \frac{\dot{U}_{BC}}{Z_{BC}} \text{ и } \frac{\dot{U}_{CA}}{Z_{CA}}.$$

Токи в линии определяются как разности соответствующих токов нагрузки, например:  $\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z_{AB}} - \frac{\dot{U}_{CA}}{Z_{CA}}$  и т. д.

Если на выводах несимметричной трехфазной нагрузки, соединенной треугольником, заданы фазные напряжения  $\dot{U}_A$ ,  $\dot{U}_B$  и  $\dot{U}_C$  источника, соединенного в звезду, то линейные напряжения на выводах нагрузки находятся как разности соответствующих фазных напряжений, в результате чего задача сводится к только что рассмотренному случаю (рис. 12-16).

**Пример 12-2.** Сопротивления фаз нагрузки, соединенной звездой:  $Z_A = 40 + j30 = 50 \angle 36^\circ 54'$ ;  $Z_B = 30 + j40 = 50 \angle 53^\circ 6'$ ;  $Z_C = 20 \angle 0^\circ$  Ом.

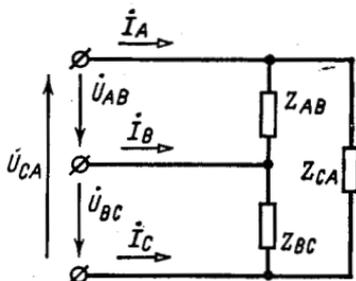


Рис. 12-16. Несимметричная трехфазная нагрузка, соединенная треугольником.



Сопротивление нейтрального провода

$$Z_N = 3 + j4 = 5 \angle 53^\circ 6' \text{ Ом.}$$

Напряжения на цепи представляют собой симметричную звезду:  
 $\dot{U}_A = 100 \angle 0^\circ$ ;  $\dot{U}_B = 100 \angle -120^\circ = -50 - j86,6$ ;  $\dot{U}_C =$   
 $= 100 \angle 120^\circ = -50 + j86,6 \text{ В.}$

Требуется определить фазные напряжения нагрузки.  
 Проводимости фаз нагрузки и нейтрального провода

$$Y_A = \frac{1}{Z_A} = 0,02 \angle -36^\circ 54' = 0,016 - j0,012 \text{ См;}$$

$$Y_B = \frac{1}{Z_B} = 0,02 \angle -53^\circ 6' = 0,012 - j0,016 \text{ См;}$$

$$Y_C = \frac{1}{Z_C} = 0,05 \angle 0^\circ \text{ См;}$$

$$Y_N = \frac{1}{Z_N} = 0,2 \angle -53^\circ 6' = 0,12 - j0,16 \text{ См.}$$

На основании формулы (12-1)

$$\dot{U}_N = 100 \frac{0,02 \angle -36^\circ 54' + 0,02 \angle -173^\circ 6' + 0,05 \angle 120^\circ}{0,016 - j0,012 + 0,012 - j0,016 + 0,05 + 0,12 - j0,16} =$$

$$= -14,9 + j0,39 \text{ В.}$$

Искомые фазные напряжения нагрузки:

$$\dot{U}_A - \dot{U}_N = 100 + 14,9 - j0,39 = 114,9 - j0,39 = 114,9 \angle -0^\circ 12' \text{ В;}$$

$$\dot{U}_B - \dot{U}_N = -50 - j86,6 + 14,9 - j0,39 =$$

$$= -35,1 - j87,0 = 93,5 \angle -112^\circ \text{ В;}$$

$$\dot{U}_C - \dot{U}_N = -50 + j86,6 + 14,9 - j0,39 =$$

$$= -35,1 + j86,2 = 93,0 \angle 112^\circ 50' \text{ В.}$$

## 12-5. МОЩНОСТЬ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ТРЕХФАЗНОЙ ЦЕПИ

Пользуясь комплексной формой записи мощности, можно написать общее выражение для мощности трехфазной цепи:

$$\tilde{S} = \dot{U}_A \dot{I}_A^* + \dot{U}_B \dot{I}_B^* + \dot{U}_C \dot{I}_C^*. \quad (12-5)$$

Действительная часть этого выражения представляет собой активную мощность

$$P = U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C.$$

Суммарная активная мощность, потребляемая несимметричной трехфазной цепью, может быть в соответствии с этим измерена при помощи трех ваттметров, включенных на подведенные к данной цепи фазные напряжения относи-



тельно нейтрали и одноименные с ними токи. Активная мощность равна сумме показаний трех ваттметров. Такой метод измерения применяется при наличии нейтрального провода (рис. 12-17) или искусственно созданной нейтральной точки.

В случае отсутствия нейтрального провода измерение может быть произведено с помощью двух ваттметров

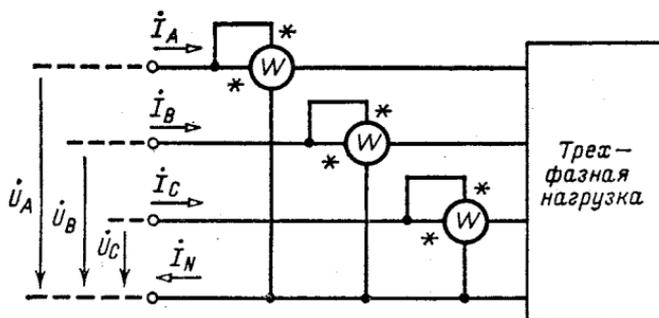


Рис. 12-17. Измерение мощности при наличии нейтрального провода.

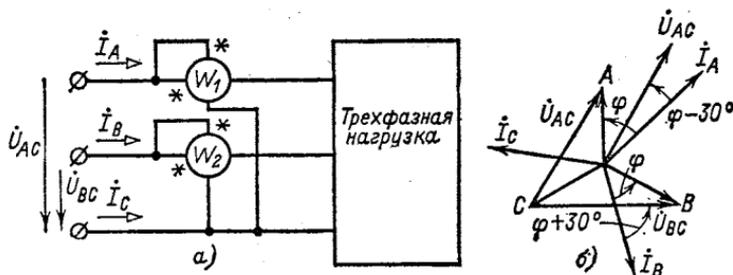


Рис. 12-18. Измерение мощности двумя ваттметрами (при отсутствии нейтрального провода),

(рис. 12-18). В этом случае выражение (12-5) преобразуется следующим образом: исключая ток  $I_C^*$  с помощью условия

$$I_C^* = -I_A^* - I_B^*,$$

получаем:

$$\tilde{S} = (\dot{U}_A - \dot{U}_C) I_A^* + (\dot{U}_B - \dot{U}_C) I_B^*,$$

или

$$\tilde{S} = \dot{U}_{AC} I_A^* + \dot{U}_{BC} I_B^*. \quad (12-6)$$



В соответствии с (12-6) при измерении активной мощности двумя ваттметрами к одному из них подводятся напряжение  $U_{AC}$  и ток  $I_A$ , а ко второму — напряжение  $U_{BC}$  и ток  $I_B$  (рис. 12-18, а). Показания ваттметров складываются алгебраически.

Круговой заменой  $A$ ,  $B$  и  $C$  в выражении (12-6) можно получить выражения для других равноценных вариантов включения двух ваттметров.

Следует иметь в виду, что если стрелка одного ваттметра отклоняется по шкале в обратную сторону, то, изменив направление напряжения или тока, подводимого к данному ваттметру, записывают полученное показание со знаком минус. При симметричном режиме работы трехфазной цепи такое положение имеет место при

$$|\varphi| > 60^\circ,$$

что видно непосредственно из векторной диаграммы (рис. 12-18, б).

При симметричном режиме показания двух ваттметров в схеме рис. 12-18, б будут следующие:

$$P_1 = U_{AC} I_A \cos(\varphi - 30^\circ) = UI \cos(\varphi - 30^\circ);$$

$$P_2 = U_{BC} I_B \cos(\varphi + 30^\circ) = UI \cos(\varphi + 30^\circ).$$

Сумма и разность показаний ваттметров соответственно равны:

$$P_1 + P_2 = UI 2 \cos \varphi \cos 30^\circ = \sqrt{3} UI \cos \varphi;$$

$$P_1 - P_2 = UI 2 \sin \varphi \sin 30^\circ = UI \sin \varphi.$$

Следовательно, при симметричном режиме работы трехфазной цепи тангенс угла сдвига фаз может быть вычислен по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3} \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}.$$

## 12-6. ВРАЩАЮЩЕЕСЯ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ.

Пусть через катушку проходит ток  $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$ . На рис. 12-19, а катушка условно изображена в виде витка, причем точка и крестик указывают положительное направление тока. Принятому положительному направлению тока соответствует по правилу буравчика положи-



тельное направление вектора магнитной индукции  $^1 \bar{B} = B_m \sin(\omega t + \psi)$ , указанное стрелкой вдоль оси катушки ( $B_m$  — максимальное значение магнитной индукции в центре катушки); когда ток отрицателен, вектор магнитной индукции имеет противоположное направление, показанное на рис. 12-19, *а* пунктиром.

Таким образом, магнитное поле изменяется (пульсирует) вдоль оси катушки; такое магнитное поле называется **п у л ь с и р у ю щ и м**.

Условимся **к р у г о в ы м в р а щ а ю щ и м с я** магнитным полем называть магнитное поле, ось которого равномерно вращается, причем значение магнитной индукции на

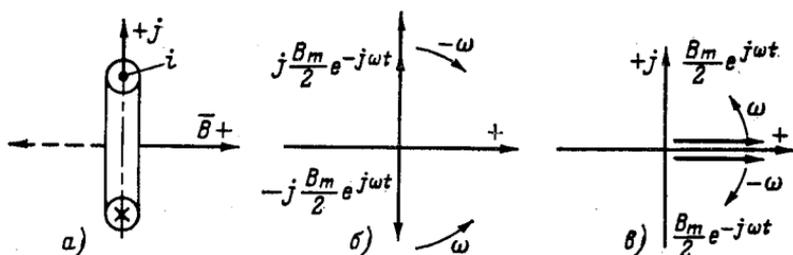


Рис. 12-19. Разложение пульсирующего магнитного поля катушки (*а*) на два вращающихся: при синусоидальном (*б*) и косинусоидальном (*в*) токах (в момент  $t = 0$ ).

этой оси неизменно. Легко убедиться в том, что магнитное поле, пульсирующее по закону синуса или косинуса, может рассматриваться как результат наложения двух круговых полей, вращающихся в противоположные стороны с угловой скоростью, равной угловой частоте переменного тока, и имеющих максимальную индукцию на вращающейся оси, вдвое меньшую амплитуды индукции пульсирующего поля (рис. 12-19, *б* и *в*). Это следует из формул

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

и 
$$\cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}).$$

Положения векторов на рис. 12-19, *б* и *в* соответствуют моменту  $t = 0$ .

Допустим теперь, что через две катушки, расположенные взаимно перпендикулярно, проходят токи одной и

<sup>1</sup> Предполагается линейная зависимость индукции от тока.

той же амплитуды и частоты, сдвинутые по фазе друг относительно друга на четверть периода. На рис. 12-20, а катушки обозначены цифрами 1 и 2. Принятым положительным направлениям токов  $i_1 = I_m \sin \omega t$  и  $i_2 = I_m \sin (\omega t + \pi/2) = I_m \cos \omega t$  соответствуют взаимно перпендикулярные пульсирующие магнитные потоки с индукциями в точке пересечения осей катушек  $B_1 = B_m \sin \omega t$  и  $B_2 = B_m \cos \omega t$ , направленными по действительной и мнимой осям.

Заменив каждое из пульсирующих полей двумя вращающимися (рис. 12-20, б и в), убеждаемся в том, что

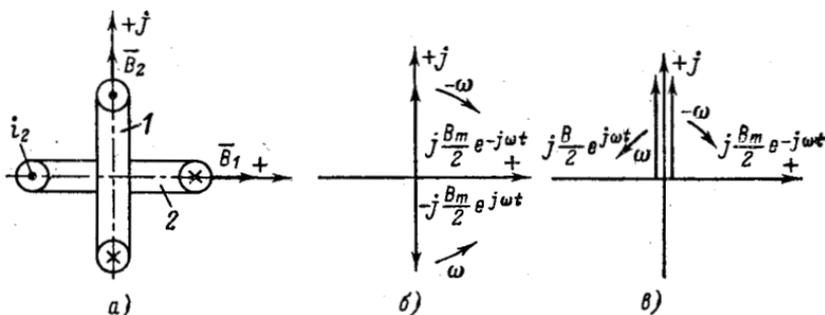


Рис. 12-20. Образование кругового вращающегося магнитного поля из двух пульсирующих.

векторы магнитной индукции  $-j \frac{B_m}{2} e^{j\omega t}$  (рис. 12-20, б) и  $j \frac{B_m}{2} e^{j\omega t}$  (рис. 12-20, в), вращающиеся в положительном направлении, взаимно компенсируются (их сумма равна нулю). Два других вектора образуют в сумме вектор магнитной индукции  $jB_m e^{-j\omega t}$ , вращающийся в отрицательном направлении (по часовой стрелке).

К тому же выводу приходим и на основании выражения, получаемого для результирующего вектора магнитной индукции,

$$\vec{B} = B_1 + jB_2 = B_m (\sin \omega t + j \cos \omega t) = jB_m e^{-j\omega t}.$$

Это выражение показывает, что ось результирующего магнитного поля равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$ , причем значение индукции на оси неизменно равно  $B_m$ , т. е. получается круговое вращающееся магнитное поле.

Направление вращения магнитного поля зависит от положительных направлений магнитных индукций и от

того, какая из индукций является отстающей. В рассматриваемом здесь случае индукция  $B_1$  отстает по фазе на  $\pi/2$  от индукции  $B_2$  и магнитное поле вращается в отрицательном направлении. Если изменить направление тока в одной из катушек, например в катушке 1, что равносильно изменению фазы тока  $i_1$  на  $\pi$ , магнитное поле будет вращаться в положительном направлении. В этом можно убедиться, повернув векторную диаграмму рис. 12-20, б на  $180^\circ$  или воспользовавшись выражением

$$\vec{B} = B_m (-\sin \omega t + j \cos \omega t) = j B_m e^{j\omega t}.$$

Таким образом, от сложения двух взаимно перпендикулярных пульсирующих магнитных полей, сдвинутых по фазе на четверть периода, получается круговое магнитное поле, вращающееся с угловой скоростью в сторону отстающего по фазе вектора индукции.

Описанный способ получения кругового вращающегося магнитного поля с помощью двухфазной системы токов широко используется в приборах и электромашиностроении.

Большое удобство с точки зрения возможности получения кругового вращающегося поля представляет трехфазный ток.

Расположим три одинаковые катушки таким образом, чтобы их оси были сдвинуты друг относительно друга в пространстве на угол  $120^\circ$  (рис. 12-21), и подключим эти катушки к симметричной трехфазной цепи. Тогда через катушки будут протекать токи:

$$i_A = I_m \sin \omega t;$$

$$i_B = I_m \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right); \quad i_C = I_m \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right).$$

Положительным направлениям токов, обозначенным на рис. 12-21 с помощью точек и крестиков, соответствуют по правилу буравчика указанные стрелками положительные направления магнитных потоков (векторов индукций), создаваемых токами  $i_A$ ,  $i_B$  и  $i_C$ .

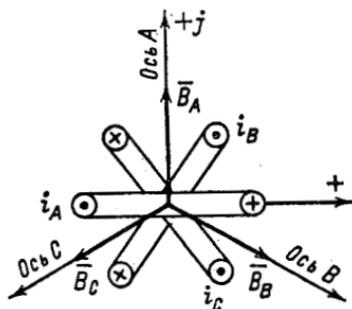


Рис. 12-21. Получение вращающегося магнитного поля при помощи трехфазной системы токов.



При пропорциональной зависимости индукций от токов мгновенные значения индукций фаз выразятся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} B_A &= B_m \sin \omega t; \\ B_B &= B_m \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right); \\ B_C &= B_m \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right), \end{aligned} \right\} \quad (12-7)$$

где  $B_m$  — амплитуда индукции на оси каждой из катушек. При выбранном на рис. 12-21 направлении осей + и +j результирующий вектор индукции находится сложением векторов  $\vec{B}_A$ ,  $\vec{B}_B$  и  $\vec{B}_C$ :

$$\vec{B} = j(B_A + a^2 B_B + a B_C). \quad (12-8)$$

Подстановка (12-7) в (12-8) дает:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= jB_m (\sin \omega t + a^2 \sin \omega t \cos 120^\circ - a^2 \cos \omega t \sin 120^\circ + \\ &\quad + a \sin \omega t \cos 120^\circ + a \cos \omega t \sin 120^\circ) = \\ &= j1,5B_m (\sin \omega t + j \cos \omega t), \end{aligned}$$

или

$$\vec{B} = -1,5B_m e^{-j\omega t}.$$

Полученное выражение показывает, что результирующий вектор магнитного поля имеет постоянный модуль, равный  $1,5 B_m$ , и равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$  от оси фазы A по направлению к оси фазы B и т. д. (на рис. 12-21 — по ходу часовой стрелки), т. е. получается круговое вращающееся поле.

Для изменения направления вращения поля достаточно поменять местами токи в каких-нибудь двух катушках, например  $i_B$  и  $i_C$ .

При несимметрии токов в катушках, например если концы одной катушки поменять местами, или при несимметрии питающих напряжений вместо кругового вращающегося поля получится эллиптическое вращающееся поле, результирующий вектор индукции которого описывает эллипс и имеет переменную угловую скорость.

В электрических машинах вращающееся магнитное поле осуществляется с помощью обмоток, размещаемых в пазах неподвижной части машины — статора (см. гл. 2).

Линии магнитной индукции замыкаются по телу статора, воздушному зазору и телу ротора. Место выхода

линий индукции из статора можно рассматривать как северный полюс, а место входа их в статор — как южный полюс магнитного поля обмотки статора.

Кривая распределения индукции  $B$  вдоль воздушного зазора имеет ступенчатую форму, которая при большом числе пазов статора близка к трапеции с углом наклона боковой стороны  $60^\circ$ , и может быть приближенно заменена синусоидой.

Синусоидальный ток частоты  $f$ , проходя через фазную обмотку статора, создает поле, пульсирующее с той же частотой. Таким образом, магнитное поле одной фазы изменяется синусоидально как во времени, так и в пространстве (по окружности зазора).

Обмотки трех фаз расположены на статоре так, что их оси, а следовательно, и оси трех пульсирующих магнитных полей сдвинуты в пространстве на  $120^\circ$ . Поэтому при прохождении через обмотку трехфазного тока пульсирующие поля образуют в сумме двухполюсное вращающееся в зазоре синусоидальное поле, амплитуда индукции которого постоянна и равна  $\frac{3}{2}$  амплитуды слагающих фазных полей.

За один период переменного тока такое магнитное поле совершит один оборот, а за 1 мин  $60f$  оборотов.

Если обмотку статора выполнить многополюсной, т. е. с полюсным шагом  $180^\circ/p$ , то три пульсирующих поля будут сдвинуты в пространстве на  $120^\circ/p$  и в результате получится  $2p$ -полюсное вращающееся поле, имеющее частоту вращения, равную  $60f/p$  об/мин.

## 12-7. ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ АСИНХРОННОГО И СИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЕЙ

Простейшим по устройству и наиболее распространенным в промышленности типом двигателя переменного тока является трехфазный асинхронный двигатель, изобретенный в 1888 г. М. О. Доливо-Добровольским. Его ротор выполняется в виде стального цилиндра, собранного из стальных листов, с обмоткой, размещенной в пазах по его поверхности. Вращающееся магнитное поле, созданное обмотками статора, наводит в замкнутой обмотке ротора токи. Механическое взаимодействие этих токов с вращающимся полем приводит ротор во вращение в том же направлении, в котором вращается поле.

Ротор вращается асинхронно, т. е. частота вращения его ( $n$ , об/мин) меньше частоты вращения магнитного поля ( $n_1$ , об/мин).

Разность частот вращения поля и ротора, отнесенная к скорости поля, называется с к о л ь ж е н и е м:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1}.$$

Скольжение не может быть равно нулю, так как при одинаковых частотах вращения поля и ротора прекратилось бы наведение токов в роторе и, следовательно, отсутствовал бы вращающий момент.

В рабочем режиме асинхронный двигатель находится в динамическом равновесии, когда создаваемый благодаря скольжению вращающий момент уравнивает тормозящий момент нагрузки на его валу. С увеличением механической нагрузки тормозящий момент становится больше вращающегося и скольжение увеличивается. Вследствие этого возрастают индуктированные в обмотке ротора э. д. с. и токи, что вызывает увеличение вращающего момента до нового состояния динамического равновесия (при большем скольжении).

Однако вращающий момент может расти с увеличением скольжения только до определенного предела, так называемого критического значения при критическом скольжении, после чего он падает, а двигатель затормаживается.

При нормальной нагрузке скольжение асинхронных двигателей в среднем составляет 2—4%.

Трехфазный генератор (см. рис. 12-3), как и многие другие типы электрических машин, обладает свойством обратимости: он может работать как с и н х р о н н ы й д в и г а т е л ь. Поэтому конструктивно синхронный двигатель мало отличается от генератора.

Если присоединить обмотку статора к источнику (сети) трехфазного тока, а обмотку ротора (обмотку возбуждения) — к источнику постоянного тока, то вращающееся магнитное поле статора будет периодически создавать на валу моменты разных знаков. Поэтому ротор не сможет прийти во вращение — он будет вибрировать.

Для пуска двигателя необходимо сначала (при разомкнутой обмотке возбуждения) привести ротор во вращение до частоты вращения, близкой к синхронной. Если после этого включить обмотку возбуждения, то двигатель



«втянется в синхронизм». Ротор будет вращаться синхронно с полем статора.

Для пуска синхронного двигателя может быть использована специальная пусковая обмотка ротора, действующая так же, как в асинхронном двигателе.

При строго синхронном вращении ротора имеется угловой сдвиг между осями полей статора и ротора, зависящий от нагрузки (от момента сопротивления на валу). С увеличением нагрузки этот угол увеличивается, благодаря чему момент вращения также увеличивается. Максимальный вращающий момент получается при угле между э. д. с. двигателя и напряжением сети около  $90^\circ$ , после чего дальнейшее увеличение нагрузки приводит к остановке двигателя и «выпадению» его из синхронизма.

Если изменять постоянный ток в цепи возбуждения ротора, то можно в широких пределах регулировать  $\cos \varphi$  двигателя. Так, при «недовозбуждении» двигателя угол  $\varphi$  положителен, т. е. ток отстает от напряжения, а при «перевозбуждении» угол  $\varphi$  отрицателен — ток опережает напряжение. Это свойство синхронных двигателей весьма ценно и широко используется в промышленности для повышения  $\cos \varphi$  электроустановок.

Синхронные двигатели выполняются обычно для номинальных режимов работы при  $\cos \varphi = 1$  и  $\cos \varphi = 0,8$  (опережающем).

Более подробное изучение конструкций, электрических процессов и режимов работы асинхронных и синхронных двигателей относится к курсу электрических машин.

## 12-8. МЕТОД СИММЕТРИЧНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ

Метод расчета несимметричных режимов трехфазных цепей, описанный в § 12-4, относился к частным случаям таких режимов, когда не было взаимной индукции между фазами или она могла быть учтена в эквивалентном сопротивлении на фазу (при отсутствии нейтрального провода (см., например, [Л. 14]), не было вращающихся машин с несимметричным ротором, отсутствовали токи в земле с неизбежным индуктивным влиянием на фазные обмотки или провода.

Для расчета несимметричных режимов трехфазных электрических цепей в общем случае применяется метод симметричных составляющих, основанный на представлении любой трехфазной несимметричной

системы электрических или магнитных величин (токов, напряжений, магнитных потоков) в виде суммы трех симметричных систем. Эти симметричные системы величин, образующих в совокупности несимметричную систему, носят название симметричных составляющих прямой, обратной и нулевой последовательностей. При этом под последовательностью подразумевается порядок следования во времени максимумов фазных величин.

На рис. 12-22 в виде примера показаны симметричные составляющие токов всех трех последовательностей. Как видно из рисунка, симметричные составляющие обозначаются цифрами 1, 2, 0.

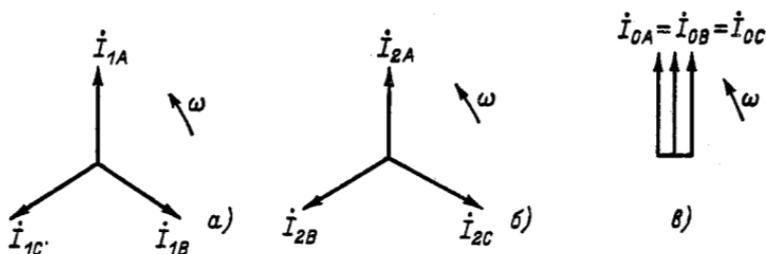


Рис. 12-22. Симметричные составляющие токов прямой (а), обратной (б) и нулевой (в) последовательностей.

Система прямой последовательности образует симметричную трехлучевую звезду  $\dot{I}_{1A}, \dot{I}_{1B}, \dot{I}_{1C}$  с порядком следования фаз  $A, B, C$ .

Система обратной последовательности образует трехлучевую звезду  $\dot{I}_{2A}, \dot{I}_{2B}, \dot{I}_{2C}$  с порядком следования фаз  $A, C, B$ .

Система нулевой последовательности состоит из трех равных векторов:  $\dot{I}_{0A} = \dot{I}_{0B} = \dot{I}_{0C}$ .

Векторами, показанными на рис. 12-22, могут изображаться как комплексные амплитуды, так и комплексные действующие значения токов трех последовательностей.

Мгновенные (синусоидальные) значения симметричных составляющих мыслятся в виде проекций на мнимую ось комплексных амплитуд, вращающихся с угловой скоростью  $\omega$  в положительную сторону. Следует обратить внимание на то, что направление вращения у всех трех систем векторов одно и то же.

Взаимное расположение и модули векторов прямой, обратной и нулевой последовательностей зависят от характера несимметрии и электрических параметров трехфазной цепи.

На основании рис. 12-22:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_{1B} &= a^2 \dot{I}_{1A}; & \dot{I}_{1C} &= a \dot{I}_{1A}; \\ \dot{I}_{2B} &= a \dot{I}_{2A}; & \dot{I}_{2C} &= a^2 \dot{I}_{2A}. \end{aligned} \right\} \quad (12-9)$$

Токи в фазах  $A$ ,  $B$  и  $C$  определяются как суммы соответствующих симметричных составляющих:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_{1A} + \dot{I}_{2A} + \dot{I}_{0A}; \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_{1B} + \dot{I}_{2B} + \dot{I}_{0B}; \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_{1C} + \dot{I}_{2C} + \dot{I}_{0C}. \end{aligned} \right\} \quad (12-10)$$

В дальнейшем ради упрощения записи индекс  $A$  при симметричных составляющих фазы  $A$  опущен, т. е.

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{1A}; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{2A}; \quad \dot{I}_0 = \dot{I}_{0A}. \quad (12-11)$$

С учетом (12-9) и (12-11) выражения (12-10) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0; \\ \dot{I}_B &= a^2 \dot{I}_1 + a \dot{I}_2 + \dot{I}_0; \\ \dot{I}_C &= a \dot{I}_1 + a^2 \dot{I}_2 + \dot{I}_0. \end{aligned} \right\} \quad (12-12)$$

Эти формулы служат для нахождения фазных токов по их симметричным составляющим.

Если известны фазные токи, то симметричные составляющие служат решением системы уравнений (12-12). Умножив вторую строку на  $a$  и третью строку на  $a^2$  и сложив уравнения (12-12), получим (с учетом того, что  $1 + a + a^2 = 0$ ):

$$\dot{I}_1 = (\dot{I}_A + a \dot{I}_B + a^2 \dot{I}_C) / 3. \quad (12-13)$$

Аналогичным образом, умножив вторую строку на  $a^2$  и третью строку на  $a$  и сложив уравнения (12-12), найдем:

$$\dot{I}_2 = (\dot{I}_A + a^2 \dot{I}_B + a \dot{I}_C) / 3. \quad (12-14)$$

Наконец, сложив уравнения (12-12), получим:

$$\dot{I}_0 = (\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C) / 3. \quad (12-15)$$

Выражения (12-12) — (12-15) являются общими; они применимы также для напряжений, магнитных потоков и других величин.



## 12-9. ПОПЕРЕЧНАЯ НЕСИММЕТРИЯ

Поперечная несимметрия в одной точке трехфазной цепи возникает в том случае, когда к фазам присоединяются неравные сопротивления, как это, например, показано на рис. 12-23, *а*. Такое включение может иметь место при несимметричном коротком замыкании или несимметричной нагрузке.

Любые два сопротивления из числа включенных в звезду, а также сопротивление  $Z_3$  могут быть равны нулю или бесконечности. Таким образом, различные виды несимметрии или короткого замыкания, изображенные, например, на рис. 12-23, *б*, *в* и *г*, получаются как частные случаи из общего случая, представленного на рис. 12-23, *а*.

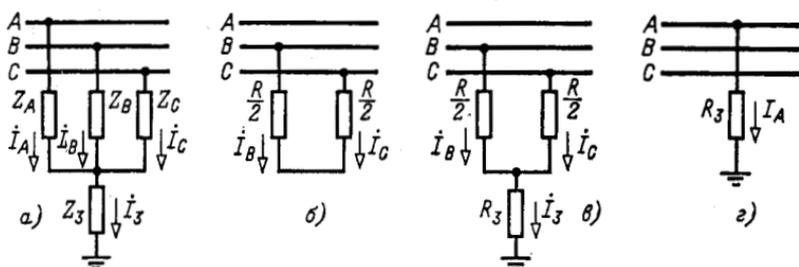


Рис. 12-23. Случаи поперечной несимметрии.

*а* — общий случай; *б* — двухфазное замыкание; *в* — двухфазное замыкание на землю (или на корпус); *г* — однофазное замыкание.

В случае короткого замыкания сопротивления в месте замыкания складываются из сопротивлений электрических дуг и заземлений. Эти сопротивления, как показали экспериментальные исследования, являются активными. Поэтому сопротивления для упомянутых выше частных случаев приняты активными, а именно:

1) при двухфазном замыкании между фазами *B* и *C* (рис. 12-23, *б*)

$$Z_B = Z_C = R/2; \quad Z_A = Z_3 = \infty;$$

2) при двухфазном замыкании на землю (или корпус самолета) (рис. 12-23, *в*)

$$Z_B = Z_C = R/2; \quad Z_3 = R_3; \quad Z_A = \infty;$$

3) при однофазном замыкании на землю (корпус) (рис. 12-23, *г*)

$$Z_A = 0; \quad Z_3 = R_3; \quad Z_B = Z_C = \infty.$$

Поперечная несимметрия в общем случае (рис. 12-23, а) характеризуется уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_A &= Z_A \dot{I}_A + 3Z_3 \dot{I}_0; \\ \dot{U}_B &= Z_B \dot{I}_B + 3Z_3 \dot{I}_0; \\ \dot{U}_C &= Z_C \dot{I}_C + 3Z_3 \dot{I}_0; \end{aligned} \right\} \quad (12-16)$$

здесь  $\dot{U}_A$ ,  $\dot{U}_B$  и  $\dot{U}_C$  — фазные напряжения в месте несимметрии относительно земли.

Входящие в (12-16) фазные напряжения и токи могут быть с учетом формул (12-12) заменены симметричными составляющими. При этом получаются три уравнения, связывающие симметричные составляющие в месте поперечной несимметрии (так называемые граничные условия).

Дополнительные три уравнения, необходимые для вычисления шести неизвестных (симметричных составляющих напряжений и токов в месте несимметрии), даются соотношениями между напряжениями и токами одноименных последовательностей для фазы А:

$$\left. \begin{aligned} Z_1 \dot{I}_1 + \dot{U}_1 &= \dot{E}_A; \\ Z_2 \dot{I}_2 + \dot{U}_2 &= 0; \\ Z_0 \dot{I}_0 + \dot{U}_0 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (12-17)$$

здесь  $Z_1$ ,  $Z_2$  и  $Z_0$  — результирующие фазные сопротивления всей цепи (без сопротивлений в месте несимметрии) для токов прямой, обратной и нулевой последовательностей;  $\dot{E}_A$  — э. д. с. фазы А эквивалентного генератора.

Формулы (12-17) выражают второй закон Кирхгофа для каждой последовательности в отдельности. Поскольку э. д. с. генератора трехфазного тока образует симметричную звезду с прямым чередованием фаз, в уравнениях (12-17) э. д. с. генератора входит только в уравнение для составляющих прямой последовательности; в остальных двух уравнениях, связывающих составляющие напряжений и токов обратной и нулевой последовательностей, э. д. с. генератора отсутствует.

Сопротивления прямой, обратной и нулевой последовательностей для электрических машин (генераторов, электрических двигателей, трансформаторов) берутся по заводским данным.

Равенство  $Z_1 = Z_2$  имеет место только для статических не вращающихся устройств — трансформаторов, линий и т. п.



Для вращающихся электрических машин обычно  $z_2 < z_1$ . Разница в сопротивлениях прямой и обратной последовательностей электрических машин обусловлена различными направлениями вращения магнитных полей, образуемых токами прямой и обратной последовательностей: направление вращения магнитного поля, созданного токами прямой последовательности, совпадает с направлением вращения ротора, магнитное же поле, образованное токами обратной последовательности, вращается в противоположную сторону. Более подробно этот вопрос рассматривается в литературе по электрическим машинам и токам короткого замыкания в трехфазных системах.

Сопротивления прямой и нулевой последовательностей трехфазной линии (кабельной или воздушной) находятся расчетным или опытным путем, причем сопротивление прямой и обратной последовательностей для линий одинаковы, а сопротивление нулевой последовательности может в 2—3 раза превышать сопротивление прямой последовательности. Объясняется это различием э. д. с. взаимной индукции, наводимых в фазе токами прямой и нулевой последовательностей, протекающими по двум другим фазам, а также сопротивлением земли или обшивки транспортного средства, по которому проложена сеть.

Методика определения симметричных составляющих токов и напряжений и построения соответствующих векторных диаграмм иллюстрирована ниже на примере частных случаев поперечной несимметрии.

1. *Двухфазное короткое замыкание* (рис. 12-23, б). Граничные условия удовлетворяют уравнениям:

$$I_A = 0; \quad I_B = -I_C; \quad (12-18)$$

$$\dot{U}_B - \dot{U}_C = R(I_B - I_C)/2. \quad (12-19)$$

Подстановка (12-18) в (12-13) и (12-14) дает:

$$I_1 = (a - a^2) I_B/3; \quad I_2 = (a^2 - a) I_B/3,$$

откуда

$$I_1 = -I_2. \quad (12-20)$$

Подстановка (12-18) в (12-15) дает:

$$I_0 = 0.$$

Кроме того, на основании (12-19)

$$\begin{aligned} (a^2 \dot{U}_1 + a \dot{U}_2) - (a \dot{U}_1 + a^2 \dot{U}_2) &= (a^2 - a)(\dot{U}_1 - \dot{U}_2) = \\ &= (a^2 - a) R(I_1 - I_2)/2, \end{aligned}$$



или

$$\dot{U}_1 - \dot{U}_2 = R (\dot{I}_1 - \dot{I}_2)/2. \quad (12-21)$$

Уравнения (12-20) и (12-21) вместе с дополнительными первыми двумя уравнениями (12-17) достаточны для нахождения четырех неизвестных:  $\dot{I}_1$ ,  $\dot{I}_2$ ,  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$ . В результате совместного решения этих уравнений получается:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_A}{Z_1 + Z_2 + R}. \quad (12-22)$$

На рис. 12-24 представлены векторные диаграммы токов и напряжений в месте двухфазного короткого замыкания.

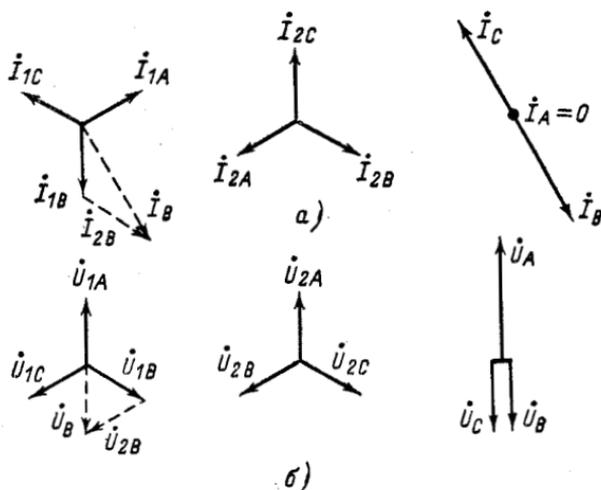


Рис. 12-24. Векторные диаграммы в месте двухфазного короткого замыкания.

а — токи; б — напряжения.

ния при  $R = 0$  (металлическое короткое замыкание). В этом случае в соответствии с (12-21)  $\dot{U}_1 = \dot{U}_2$ .

Векторные диаграммы построены в предположении, что вектор э. д. с.  $\dot{E}_A$  направлен вертикально вверх, причем углы комплексных сопротивлений прямой и обратной последовательностей одинаковы (например,  $60^\circ$ ). Поэтому  $\dot{U}_{1A}$  совпадает по фазе с  $\dot{E}_A$  и ток  $\dot{I}_{1A}$  отстает от  $\dot{U}_{1A}$  на заданный угол.

Сумма токов  $\dot{I}_{1A}$  и  $\dot{I}_{2A}$  в месте двухфазного короткого замыкания равна нулю, поэтому  $\dot{I}_A = 0$ . Токи  $\dot{I}_{1B}$  и  $\dot{I}_{2B}$

дают в сумме фазный ток  $\dot{I}_B$  в месте короткого замыкания, а токи  $\dot{I}_{1C}$  и  $\dot{I}_{2C}$  дают в сумме фазный ток  $\dot{I}_C$ .

Токи  $\dot{I}_B$  и  $\dot{I}_C$  находятся в противофазе.

Поскольку при построении векторных диаграмм сопротивление  $R$  в месте короткого замыкания принято равным нулю, фазные напряжения  $\dot{U}_B$  и  $\dot{U}_C$  в месте повреждения равны друг другу и соответственно линейное напряжение  $\dot{U}_{BC}$  равно нулю. По мере удаления от места короткого замыкания в сторону генератора линейное напряжение между фазами  $B$  и  $C$  возрастает.

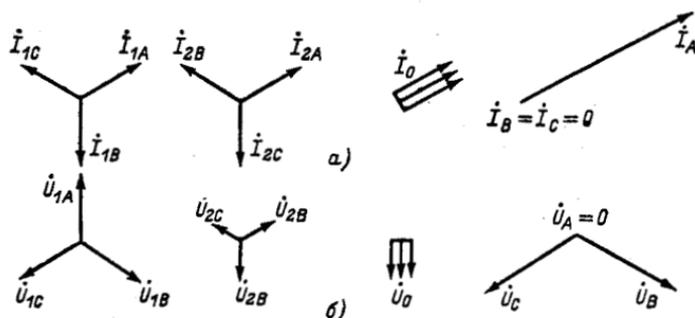


Рис. 12-25. Векторные диаграммы в месте однофазного короткого замыкания.

*a* — токи; *b* — напряжения.

2. Однофазное короткое замыкание (см. рис. 12-23, *г*).  
Граничные условия удовлетворяют уравнениям:

$$\dot{I}_B = \dot{I}_C = 0; \quad \dot{U}_A = R_3 \dot{I}_A.$$

Замена фазных величин их симметричными составляющими дает:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \dot{I}_0; \\ \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0 = 3R_3 \dot{I}_0. \end{aligned} \right\} \quad (12-23)$$

В результате совместного решения уравнений (12-17) и (12-23) получается:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_A}{Z_1 + Z_2 + Z_0 + 3R_3}. \quad (12-24)$$

Векторные диаграммы токов и напряжений при  $R_3 = 0$  представлены на рис. 12-25.

## 12-10. ПРОДОЛЬНАЯ НЕСИММЕТРИЯ

Продольная несимметрия в одной точке трехфазной цепи возникает в том случае, когда в рассечку фаз включаются не-

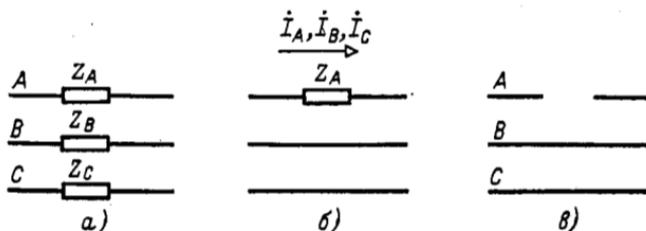


Рис. 12-26. Случай продольной несимметрии.

*a* — общий случай; *б* — сопротивление в одной фазе; *в* — замыкание одной фазы.

равные сопротивления, как это, например, показано на рис. 12-26, *a*. Любые два сопротивления могут быть при этом равны нулю или бесконечности.

Продольная несимметрия характеризуется в данном случае уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_A &= Z_A \dot{I}_A; \\ \dot{U}_B &= Z_B \dot{I}_B; \\ \dot{U}_C &= Z_C \dot{I}_C; \end{aligned} \right\} \quad (12-25)$$

здесь  $\dot{U}_A$ ,  $\dot{U}_B$  и  $\dot{U}_C$  — напряжения на выводах сопротивлений  $Z_A$ ,  $Z_B$  и  $Z_C$  (продольные напряжения).

В результате замены напряжений и токов, входящих в (12-25), симметричными составляющими получаются три уравнения (граничные условия), связывающие симметричные составляющие в месте продольной несимметрии.

В частном случае, изображенном на рис. 12-26, *б*,  $Z_B = Z_C = 0$  и соответственно  $\dot{U}_B = \dot{U}_C = 0$ .

Симметричные составляющие продольных напряжений

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 = \dot{U}_0 = \dot{U}_A / 3 = Z_A \dot{I}_A / 3 = Z_A (\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0) / 3. \quad (12-26)$$

**Пример 12-3.** К трехфазному генератору присоединена линия с асинхронным двигателем на конце (рис. 12-27, *a*). Нейтральные точки генератора и двигателя заземлены. Произошел обрыв фазы А

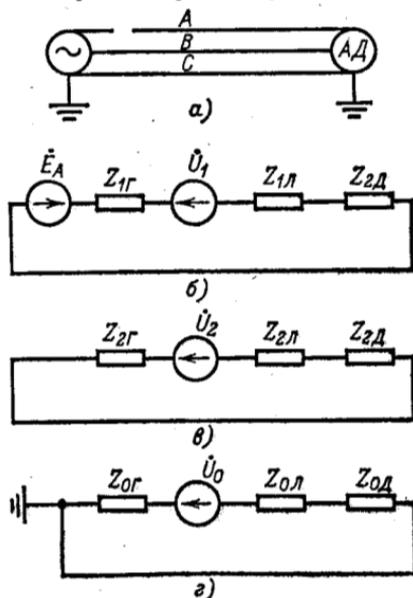


Рис. 12-27. Пример 12-3.

вблизи выводов генератора. Требуется определить токи в фазах *B* и *C* и напряжения в месте обрыва.

Обозначим:  $Z_{1г}, Z_{2г}, Z_{0г}$  — комплексные сопротивления прямой, обратной и нулевой последовательностей генератора;  $Z_{1л}, Z_{2л}, Z_{0л}$  — то же для линии;  $Z_{1д}, Z_{2д}, Z_{0д}$  — то же для асинхронного двигателя;  $E_A$  — э. д. с. фазы *A* генератора.

Для сокращения записи обозначим:

$$Z_1 = Z_{1г} + Z_{1л} + Z_{1д};$$

$$Z_2 = Z_{2г} + Z_{2л} + Z_{2д};$$

$$Z_0 = Z_{0г} + Z_{0л} + Z_{0д}.$$

На основании схем замещения для отдельных последовательностей (рис. 12-27, б — г) можно написать основные уравнения (12-17):

$$\dot{E}_A - \dot{U}_1 = Z_1 I_1; \quad -\dot{U}_2 = Z_2 I_2; \quad -\dot{U}_0 = Z_0 I_0.$$

Для данного случая добавочные уравнения согласно (12-26) при  $Z_A = \infty$  будут:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 = \dot{U}_0 \text{ и } I_1 + I_2 + I_0 = 0.$$

Совместное решение этих уравнений дает:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 = \dot{U}_0 = \dot{E}_A Z_2 Z_0 / N;$$

$$I_0 = -\dot{E}_A Z_2 / N; \quad I_2 = -\dot{E}_A Z_0 / N;$$

$$I_1 = \dot{E}_A (Z_2 + Z_0) / N,$$

где

$$N = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_0 + Z_2 Z_0.$$

Полные токи и напряжения могут быть легко найдены суммированием отдельных составляющих.

## 12-11. ФИЛЬТРЫ СИММЕТРИЧНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ

Фильтрами симметричных составляющих называются устройства, служащие для выделения соответствующих составляющих напряжений или токов трехфазной цепи. Фильтры имеют входные и выходные выводы. К входным выводам фильтра подводятся напряжения или токи трехфазной электрической цепи; на выходных выводах фильтра получается напряжение или ток, пропорциональные соответствующим симметричным составляющим электрических величин, подводимых к входным выводам.

Напряжения и токи, выделяемые фильтрами симметричных составляющих, используются на практике для цепей автоматики, защиты от несимметричных режимов или сигнализации. С этой целью к выходным выводам фильтров симметричных составляющих присоединяются соответствующие аппараты, приборы, реле и т. п.

Наиболее простой тип фильтра симметричных составляющих представляет собой фильтр токов нулевой последовательности, в котором суммируются токи трех фаз (рис. 12-28, а) или создаваемые ими магнитные потоки (рис. 12-28, б). В первом случае реагирующий прибор включается в нейтральный провод трех



трансформаторов тока <sup>1</sup>, а во втором случае — между выводами обмотки, насаженной на магнитопровод, охватывающий три фазы.

Фильтр напряжений нулевой последовательности выполняется с помощью трех однофазных трансформаторов напряжения, первичная обмотка которых соединяется звездой с выведенной нейтральной точкой, а вторичная обмотка соединяется разомкнутым треугольником (рис. 12-28, в).

Благодаря такому соединению составляющие напряжений прямой последовательности взаимно компенсируются:  $\dot{U}_{1A} + \dot{U}_{1B} + \dot{U}_{1C} = 0$ . То же имеет место и в отношении напряжений обратной последовательности:  $\dot{U}_{2A} + \dot{U}_{2B} + \dot{U}_{2C} = 0$ .

Составляющие же напряжений нулевой последовательности образуют на выводах разомкнутого треугольника напряжения  $3\dot{U}_0$ .

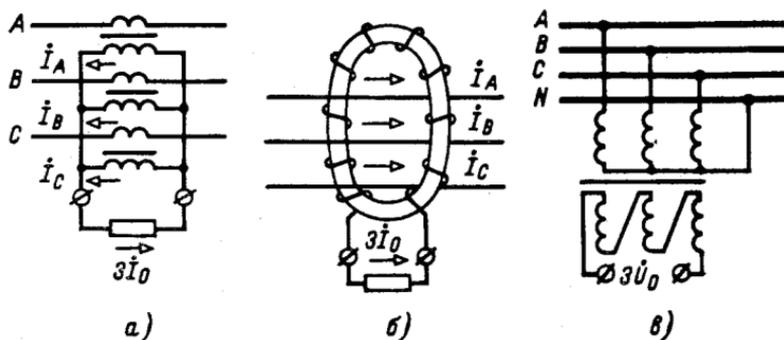


Рис. 12-28. Фильтры составляющих нулевой последовательности, а и б — фильтры токов; в — фильтр напряжений.

Фильтр напряжений нулевой последовательности может быть получен и с помощью трех равных сопротивлений, соединенных звездой и приключенных к трехфазной цепи. При симметричном режиме работы трехфазной цепи напряжение между нейтральной точкой этих сопротивлений и нейтральной точкой цепи равно нулю; при появлении же в трехфазной цепи составляющих напряжений нулевой последовательности между упомянутыми точками возникает напряжение, пропорциональное составляющей нулевой последовательности.

Системы симметричных составляющих прямой и обратной последовательностей различаются порядком следования во времени амплитуд фазных величин, поэтому всякая схема для выделения составляющих обратной последовательности может быть путем перестановки любых двух фаз превращена в схему для выделения составляющих прямой последовательности. С этой точки зрения является достаточным рассмотреть фильтры только какой-либо одной из указанных последовательностей, например обратной, распространив затем полученные

<sup>1</sup> Вторичные токи трансформаторов тока приближенно равны первичным, деленным на отношение чисел витков  $\omega_2/\omega_1$ . На рис. 12-28 вторичные токи и напряжения приведены к первичной обмотке.

результаты на фильтры симметричных составляющих другой (прямой) последовательности.

Принцип выполнения фильтров токов и напряжений обратной последовательности иллюстрирован ниже на примере двух схем: схемы фильтра токов трансформаторного типа (рис. 12-29) и схемы четырехэлементного активно-емкостного фильтра напряжений (рис. 12-30).

В фильтрах обоих типов суммируются напряжения, находящиеся в определенных соотношениях с токами или напряжениями, подводимыми к входным выводам фильтров.

Фильтр токов обратной последовательности, изображенный на рис. 12-29, состоит из активных сопротивлений, между которыми проложен нейтральный провод трансформатора тока, и промежуточного трансформатора, токовые обмотки которого в фазах *B* и *C* связаны индуктивно с третьей обмоткой в выходной цепи; параметры фильтра удовлетворяют условию  $R = \sqrt{3} \omega M$ , где

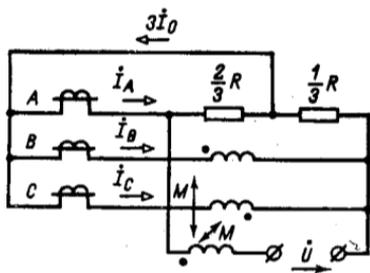


Рис. 12-29. Фильтр токов обратной последовательности,

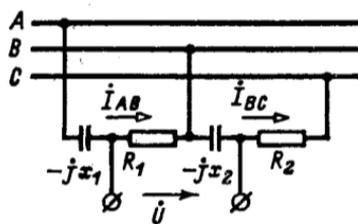


Рис. 12-30. Фильтр напряжений обратной последовательности.

$\omega$  — угловая частота тока, на которую рассчитан фильтр;  $M$  — взаимная индуктивность первичной и вторичной обмоток промежуточного трансформатора.

Благодаря тому, что магнитопровод промежуточного трансформатора имеет воздушный зазор, обеспечивается линейная зависимость э. д. с. взаимной индукции от токов.

Напишем уравнение второго закона Кирхгофа по выходному контуру:

$$\dot{U} = \frac{2}{3} R I_A - \frac{1}{3} R (I_B + I_C) - j\omega M (I_B + I_C).$$

С учетом первого закона Кирхгофа

$$-(I_B + I_C) = I_A - 3I_0$$

и соотношений между симметричными составляющими

$$I_A = I_1 + I_2 + I_0;$$

$$I_B - I_C = -j\sqrt{3} (I_1 - I_2)$$

получим окончательно:

$$\dot{U} = R (I_1 + I_2) - \sqrt{3} \omega M (I_1 - I_2) = 2R I_2, \quad (12-27)$$



т. е. выходное напряжение пропорционально току обратной последовательности.

Влияние токов нулевой последовательности отсутствует в рассматриваемом фильтре благодаря взаимной компенсации падений напряжения от токов  $I_0$  и  $2I_0$  в сопротивлениях  $\frac{2}{3}R$  и  $\frac{1}{3}R$ . Другой возможный способ устранения влияния токов нулевой последовательности заключается в том, что к фильтру токов обратной последовательности вместо фазных токов  $I_A$ ,  $I_B$  и  $I_C$  подводятся разности фазных токов  $I_A - I_B$ ,  $I_B - I_C$  и  $I_C - I_A$ , в которых составляющие нулевой последовательности отсутствуют.

Аналогичным образом для устранения влияния напряжений нулевой последовательности фильтры напряжений обратной последовательности включаются обычно на линейные напряжения  $\dot{U}_{AB}$ ,  $\dot{U}_{BC}$  и  $\dot{U}_{CA}$ .

На рис. 12-30 показан четырехэлементный фильтр напряжений обратной последовательности, применяемый в релейной защите. Параметры элементов фильтра подбираются из условия

$$R_1 : x_1 = x_2 : R_2 = \sqrt{3}. \quad (12-28)$$

При холостом режиме работы фильтра, т. е. при разомкнутых вторичных выводах, напряжение на этих выводах равно сумме

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \dot{U}_{AB} \angle 30^\circ \text{ и } \frac{\sqrt{3}}{2} \dot{U}_{BC} \angle -30^\circ.$$

Если  $\dot{U}_{AB}$  и  $\dot{U}_{BC}$  выразить через симметричные составляющие линейных напряжений, то напряжение на выходных выводах фильтра будет равно:

$$\dot{U} = 1,5 \dot{U}_{2AC}, \quad (12-29)$$

т. е. пропорционально составляющей обратной последовательности. Если на выходе фильтра присоединена нагрузка (реагирующий прибор), то ток или напряжение в выходной цепи могут быть получены на основании теоремы об эквивалентном источнике.

**Пример 12-4.** К выходным выводам фильтра токов обратной последовательности, показанного на рис. 12-29, подключена нагрузка

$$Z_H = r_H + j\omega L_H.$$

Определить ток в нагрузке при подведении к входным выводам фильтра системы несимметричных токов.

Будем исходить из предположения, что к выходным выводам фильтра подключены источники токов  $I_A$ ,  $I_B$  и  $I_C$ , так как эти токи не зависят от сопротивлений нагрузки.

Согласно (12-27) напряжение на разомкнутых выходных выводах фильтра равно  $\dot{U} = 2RI_2$ .

По теореме об эквивалентном источнике ток в нагрузке равен:

$$I_H = \frac{\dot{U}}{Z_\Phi + Z_H},$$

где  $Z_\Phi$  — сопротивление фильтра, измеренное со стороны его выходных выводов при разомкнутых входных выводах, так как внутренние сопротивления источников тока равны бесконечности.



Обозначив через  $Z = r + j\omega L$  сопротивление вторичной обмотки промежуточного трансформатора, включенной в выходную цепь, получим:

$$I_H = \frac{2RI_2}{r + r_H + R + j\omega(L + L_H)}.$$

Таким образом, при заданном значении  $Z_H$  пропорциональность тока  $I_H$  току  $I_2$  сохраняется.

**Пример 12-5.** К выходным выводам фильтра напряжений обратной последовательности, показанного на рис. 12-30, подключена нагрузка  $Z_H$ . Параметры элементов фильтра, удовлетворяющие соотношению (12-28), выбраны следующим образом:

$$x_1 = \frac{R_1}{\sqrt{3}}; \quad x_2 = R_1; \quad R_2 = \frac{R_1}{\sqrt{3}}.$$

Определить напряжение на нагрузке при подведении к входным выводам фильтра несимметричных напряжений.

Будем исходить из предположения, что к входным выводам фильтра подключены источники э. д. с.  $\dot{U}_{AB}$  и  $\dot{U}_{BC}$ . Согласно (12-29) напряжение на разомкнутых выходных выводах фильтра равно:

$$\dot{U} = 1,5\dot{U}_{2AC} = 1,5\sqrt{3}\dot{U}_{2A} \angle 30^\circ.$$

По теореме об эквивалентном источнике напряжение на нагрузке равно:

$$\dot{U}_H = \frac{Z_H}{Z_\Phi + Z_H} \dot{U},$$

где  $Z_\Phi$  — сопротивление фильтра, измеренное со стороны его выходных выводов при замкнутых входных выводах, так как внутренние сопротивления источников э. д. с. равны нулю.

Следовательно, в соответствии с заданием

$$\begin{aligned} Z_\Phi &= -j \left( \frac{R_1 x_1}{R_1 - jx_1} + \frac{R_2 x_2}{R_2 - jx_2} \right) = \\ &= -j \left( \frac{R_1 \frac{R_1}{\sqrt{3}}}{R_1 - j \frac{R_1}{\sqrt{3}}} + \frac{\frac{R_1}{\sqrt{3}} R_1}{R_1 - jR_1} \right) = 0,965R_1 \angle -45^\circ; \end{aligned}$$

отсюда

$$\dot{U}_H = \frac{1,5\sqrt{3}\dot{U}_{2A} \angle 30^\circ Z_H}{0,965R_1 \angle -45^\circ + Z_H}.$$

При любом заданном значении  $Z_H$  сохраняется пропорциональность между  $\dot{U}_H$  и  $\dot{U}_{2A}$ .

## 12-12. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

12-1. В симметричной трехфазной цепи нагрузка  $Z = 10 + j5$  Ом (на фазу) соединена звездой; линейные напряжения на нагрузке равны 230 В. Вычислить ток.

О т в е т: 11,9 А.



12-2. В симметричной трехфазной цепи нагрузка  $Z_{AB} = Z_{BC} = Z_{CA} = 10 \angle 30^\circ$  Ом соединена треугольником; линейные напряжения на нагрузке равны 100 В. Определить активную и реактивную мощности нагрузки.

Ответ: 2600 Вт; 1500 вар.

12-3. В симметричной трехфазной цепи нагрузки  $Z = 10 - j14$  Ом (на фазу) соединена звездой; комплексное сопротивление линии от генератора до нагрузки равно  $1 + j2$  Ом (на фазу). Линейные напряжения на выводах генератора равны 100 В. Вычислить фазное напряжение на нагрузке.

Ответ: 61,2 В.

12-4. Несимметричная трехфазная нагрузка соединена треугольником:  $Z_{AB} = 100 \angle 0^\circ$ ;  $Z_{BC} = 100 \angle -90^\circ$ ;  $Z_{CA} = 141 \angle 45^\circ$  Ом. Линейные напряжения на нагрузке симметричны и равны 200 В. Вычислить линейные токи и активную мощность нагрузки, приняв  $\dot{U}_{AB} = 200 \angle 0^\circ$  В.

Ответ: 2,13  $\angle -40^\circ$ ; 1,04  $\angle -105^\circ$ ; 2,73  $\angle 120^\circ$  А; 600 Вт.

12-5. Решить ту же задачу при тех же напряжениях, но при обратном чередовании фаз.

Ответ: 3,39  $\angle 6^\circ$ ; 3,86  $\angle -165^\circ$ ; 0,735  $\angle 60^\circ$  А; 600 Вт.

12-6. Несимметричная трехфазная нагрузка соединена звездой:  $Z_A = 100 \angle -90^\circ$ ;  $Z_B = 100 \angle 0^\circ$ ;  $Z_C = 141 \angle 45^\circ$  Ом. Линейные напряжения на нагрузке симметричны и равны 200 В. Вычислить линейные токи и активную мощность нагрузки.

Ответ: 1,34  $\angle 32^\circ$ ; 1,72  $\angle -138^\circ$ ; 0,463  $\angle 72^\circ$  А; 317,4 Вт.

12-7. Несимметричная трехфазная нагрузка соединена треугольником:  $Z_{AB} = 8,66 + j5$ ;  $Z_{BC} = 3 + j4$ ;  $Z_{CA} = 5 - j5$  Ом; линейные напряжения на нагрузке симметричны и равны 100 В каждое. Определить активную, реактивную и полную мощности нагрузки при прямом и обратном чередовании подведенных напряжений.

Ответ: 3066 Вт; 1100 вар; 3260 В·А.

12-8. Несимметричная трехфазная нагрузка соединена треугольником:  $Z_{AB} = j3$ ;  $Z_{BC} = 3$ ;  $Z_{CA} = -j3$  Ом; активная мощность измеряется двумя ваттметрами, включенными по схеме рис. 12-18. Напряжения на нагрузке симметричны и равны 100 В каждое. Определить показания ваттметров.

Ответ: 2885; 448 Вт.

12-9. Вычислить линейные токи, реактивную и полную мощности в симметричной трехфазной цепи по показаниям двух ваттметров, включенных по схеме рис. 12-18, а, 1986 и 2517 Вт. Линейное напряжение равно 208 В.

Ответ: 12,8 А; -919 вар; 4600 В·А.

12-10. К трехфазному генератору, соединенному звездой и имеющему фазную э. д. с. 100 В, подключена с помощью четырехпроводной линии несимметричная нагрузка; между фазой А и нейтральным проводом 50 Ом; между фазой В и нейтральным проводом  $-j50$  Ом; между фазами В и С  $40 + j20$  Ом. Комплексные сопротивления линейных проводов и нейтрального провода одинаковы и равны  $1 + j2$  Ом. Вычислить линейные токи и активную мощность на выводах генератора, приняв сопротивление его равным нулю.

Ответ:  $I_A = 1,92$  А; 388 Вт.

12-11. Трехфазный генератор, соединенный звездой, имеет фазные э. д. с. 135,  $-67,5 - j117$  и  $-67,5 + j117$  В и внутреннее сопротив-



ление  $0,1 + j1,5$  Ом (на фазу). От генератора отходит линия, имеющая сопротивление  $0,9 + j0,5$  Ом; в конце линии несимметричная нагрузка соединена в треугольник:  $Z_{AB} = 40 + j60$ ,  $Z_{BC} = 100$ ;  $Z_{CA} = 50 - j20$  Ом.

Вычислить линейные токи.

Ответ:  $7,06 \angle -20^\circ 24'$ ;  $2,85 \angle -161^\circ 42'$ ;  $5,15 \angle 139^\circ 24'$  А.

12-12. Пользуясь решением предыдущей задачи, вычислить фазные токи, напряжения и активную мощность нагрузки.

Ответ:  $2,97 \angle -28,7^\circ$ ;  $2,33 \angle -92,4^\circ$ ;  $4,15 \angle 165,4^\circ$  А;  $214,5 \angle 27,6^\circ$ ;  $232,8 \angle -92,4^\circ$ ;  $224 \angle 143,6^\circ$  В; 1760 Вт.

12-13. В чем заключается преимущество трехфазного тока перед однофазным?

12-14. Как определяется чередование фаз опытным путем?

12-15. В какую сторону вращается магнитное поле, созданное двумя пульсирующими полями, оси которых сдвинуты на угол  $90^\circ$ , а токи в обмотке сдвинуты по фазе на четверть периода?

12-16. Пользуясь правилами правой и левой руки, показать, что короткозамкнутый ротор, выполненный в виде беличьей клетки, приходит во вращение в том же направлении, в котором вращается магнитное поле.

12-17. Как изменить направление вращения поля?

12-18. Определить симметричные составляющие для заданной системы токов:  $I_A = 6,6 \angle 120^\circ$ ;  $I_B = 6 \angle 0^\circ$ ;  $I_C = 5,4 \angle 240^\circ$  А.

Ответ:  $I_1 = -3 + j5,2$ ;  $I_2 = -0,3 + j0,17$ ;  $I_0 = j0,35$  А.

12-19. Для чего несимметричная система векторов раскладывается на симметричные составляющие?

12-20. Почему сопротивление нулевой последовательности линии превышает сопротивление прямой последовательности линии (пояснить физическую сторону явления)?

12-21. Показать, что угол фазового сдвига напряжения и тока нулевой (или обратной) последовательности не зависит от сопротивления в месте повреждения.

12-22. Доказать, что мощность трехфазной цепи выражается через мощности прямой, обратной и нулевой последовательностей по формуле

$$\tilde{S} = 3(\dot{U}_1^* I_1 + \dot{U}_2^* I_2 + \dot{U}_0^* I_0) = 3(\tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 + \tilde{S}_0).$$

12-23. В каких случаях и какое возникает напряжение нулевой последовательности в трехфазной цепи с изолированной нейтралью?

---

## ГЛАВА ТРИНАДЦАТАЯ

### ЦЕПИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

#### 13-1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА РЯДА ФУРЬЕ

До сих пор изучались линейные электрические цепи однофазного и трехфазного токов, в которых все э. д. с., токи и напряжения изменялись синусоидально с одинаковой частотой.



При разборе принципа генерирования синусоидальной э. д. с. (см. § 2-2) отмечалось, что для получения синусоидальной э. д. с. в обмотке как явнополюсного, так и неявнополюсного генератора стремятся получить синусоидальную форму распределения магнитной индукции в воздушном зазоре между статором и ротором. В действительности, однако, распределение магнитной индукции может отступать от синусоиды, вследствие чего э. д. с., наводимая генератором, может быть не точно синусоидальной. Электронные генераторы, применяемые в технике высоких частот, генерируют токи, которые в зависимости от режима работы электровакуумных и полупроводниковых приборов также могут в большей или меньшей степени отличаться от синусоидальных. По этим причинам, а также если источники синусоидальных э. д. с., присоединенные к цепи, имеют разные частоты, напряжения и токи в цепи оказываются не синусоидальными.

Во многих электротехнических и радиотехнических устройствах несинусоидальный режим работы цепи является нормальным режимом. Особенно характерен такой режим для нелинейных цепей. Даже при синусоидальной э. д. с. форма кривой тока может резко отличаться от синусоиды при наличии в цепи нелинейного элемента<sup>1</sup> (электрической дуги, индуктивной катушки с насыщенным магнитопроводом, полупроводникового прибора и т. п.).

Настоящая глава посвящена исследованию периодических процессов в линейных электрических цепях, находящихся под воздействием несинусоидальных э. д. с. Электрические и магнитные величины в таких цепях представляют собой периодические несинусоидальные функции.

Явления, происходящие в линейной электрической цепи с периодической несинусоидальной э. д. с., проще всего поддаются исследованию, если эту э. д. с. разложить на сумму постоянной и синусоидальных слагающих (называемых гармониками), затем на основе уже изученных методов расчета линейных электрических цепей определить токи и напряжения, вызванные каждой слагающей э. д. с. в отдельности, и, наконец, просуммировать соответствующие величины. Полученные таким образом токи и напряжения будут представлять собой периодические несинусоидальные функции времени, причем их пе-

---

<sup>1</sup> Несинусоидальные процессы в нелинейных цепях рассматриваются во второй части курса.



риод будет равен периоду заданной несинусоидальной э. д. с.

Кроме вычисления токов и напряжений в электрической цепи по заданной несинусоидальной э. д. с. источника (или заданному току источника тока), на практике может возникнуть необходимость выявления гармонического состава или степени отклонения от синусоиды той или иной периодической функции времени, полученной, например, экспериментально в результате осциллографирования.

На рис. 13-1 в виде примера показана периодическая несинусоидальная функция времени с периодом  $T$ :

$$f(t) = f(t + T).$$

Вид разложения такой функции зависит от выбора начала отсчета (см. § 13-3).

В пределах интервала времени  $T$  функция  $f(t)$  может быть либо непрерывной, либо иметь точки разрыва непрерывности.

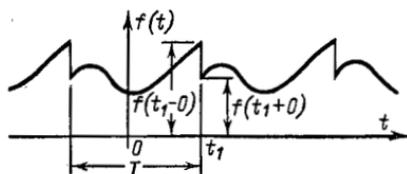


Рис. 13-1. Периодическая несинусоидальная функция времени.

Будем считать, что все эти точки разрыва непрерывности обладают следующим свойством: если функция  $f(t)$  претерпевает разрыв непрерывности в точке  $t = t_1$  (рис. 13-1), то существуют конечные пределы функции  $f(t)$  при приближении к точке разрыва как справа (т. е. от значений  $t > t_1$ ), так и слева (т. е. от значений  $t < t_1$ ). Эти пределы условно обозначаются  $f(t_1 + 0)$  и  $f(t_1 - 0)$  или, что то же,  $f(t_1 +)$  и  $f(t_1 -)$ . Как известно, такие точки разрыва непрерывности называются точками разрыва первого рода.

Будем также считать, что в пределах интервала времени  $T$  число разрывов первого рода, а также число максимумов и минимумов функции  $f(t)$  конечны.

Таким образом, будем рассматривать функции, удовлетворяющие условиям Дирихле; следует заметить, что э. д. с., токи и напряжения в реальных электрических цепях удовлетворяют этим условиям.

Известно, что периодическая несинусоидальная функция, удовлетворяющая условиям Дирихле, может быть представлена в виде бесконечно гармонического ряда — ряда Фурье. Сумма этого ряда совпадает со значениями

$f(t)$  для всех точек непрерывности этой функции, а в точках разрыва дает среднее арифметическое левого и правого предельных значений  $f(t)$ , т. е.

$$\frac{1}{2} [f(t-) + f(t+)].$$

Обозначим  $\omega = 2\pi/T$  и будем называть  $\omega$  основной угловой частотой. Синусоидальная и косинусоидальная слагающие с угловой частотой  $\omega$  образуют основную гармонику. Слагающие с более высокими угловыми частотами представляют собой высшие гармоники.

Гармонический ряд в тригонометрической форме имеет вид:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \quad (13-1)$$

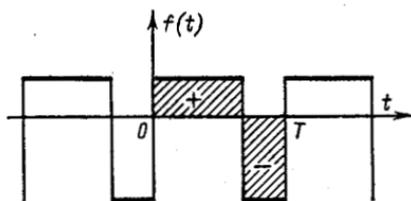
где

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega t dt; \quad (13-2)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega t dt; \quad (13-3)$$

здесь  $a_0/2$  — постоянная слагающая;  $a_n$  и  $b_n$  — амплитуды косинусоидальных и синусоидальных членов ряда.

Рис. 13-2. Несинусоидальная функция, среднее значение которой за период равно нулю.



Постоянная слагающая  $a_0/2$ , определяемая на основании (13-2) при  $n = 0$ , представляет собой среднее значение функции  $f(t)$  за период. Она равна нулю, когда площади положительных и отрицательных значений  $f(t)$  одинаковы (рис. 13-2).

Коэффициенты ряда Фурье  $a_n$  и  $b_n$  не зависят от  $t_0$ ; поэтому значение  $t_0$  может быть выбрано произвольно. В этом легко убедиться, если учесть, что подынтеграль-

ные функции в (13-2) и (13-3) имеют период  $T$ . Обозначив подынтегральную функцию через  $g(t)$ , получим:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} g(t) dt = \int_{t_0}^0 g(t) dt + \int_0^T g(t) dt + \int_T^{t_0+T} g(t) dt.$$

Так как  $g(t) = g(t - T)$ , то

$$\int_T^{t_0+T} g(t) dt = \int_T^{t_0+T} g(t - T) dt.$$

Заменой переменной  $x = t - T$  находим:

$$\int_T^{t_0+T} g(t) dt = \int_0^{t_0} g(x) dx = \int_0^{t_0} g(t) dt.$$

Следовательно,

$$\int_T^{t_0+T} g(t) dt = \int_0^{t_0} g(t) dt.$$

Полученный результат можно еще объяснить так: площади, выражаемые интегралами  $\int_{t_0}^{t_0+T}$  и  $\int_0^T$ , равны, так как в силу периодичности подынтегральной функции любое изменение  $t_0$  не меняет площади, ограниченной данной функцией и осью абсцисс за период.

Положив  $t_0 = 0$  и введя новую переменную  $\alpha = \omega t$ , найдем (с учетом того, что  $\omega T = 2\pi$  и  $d\alpha = \omega dt$ ):

$$f(\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha), \quad (13-4)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha; \quad (13-5)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin n\alpha d\alpha. \quad (13-6)$$

Если принять  $t_0 = -\frac{T}{2}$ , то пределы интегрирования будут равны соответственно  $-\pi$  и  $+\pi$ .



Сумма косинусоид и синусоид, выражаемая формулой (13-1) или (13-4), может быть представлена в виде суммы только одних синусоид с соответствующими начальными фазами.

Так, если принять

$$a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha = F_n \sin(n\alpha + \theta_n), \quad (13-7)$$

где

$$F_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \theta_n = \operatorname{arctg} \frac{a_n}{b_n},$$

то ряд получит вид <sup>1</sup>:

$$f(\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin(n\alpha + \theta_n). \quad (13-8)$$

Напомним, что угол  $\theta_n$  находится с учетом знаков  $a_n$  и  $b_n$ , определяющих знаки синуса и косинуса.

Форма (13-8) удобна в том случае, когда требуется знать процентное содержание каждой гармоники; она обычно применяется для расчета несинусоидальных токов и напряжений в электрических цепях (см. § 13-5).

Хотя теоретически ряд Фурье содержит бесконечное число слагаемых, однако он обычно быстро сходится. Сходящийся ряд может выражать заданную функцию с любой требуемой степенью точности; если он сходится быстро, то практически достаточно взять небольшое число гармоник для получения требуемой степени точности.

Встречающиеся на практике периодические несинусоидальные функции могут быть разбиты на две группы. Первая группа включает в себя кривые геометрически правильной формы. Вторая группа включает в себя кривые более сложной формы; разложение их в ряд Фурье производится графоаналитически.

*Графоаналитический метод разложения в ряд Фурье* представляет приближенный метод численного интегриро-

<sup>1</sup> Иногда периодическую функцию представляют в виде следующего ряда:

$$f(\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos(n\alpha - \psi_n), \quad \text{где } \psi_n = \frac{\pi}{2} - \theta_n,$$

что следует из равенства

$$\cos(n\alpha - \psi_n) = \sin\left(n\alpha - \psi_n + \frac{\pi}{2}\right).$$



вания, при котором вычисление определенного интеграла заменяется нахождением суммы конечного числа слагаемых. С этой целью период функции  $f(\alpha)$ , равный  $2\pi$ , разбивается на  $m$  равных интервалов  $\Delta\alpha$ , так что  $m\Delta\alpha = 2\pi$ .

Расстояние от начала координат до середины  $k$ -го интервала составляет угол  $\alpha = \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{m}$ .

Пусть  $f_k(\alpha)$  есть значение периодической несинусоидальной функции в середине  $k$ -го интервала.

Интегралы, входящие в (13-5) и (13-6), заменяются суммами:

$$\begin{aligned} a_n &\approx \frac{1}{\pi} \sum_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha \Delta\alpha \approx \\ &\approx \frac{2}{m} \sum_{k=1}^m f_k(\alpha) \cos n \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{m}; \\ b_n &\approx \frac{1}{\pi} \sum_0^{2\pi} f(\alpha) \sin n\alpha \Delta\alpha \approx \\ &\approx \frac{2}{m} \sum_{k=1}^m f_k(\alpha) \sin n \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{m}. \end{aligned}$$

Если в пределах периода имеются точки разрыва, то при указанном графическом методе разложения целесообразно делать разбивку на интервалы так, чтобы точки разрыва не были в серединах интервалов.

В описанной выше технике выполнения графоаналитического разложения в ряд Фурье брались значения функции в середине интервалов; если вместо этого брать значения в конце или начале интервалов, то в случае четной функции наряду с косинусоидами в разложении появятся и синусоиды, которых четная функция не содержит.

### 13-2. СЛУЧАИ СИММЕТРИИ

Периодические несинусоидальные функции, изображающие электрические и магнитные величины, обладают обычно каким-либо видом симметрии и это облегчает разложение их в ряд Фурье.

Рассмотрим следующие случаи симметрии:

1. Функция  $f(\alpha)$  симметрична относительно оси ординат (рис. 13-3), т. е.  $f(\alpha) = f(-\alpha)$ . Такие функции назы-



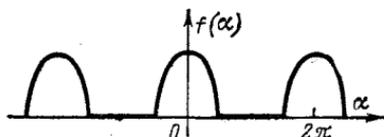
ваются четными. Поскольку синусоиды любых частот являются нечетными функциями, они не входят в состав ряда.

Поэтому при данном виде симметрии

$$f(\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\alpha,$$

т. е. четная функция может содержать только косинусоиды и постоянную составляющую.

Рис. 13-3. Функция, симметричная относительно оси ординат,



Важным свойством четных функций является также то, что для определения коэффициентов  $a_n$  достаточно пользоваться кривой  $f(\alpha)$  за половину периода, т. е.

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha. \quad (13-9)$$

Это следует из равенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha = \int_{-\pi}^0 f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha + \int_0^{\pi} f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha.$$

Замена в первом интеграле  $\alpha$  на  $-\alpha$  приводит к (13-9).

2. Функция  $f(\alpha)$  симметрична относительно начала координат (рис. 13-4), т. е.  $f(\alpha) = -f(-\alpha)$ . Такие функции называются нечетными. Поскольку постоянная слагающая и косинусоиды этому условию не удовлетворяют, при данном виде симметрии ряд примет вид:

$$f(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\alpha,$$

т. е. нечетная функция может содержать только синусоиды.

В этом случае, так же как и в предыдущем, для определения коэффициентов  $b_n$  достаточно пользоваться кри-

вой  $f(\alpha)$  за половину периода, т. е.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha. \quad (13-10)$$

3. Функция  $f(\alpha)$  симметрична относительно оси абсцисс при совмещении двух полупериодов во времени (рис. 13-5), т. е.  $f(\alpha) = -f(\alpha + \pi)$ .

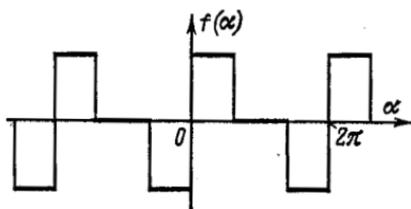


Рис. 13-4. Функция, симметричная относительно начала координат,

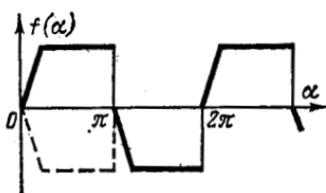


Рис. 13-5. Функция, симметричная относительно оси абсцисс при совмещении двух полупериодов во времени,

Заменяя  $f(\alpha)$  в соответствии с (13-4), получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha] = \\ & = -\frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n(\alpha + \pi) + b_n \sin n(\alpha + \pi)], \end{aligned}$$

откуда для четных  $n$

$$a_0 + 2 \sum_{n=2, 4, 6 \dots}^{\infty} [a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha] = 0.$$

Это условие удовлетворяется при произвольных значениях  $\alpha$  только в том случае, если  $a_0 = 0$  и  $a_n = b_n = 0$  при четных  $n$ .

Поэтому при данном виде симметрии

$$f(\alpha) = \sum_{n=1, 3, 5 \dots}^{\infty} (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha),$$

т. е. функция, симметричная относительно оси абсцисс при совмещении двух полупериодов во времени, содержит только нечетные гармоники.

Коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  могут вычисляться в этом случае по формулам (13-9) и (13-10).

Раскладывая периодическую несинусоидальную функцию в ряд Фурье, следует предварительно выяснить, не обладает ли заданная функция каким-либо видом симметрии. Наличие симметрии позволяет заранее предсказать, каких гармоник следует ожидать в разложении.

Если одновременно выполняются условия симметрии по пп. 1 и 3, то в разложении содержатся только нечетные косинусоиды, если по пп. 2 и 3, то содержатся только нечетные синусоиды.

Допустим, что функция, содержащая только нечетные косинусоиды, удовлетворяет, кроме того, условию  $f(\alpha) = -f(\pi - \alpha)$ . Так как при нечетных  $n \cos n\alpha = -\cos n(\pi - \alpha)$ , то в этом случае для определения коэффициентов  $a_n$  достаточно пользоваться кривой  $f(\alpha)$  за четверть периода:

$$a_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha. \quad (13-9a)$$

В свою очередь если функция, содержащая только нечетные синусоиды, удовлетворяет условию  $f(\alpha) = f(\pi - \alpha)$ , то ввиду того что при нечетных  $n \sin n\alpha = \sin n(\pi - \alpha)$  и в этом случае для определения коэффициентов  $b_n$  достаточно пользоваться кривой  $f(\alpha)$  за четверть периода:

$$b_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha. \quad (13-10a)$$

Виды симметрии зависят от выбора начала отсчета. Если начало отсчета может быть выбрано произвольно, то целесообразно выбрать его так, чтобы получить наибольшую симметрию.

Данные о коэффициентах ряда Фурье, относящиеся к разобранным выше случаям симметрии, сведены в табл. 13-1.

**Пример 13-1.** Требуется разложить в ряд Фурье пилообразную функцию, показанную на рис. 13-6. Эта функция удовлетворяет условию

$$f(\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{\pi} \quad \text{при} \quad 0 < \alpha < 2\pi.$$

Заданная функция является нечетной, поэтому в разложении в ряд отсутствуют постоянная составляющая и косинусоиды; на основа-

## Условия симметрии и коэффициенты ряда Фурье

№ п/п.	Симметрия относительно	Математическое условие	Коэффициенты		
			$a_0$	$a_n$	$b_n$
1	Оси ординат (четная функция)	$f(\alpha) = f(-\alpha)$	Есть <sup>1</sup>	Есть	Нули
2	Начала координат (нечетная функция)	$f(\alpha) = -f(-\alpha)$	Ноль	Нули	Есть
3	Оси абсцисс при совмещении двух полу периодов	$f(\alpha) = -f(\alpha + \pi)$	Ноль	Есть только нечетные	Есть только нечетные
4	Случай 1 и 3 одновременно	$f(\alpha) = f(-\alpha) = -f(\alpha + \pi)$	Ноль	Есть только нечетные	Нули
5	Случай 2 и 3 одновременно	$f(\alpha) = -f(-\alpha) = -f(\alpha + \pi)$	Ноль	Нули	Есть только нечетные

<sup>1</sup> В частном случае, когда среднее значение функции  $f(\alpha)$  за период равно нулю,  $a_0 = 0$ .

нии (13-10)

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) \sin n\alpha \, d\alpha = \frac{2}{n\pi}.$$

Следовательно,

$$f(\alpha) = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\sin \alpha}{1} + \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{\sin 3\alpha}{3} + \dots \right).$$

В точках  $\alpha = 0, 2\pi, 4\pi \dots$  сумма ряда равна нулю, т. е. среднему арифметическому левого и правого предельных значений функции  $f(\pi)$ .

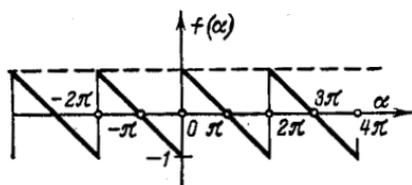


Рис. 13-6. Пример 13-1.

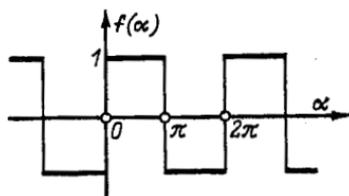


Рис. 13-7. Пример 13-2.

**Пример 13-2.** Требуется разложить в ряд Фурье знакопеременную прямоугольную функцию, показанную на рис. 13-7. Эта функция удовлетворяет условиям

$$f(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < \alpha < \pi; \\ -1 & \text{при } \pi < \alpha < 2\pi. \end{cases}$$

Заданная функция нечетна и, кроме того, симметрична относительно оси абсцисс при совмещении полупериодов. Поэтому в разложении в ряд отсутствуют постоянная составляющая, все косинусоиды и четные синусоиды. Кроме того, выполняется условие  $f(\alpha) = f(\pi - \alpha)$ . Поэтому для определения коэффициентов  $b_n$  воспользуемся формулой (13-10а):

$$b_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin n\alpha \, d\alpha = \frac{4}{n\pi},$$

где  $n$  — нечетно, откуда

$$f(\alpha) = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\sin \alpha}{1} + \frac{\sin 3\alpha}{3} + \frac{\sin 5\alpha}{5} + \dots \right).$$

### 13-3. ПЕРЕНОС НАЧАЛА ОТСЧЕТА

Положим, что для некоторой периодической несинусоидальной функции  $f(\alpha)$  коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  являются заданными, т. е. известно разложение данной функции в ряд Фурье:

$$f(\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha).$$



Если сместить начало отсчета на некоторый отрезок  $\beta$  вправо или влево относительно исходного начала координат, то разложение в ряд Фурье относительно новой координатной системы будет получено заменой  $\alpha$  на  $\alpha_1 + \beta$ , где  $\alpha_1$  — абсцисса в новой системе координат; положительное значение  $\beta$  соответствует смещению нового начала отсчета вправо, а отрицательное — влево. Итак,

$$f(\alpha_1 + \beta) = f_1(\alpha_1) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n(\alpha_1 + \beta) + b_n \sin n(\alpha_1 + \beta)]. \quad (13-11)$$

Эта формула позволяет быстро находить разложение в ряд Фурье функции, если известны коэффициенты ряда Фурье для другой функции, получаемой в результате смещения первой по оси абсцисс на постоянное значение.

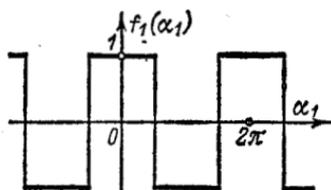


Рис. 13-8. Пример 13-3.

**Пример 13-3.** Требуется найти разложение в ряд Фурье функции, изображенной на рис. 13-8, используя результаты примера 13-2.

Функция на рис. 13-8 получается при переносе начала координат на отрезок  $\beta = \pi/2$ . Следовательно, на рис. 13-7 (точка  $O$ ) вправо в соответствии с (13-11)

$$f_2(\alpha_1) = \frac{4}{\pi} \left[ \frac{\sin\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right)}{1} + \frac{\sin 3\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right)}{3} + \frac{\sin 5\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right)}{5} + \dots \right] = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\cos \alpha_1}{1} - \frac{\cos 3\alpha_1}{3} + \frac{\cos 5\alpha_1}{5} - \dots \right).$$

#### 13-4. КОМПЛЕКСНАЯ ФОРМА РЯДА ФУРЬЕ

Тригонометрическая форма ряда Фурье может быть преобразована в комплексную следующим образом. Исходя из того, что

$$\cos n\alpha = \frac{e^{jn\alpha} + e^{-jn\alpha}}{2};$$

$$\sin n\alpha = \frac{e^{jn\alpha} - e^{-jn\alpha}}{2j},$$



выражение, заключенное в скобки в формуле (13-4), приводится к виду

$$a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha = \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jna} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jna}$$

и ряд (13-4) записывается следующим образом:

$$f(\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jna} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jna} \right).$$

На основании (13-5) и (13-6)  $a_n$  четная, а  $b_n$  нечетная функция относительно  $n$ , т. е.  $a_n$  сохраняет свой знак при отрицательных значениях  $n$ , а  $b_n$  меняет его:

$$a_n = a_{-n}, \quad b_n = -b_{-n}.$$

Поэтому с учетом того, что

$$\frac{a_0}{2} = \left( \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jna} \right)_{n=0},$$

$$f(\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jna} + \\ + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jna} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jna}.$$

Таким образом, ряд Фурье в комплексной форме имеет вид:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} F_n e^{jna}, \quad (13-12)$$

где комплексный коэффициент (комплексная амплитуда)<sup>1</sup> согласно (13-5) и (13-6)

$$F_n = a_n - jb_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) e^{-jna} d\alpha \\ (n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots). \quad (13-13)$$

<sup>1</sup> Применявшаяся ранее для представления синусоидальной функции комплексная амплитуда, например  $\dot{U}_m$ , связана с введенным здесь одноименным понятием соотношением

$$\text{Im} [\dot{U}_m e^{j\omega t}] = \frac{1}{2} [F_1 e^{j\omega t} + F_1^* e^{j\omega t}],$$

откуда следует:

$$\text{Re} [-jU_m e^{j\omega t}] = \text{Re} [F_1 e^{j\omega t}] \text{ и } \dot{U}_m = jF_1.$$



Как указывалось выше,  $\alpha = \omega t$ ; следовательно, ряд (13-12) содержит два бесконечных ряда сопряженных относительно действительной оси векторов, вращающихся в противоположные стороны с угловыми скоростями  $n\omega$ . Геометрическая сумма каждой пары сопряженных векторов дает только действительное значение (рис. 13-9). В результате

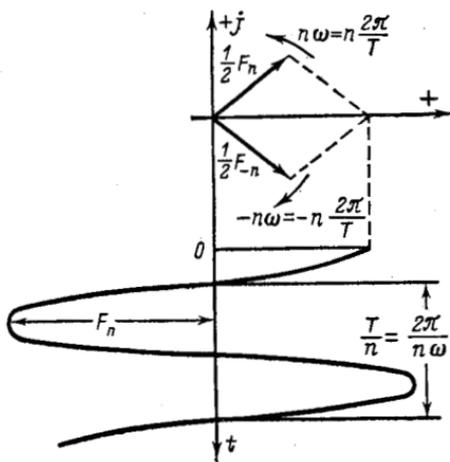


Рис. 13-9. Синусоидальная функция как сумма двух сопряженных векторов, вращающихся в противоположных направлениях,

суммирования двух бесконечных рядов сопряженных векторов получается действительная функция  $f(\omega t)$ .

### 13-5. ПРИМЕНЕНИЕ РЯДА ФУРЬЕ К РАСЧЕТУ ПЕРИОДИЧЕСКОГО НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ПРОЦЕССА

Пусть требуется найти ток в электрической цепи под воздействием периодической несинусоидальной э. д. с.

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_{nm} (\sin n\omega t + \psi_n).$$

Здесь индексом  $m$  обозначены амплитуды гармоник.

Если цепь линейна, т. е. параметры  $r$ ,  $L$ ,  $M$  и  $C$  неизменны, то ток в цепи находится методом наложения, путем суммирования токов, создаваемых каждой из слагающих э. д. с. в отдельности:

$$i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{nm} \sin(n\omega t + \psi_n - \varphi_n), \quad (13-14)$$

где

$$I_0 = \frac{E_0}{z(0)}; \quad I_{nm} = \frac{E_{nm}}{z(n\omega)}.$$

Под  $z(0)$  подразумевается сопротивление цепи при частоте, равной нулю, т. е. сопротивление постоянному току;  $z(n\omega)$  — полное сопротивление при частоте  $n\omega$ .

Угол  $\varphi_n$  определяется как арктангенс отношения реактивного сопротивления цепи к ее активному сопротивлению при частоте  $n\omega$ .

В случае, когда цепь состоит из последовательно соединенных элементов  $r$ ,  $L$  и  $C$ ,

$$z(n\omega) = \sqrt{r^2 + \left(n\omega L - \frac{1}{n\omega C}\right)^2},$$

$$\varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{n\omega L - \frac{1}{n\omega C}}{r}.$$

При этом  $z(0) = \infty$ , так как цепь для постоянного тока разомкнута.

По мере повышения номера гармоники, т. е. с увеличением частоты  $n\omega$ , индуктивное сопротивление  $n\omega L$  растет по закону прямой линии, а емкостное сопротивление  $1/n\omega C$  убывает по закону гиперболы. Поэтому в цепи, состоящей из последовательно соединенных  $r$  и  $L$ , гармоники тока выражены слабее, чем в э. д. с. источника. В отличие от этого высшие гармоники тока в цепи, состоящей из  $r$  и  $C$  могут достигать больших значений.

В смешанной индуктивно-емкостной цепи при  $n\omega L - \frac{1}{n\omega C} = 0$  наступает явление резонанса для  $n$ -й гармоники.

В общем случае цепи, состоящей из элементов  $r$ ,  $L$  и  $C$ , как реактивное, так и активное сопротивления являются функциями частоты  $n\omega$  (см., например, § 3-3).

Периоды различных гармоник обратно пропорциональны номеру гармоники. Поэтому если по оси абсцисс откладывается не время  $t$ , а угол  $\alpha_n = n\omega t = n\alpha$ , то углу  $\alpha$  основной гармоники соответствует на той же абсциссе угол  $n\alpha$  для  $n$ -й гармоники (рис. 13-10).

Расчет периодических несинусоидальных токов и напряжений в разветвленных электрических цепях ведется, как правило, в комплексной форме.

Если периодическая несинусоидальная э. д. с. задана в тригонометрической форме ряда Фурье вида (13-8), то э. д. с. и ток могут быть представлены так:

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}(\dot{E}_{nm} e^{jn\omega t});$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}(\dot{I}_{nm} e^{jn\omega t}),$$

где

$$\dot{E}_{nm} = E_{nm} e^{j\psi_n}; \quad \dot{I}_{nm} = I_{nm} e^{j(\psi_n - \varphi_n)}.$$

Следовательно, комплексная форма расчета периодического несинусоидального тока заключается в нахождении комплексных амплитуд токов  $\dot{I}_{nm}$ , соответствующих

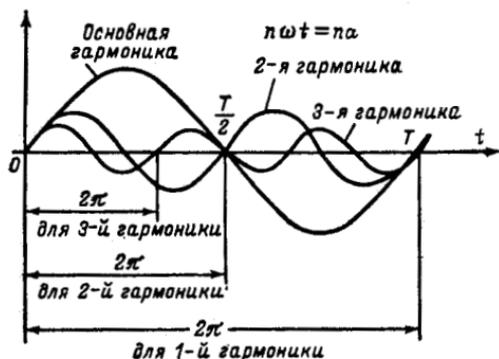


Рис. 13-10. Соотношение масштабов углов для разных гармоник,

заданным комплексным амплитудам э. д. с.  $\dot{E}_{nm}$ , для разных значений  $n$ . При этом, ввиду того что отдельные слагающие имеют неодинаковые частоты, не складываются непосредственно комплексные амплитуды, а суммируются проекции векторов, вращающихся с разными угловыми скоростями  $n\omega$ , т. е. суммируются мгновенные значения отдельных гармоник.

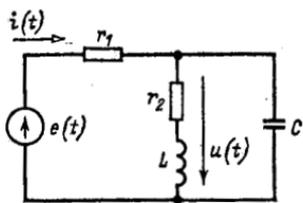


Рис. 13-11. Пример 13-4.

**Пример 13-4.** Вычислить суммарный ток в схеме на рис. 13-11. Задано:

$$e(t) = 30 + 15 \sin \omega t + 20 \sin 3\omega t; \quad B;$$

$$r_1 = 1 \text{ Ом}; \quad r_2 = 0,5 \text{ Ом}; \quad \omega L = 1 \text{ Ом};$$

$$1/\omega C = 9 \text{ Ом}.$$

Искомый ток находится методом наложения, т. е. поочередным вычислением постоянной слагающей и гармоник тока с последующим суммированием их.

Сопротивление постоянному току  $z(0) = r_1 + r_2 = 1,5 \text{ Ом}$ , Постоянная слагающая тока

$$I_0 = \frac{E_0}{z(0)} = \frac{30}{1,5} = 20 \text{ А}.$$

Комплексное сопротивление цепи для основной частоты

$$Z(j\omega) = 1,63 + j1,09 \text{ Ом.}$$

Комплексная амплитуда тока основной частоты

$$i_{1m} = \frac{15}{1,63 + j1,69} = 7,65 \angle -33,6^\circ \text{ А.}$$

Комплексное сопротивление цепи для утроенной частоты

$$Z(j3\omega) = r_1 + \frac{(r_2 + j3\omega L) \left( -j \frac{1}{3\omega C} \right)}{r_2 + j \left( 3\omega L - \frac{1}{3\omega C} \right)} = 19 - j3 \text{ Ом.}$$

Комплексная амплитуда тока третьей гармоники

$$i_{3m} = \frac{20}{19 - j3} = 1,04 \angle 8,9^\circ \text{ А.}$$

Мгновенное значение суммарного тока

$$i(t) = 20 + 7,65 \sin(\omega t - 33,6^\circ) + 1,04 \sin(3\omega t + 8,9^\circ) \text{ А.}$$

В заключение следует отметить, что в простых случаях установившийся периодический ток может быть получен не только в виде суммы гармоник, но и в более удобной форме аналитического выражения, справедливого для определенного интервала времени (например, полупериода). Для этого интервала записывается дифференциальное уравнение для тока, которое решается так называемым классическим методом (см. гл. 14) или с помощью преобразования Лапласа (гл. 15). Полученное решение включает в себя неизвестное начальное значение тока, которое затем находят из условия периодичности.

Рассмотрим простой пример. Пусть в цепи последовательно соединенных  $r$  и  $L$  действует периодическая знакопеременная э. д. с. такого вида, как изображено на рис. 13-7. Тогда для первого полупериода справедливо уравнение  $ri + L di/dt = E$ , решение которого имеет вид

$$i = \frac{E}{r} + Ae^{-\frac{r}{L}t}. \text{ При } t = 0, i = i(0), \text{ следовательно, } A = i(0) - \frac{E}{r}.$$

Кривая тока, так же как и кривая э. д. с., будет симметрична относительно оси времени и не будет иметь скачков благодаря индуктивному характеру цепи. Поэтому  $i\left(\frac{T}{2}\right) = -i(0)$ . Это дает:

$$i\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{E}{r} + \left[ i(0) - \frac{E}{r} \right] e^{-\frac{rT}{2L}} = -i(0).$$

Отсюда находится  $i(0)$

$$i(0) = \frac{E(e^{-a} - 1)}{r(e^{-a} + 1)},$$

где  $a = rT/2L$ .

Подставив это в выражение для тока, получим окончательно для первого полупериода ( $0 < t < \frac{T}{2}$ ):

$$i = \frac{E}{r} \left( 1 - \frac{2}{1 + e^{-a}} e^{-\frac{r}{L} t} \right).$$

Во втором полупериоде кривая тока будет иметь тот же вид, но противоположный знак.

Итак, периодическая несинусоидальная функция представляется не только в виде ряда Фурье, но и в *замкнутой форме*, т. е. в виде аналитического выражения с конечным числом слагаемых, справедливого для выбранного интервала времени. Другой метод решения в замкнутой форме описан в § 15-12.

### 13-6. ДЕЙСТВУЮЩЕЕ И СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НЕСИНУСОИДАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Действующее значение периодической несинусоидальной функции  $f(t)$  определяется по формуле (см. § 2-3)

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}.$$

Если функция задана в виде (13-8), то после возведения ее в квадрат интеграл под знаком корня разложится на ряд интегралов, дающих в результате сумму квадрата постоянной слагающей  $(a_0/2)^2$ , и средних значений квадратов отдельных гармоник (которые согласно § 2-3 равны  $F_n^2/2$ ), средние же значения удвоенных произведений гармоник разных порядков или произведений постоянной слагающей на отдельные гармоники будут равны нулю.

Следовательно, действующее значение периодической несинусоидальной функции выражается формулой

$$F = \sqrt{\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n^2}{2}}.$$

Поскольку  $F_n$  — амплитуда  $n$ -й гармоники,  $F_n/\sqrt{2}$  — действующее значение гармоники. Таким образом, полученное выражение показывает, что *действующее значение периодической несинусоидальной функции равно корню квадратному из суммы квадратов действующих значений гармоник и квадрата постоянной слагающей.*



Отсюда следует, что действующее значение функции, представляющее собой сумму гармоник разных частот, не зависит от начальных фаз этих гармоник, а всецело определяется их действующими значениями.

Например, если несинусоидальный ток выражается формулой (13-14), то действующее значение тока равно:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots}$$

Действующее значение периодической несинусоидальной функции может быть измерено, так же как и при синусоидальных токах, с помощью электроизмерительного прибора электромагнитной, электродинамической, тепловой или других систем.

Наряду с понятием действующего значения периодической несинусоидальной функции в электротехнике и радиотехнике пользуются понятием среднего значения функции, взятого по абсолютному значению; последнее в соответствии с § 2-3 выражается интегралом вида

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt.$$

Этот интеграл равен среднему значению функции  $f(t)$  за положительный полупериод, если  $f(t)$  имеет одинаковые положительную и отрицательную полувольты:

$$F_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt.$$

Среднее значение функции за полупериод измеряется с помощью магнитоэлектрического прибора с выпрямителем (магнитоэлектрический прибор без выпрямителя измеряет постоянную слагающую).

### 13-7. МОЩНОСТЬ В ЦЕПИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

В соответствии с (2-26) активная мощность равна среднему значению мощности:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T ui dt.$$



Если вместо  $u$  и  $i$  подставить их выражения через тригонометрический ряд вида (13-8), то интеграл разложится на ряд интегралов, дающих в результате сумму произведения постоянных слагающих напряжения и тока и средних значений произведений гармоник напряжения и тока одного и того же порядка. Остальные интегралы будут равны нулю, так как они представляют собой средние значения произведений гармоник разных порядков или произведений постоянной слагающей на отдельные гармоники.

Итак,

$$P = U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos \varphi_n, \quad (13-15)$$

т. е. *активная мощность периодического несинусоидального тока равна сумме активных мощностей отдельных гармоник плюс мощность постоянных слагающих.*

Иначе говоря, активная мощность от взаимодействия разноименных гармоник напряжений и токов или взаимодействия гармоник с постоянными слагающими равна нулю.

По аналогии с понятием реактивной мощности для синусоидальных функций может быть введено понятие *реактивной мощности* в цепи с периодическими несинусоидальными величинами. Она определяется как сумма реактивных мощностей отдельных гармоник.

Содержание в одной из кривых (напряжения или тока) гармоник, отсутствующих в другой кривой, не отражается на величинах активной и реактивной мощностей, но повышает действующее значение той функции, которая содержит эти гармоники. Поэтому, если *полную мощность* в рассматриваемой цепи определять как произведение действующих напряжения и тока  $S = UI$ , то на основании сказанного можно заключить, что в отличие от синусоидального режима сумма квадратов активной и реактивной мощностей в цепи с периодическими несинусоидальными величинами не равна квадрату полной мощности:

$$P^2 + Q^2 = S^2 - T^2.$$

Величина  $T$  носит название *мощности искажения*; она характеризует степень различия в формах кривых напряжения  $u$  и тока  $i$ . Если сопротивление цепи активное, то кривые напряжения и тока подобны; при этом  $Q = 0$  и  $T = 0$ .



**Пример 13-5.** Вычислить активную мощность, поступающую в цепь в примере 13-4.

$$e(t) = 30 + 15 \sin \omega t + 20 \sin 3\omega t;$$

$$i(t) = 20 + 7,65 \sin(\omega t - 33,6^\circ) + 1,04 \sin(3\omega t + 8,9^\circ).$$

На основании (13-15)

$$P = 30 \cdot 20 + \frac{15 \cdot 7,65}{2} \cos 33^\circ 36' + \frac{20 \cdot 1,04}{2} \cos 8^\circ 54' = 600 + 47,9 + 10,2 = 658,1 \text{ Вт.}$$

### 13-8. КОЭФФИЦИЕНТЫ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

По аналогии с синусоидальными функциями отношение активной мощности при несинусоидальных токах к полной мощности называется коэффициентом мощности и обозначается  $\chi$ :

$$\chi = \frac{P}{UI} = \frac{\int_0^T ui \, dt}{\sqrt{\int_0^T u^2 \, dt \int_0^T i^2 \, dt}}. \quad (13-16)$$

Отношение в правой части (13-16) обращается в единицу только при наличии прямой пропорциональности между  $u$  и  $i$ .

Положим, что напряжение синусоидально, а ток несинусоидален. В этом случае активная мощность в соответствии с (13-15) определяется мощностью первой гармоники:

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = UI \cos \varphi_1.$$

При этом действующее значение тока

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots} > I_1.$$

Следовательно, коэффициент мощности

$$\chi = \frac{U I_1 \cos \varphi_1}{UI} = \frac{I_1}{I} \cos \varphi_1 = k_n \cos \varphi_1.$$

Множитель  $k_n = \frac{I_1}{I} < 1$  называется коэффициентом искажения.

В радиотехнике и электротехнике пользуются также коэффициентами формы кривой ( $k_f$ ) и амплитуды ( $k_a$ ).

Коэффициент формы кривой определяется как отношение действующего значения функции к среднему,



взятому по абсолютному значению,

$$k_{\Phi} = \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}}{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt}.$$

Для синусоиды

$$k_{\Phi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11.$$

Коэффициент амплитуды определяется как отношение максимального значения функции к действующему значению ее:

$$k_a = \frac{f_m}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}}.$$

Для синусоиды

$$k_a = \sqrt{2} \approx 1,41.$$

Несинусоидальные кривые напряжения и тока заменяются в ряде случаев эквивалентными синусоидами. Замена производится таким образом, что действующие значения синусоидальных функций принимаются равными действующим значениям несинусоидальных функций, а угол сдвига фаз между эквивалентными синусоидами принимается равным углу  $\arccos \chi$ , где  $\chi$  определяется из (13-16).

### 13-9. ВЫСШИЕ ГАРМОНИКИ В ТРЕХФАЗНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

При установившемся режиме в симметричных трехфазных электрических цепях кривые напряжения и тока во второй и третьей фазах аналогичны кривой напряжения и тока первой фазы со сдвигом на треть периода. Так, например, если напряжение  $u_A(t)$  в фазе  $A$  выражается функцией

$$u_A = \sum_{n=1}^{\infty} U_{nm} \sin(n\omega t + \psi_n),$$



то

$$u_B = \sum_{n=1}^{\infty} U_{nm} \sin \left[ n\omega \left( t - \frac{T}{3} \right) + \psi_n \right];$$
$$u_C = \sum_{n=1}^{\infty} U_{nm} \sin \left[ n\omega \left( t + \frac{T}{3} \right) + \psi_n \right].$$

Гармоники порядка, кратного 3 ( $n = 3, 6, 9, \dots$ ), во всех фазах тождественны, так как

$$\begin{aligned} \sin \left[ n\omega \left( t - \frac{T}{3} \right) + \psi_n \right] &= \sin \left[ n\omega \left( t + \frac{T}{3} \right) + \psi_n \right] = \\ &= \sin [n\omega t + \psi_n]. \end{aligned}$$

Поэтому они образуют систему напряжений нулевой последовательности.

Гармоники порядка  $n = 3k + 1$ , где  $k$  — любое целое число, т. е. при  $n = 1, 4, 7, 10, 13$  и т. д., образуют симметричную систему напряжений прямой последовательности, так как при этом:

$$\begin{aligned} \sin \left[ n\omega \left( t - \frac{T}{3} \right) + \psi_n \right] &= \sin \left[ n\omega t - \frac{2\pi}{3} + \psi_n \right]; \\ \sin \left[ n\omega \left( t + \frac{T}{3} \right) + \psi_n \right] &= \sin \left[ n\omega t + \frac{2\pi}{3} + \psi_n \right] \end{aligned}$$

и, следовательно,  $n$ -я гармоника в фазе  $B$  отстает от  $n$ -й гармоники в фазе  $A$  на  $120^\circ$ , а в фазе  $C$  опережает ее на  $120^\circ$ .

Наконец, гармоники при  $n = 3k - 1$ , где  $k$  — любое целое число, т. е. при  $n = 2, 5, 8, 11, 14$  и т. д., образуют симметричную систему напряжений обратной последовательности, так как при этом:

$$\begin{aligned} \sin \left[ n\omega \left( t - \frac{T}{3} \right) + \psi_n \right] &= \sin \left[ n\omega t + \frac{2\pi}{3} + \psi_n \right]; \\ \sin \left[ n\omega \left( t + \frac{T}{3} \right) + \psi_n \right] &= \sin \left[ n\omega t - \frac{2\pi}{3} + \psi_n \right] \end{aligned}$$

и, следовательно,  $n$ -я гармоника в фазе  $B$  опережает  $n$ -ю гармонику в фазе  $A$  на  $120^\circ$ , а в фазе  $C$  отстает от нее на  $120^\circ$ . Все эти случаи весьма наглядно представляются на векторных диаграммах, построенных для каждой частоты в отдельности.

В практически встречающихся случаях постоянная составляющая и четные гармоники обычно отсутствуют, и



поэтому в дальнейшем можно ограничиться рассмотрением только нечетных гармоник.

При соединении источника электроэнергии и нагрузки звездой с нейтральным проводом в последнем в соответствии с изложенным выше протекает ток, равный сумме всех гармоник с порядковым номером, кратным 3:

$$i_N = i_A + i_B + i_C = 3I_{3m} \sin(3\omega t - \varphi_3) + \\ + 3I_{9m} \sin(9\omega t - \varphi_9) + \dots$$

Действующее значение этого тока определится согласно § 13-6:

$$I_N = 3\sqrt{I_3^2 + I_9^2 + \dots}$$

При отсутствии нейтрального провода токи в фазах не содержат гармоник порядка, кратного 3.

В линейных напряжениях, равных разностям фазных напряжений, будут отсутствовать гармоники с порядковым номером, кратным 3.

Ввиду отсутствия в линейных напряжениях гармоник порядка, кратного 3, отношение действующего линейного напряжения к действующему фазному напряжению при несинусоидальных напряжениях получается меньше  $\sqrt{3}$ :

$$U_L = \sqrt{3}\sqrt{U_1^2 + U_5^2 + \dots}; \\ U_\phi = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + \dots}$$

Если фазы генератора соединены треугольником, то во внешней цепи гармоники порядка, кратного 3, отсутствуют; в обмотках же генераторов, соединенных треугольником, действует э. д. с., равная утроенной сумме высших гармоник, кратных 3. Однако она полностью уравновешивается падением напряжения в контуре треугольника от токов этих гармоник. Поэтому гармоники, порядок которых кратен 3, отсутствуют не только в линейных токах и напряжениях, но и в фазных напряжениях.

Разность потенциалов на выводах вторичной обмотки трансформатора напряжения, соединенной разомкнутым треугольником (см. рис. 12-28, в), в случае несинусоидальных фазных напряжений равна:

$$u_A + u_B + u_C = 3U_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + 3U_{9m} \sin(9\omega t + \psi_9) + \dots$$

Действующее значение этого напряжения

$$U = 3\sqrt{U_3^2 + U_9^2 + \dots}$$

Поэтому даже при симметричной трехфазной электрической цепи возможно появление составляющих токов и напряжений нулевой последовательности, обуславливаемых несинусоидальностью фазных э. д. с. генераторов.

### 13-10. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

13-1. Разложить в тригонометрический ряд Фурье периодическую функцию, получаемую при однополупериодном выпрямлении косинусоиды:

$$f(t) = \cos \omega t \quad \text{при} \quad -\frac{\pi}{2} < \omega t < \frac{\pi}{2}.$$

О т в е т:

$$\frac{1}{\pi} \left( 1 + \frac{\pi}{2} \cos \omega t + \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \dots \right).$$

13-2. Разложить в тригонометрический ряд Фурье периодическую функцию, получаемую при двухполупериодном выпрямлении косинусоиды.

О т в е т:

$$\frac{2}{\pi} \left( 1 + \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right).$$

13-3. Разложить в тригонометрический ряд Фурье выпрямленное трехфазное напряжение, изменяющееся по закону  $u = \cos \omega t$  в пределах

$$-\frac{\pi}{3} < \omega t < \frac{\pi}{3}.$$

О т в е т:

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \left( 1 + \frac{2 \cos 3\omega t}{8} - \frac{2 \cos 6\omega t}{35} + \frac{2 \cos 9\omega t}{80} - \dots \right).$$

13-4. В цепи, состоящей из индуктивности  $L = 5$  Г и емкости  $C = 10$  мкФ, соединенных последовательно, действует э. д. с., полученная в результате двухполупериодного выпрямления косинусоидальной э. д. с. Параллельно емкости присоединено сопротивление  $r = 2000$  Ом. Найти напряжение на сопротивлении, приняв  $\omega = 377$  рад/с.

О т в е т:

$$\frac{2}{\pi} E_m [1 + 0,0242 \cos (2\omega t - 176^\circ) - 0,0012 \cos (4\omega t - 178^\circ) + \dots].$$

13-5. Индуктивность  $L$  присоединена к источнику, э. д. с. которого задана кривой прямоугольной формы вида, показанного на рис. 13-8. Найти ток.

О т в е т:

$$\frac{4}{\omega L \pi} \left( \sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t - \dots \right).$$



13-6. Разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию треугольной формы:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \omega t \quad \text{при} \quad -\frac{\pi}{2} < \omega t < \frac{\pi}{2};$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} (\pi - \omega t) \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} < \omega t < \frac{3\pi}{2}.$$

О т в е т:

$$\frac{8}{\pi^2} \left( \sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t - \dots \right).$$

13-7. Сопоставив результаты двух предыдущих задач, пояснить, какова форма кривой тока в задаче 13-5.

О т в е т:  $\frac{1}{L} t$  при  $-\frac{\pi}{2} < \omega t < \frac{\pi}{2}$ .

13-8. Вычислить действующее значение функции в задаче 13-2.

О т в е т: 0,707.

13-9. Вычислить амплитуду  $n$ -й гармоники периодической функции, симметричной относительно начала координат. Наклонная часть трапеции на участке от  $\alpha = 0$  до  $\alpha = \alpha_1$  выражается уравнением  $f(\alpha) = A \frac{\alpha}{\alpha_1}$ , где  $A$  — высота трапеции. Сопоставить результаты вычислений по формулам (13-6) и (13-10а).

О т в е т:

$$b_n = \frac{2A}{\pi n^2 \alpha_1} \sin n\alpha_1 (1 - \cos n\pi);$$

при четных  $n$   $b_n = 0$ ; при нечетных  $n$

$$b_n = \frac{4A}{\pi n^2 \alpha_1} \sin n\alpha_1.$$

13-10. Вычислить мощности: активную, реактивную, полную и мощность искажения, если

$$u = 141 \sin \omega t + 11 \sin (3\omega t + 30^\circ) \text{ В};$$

$$i = 10,19 \sin (\omega t - 11,3^\circ) + 2 \cos 3\omega t + \sin 5\omega t \text{ А}.$$

О т в е т:  $P = 709,5$  Вт;  $Q = 123,8$  вар (инд.);  $S = 738$  В·А;  $T = 160,5$  В·А.

13-11. Найти эквивалентные синусоиды напряжения и тока, если

$$u = 156 \sin (\omega t + \pi/6) + 50 \sin (3\omega t - \pi/3) + 2 \sin (5\omega t + \pi/4);$$

$$i = 31,1 \sin (\omega t + 25^\circ) + 5 \sin 5\omega t.$$

О т в е т:  $164 \sin (\omega t + 30^\circ)$ ;  $31,55 \sin (\omega t + 9,2^\circ)$ .

13-12. Вычислить действующий несинусоидальный ток, если мгновенный  $i = 5 + 10 \sin \omega t - 10 \cos \omega t$  А.

О т в е т: 11,2 А.

13-13. Вычислить действующее несинусоидальное напряжение для  $u = 10 \sin 400t + 5 \sin 800t + \cos 1200t$ .

О т в е т: 7,95 В.



13-14. Вычислить действующий ток, соответствующий разности двух несинусоидальных токов:  $i_1 = 5 + 4 \cos(\omega t - \pi/3) + 2 \cos(2\omega t + \pi/6)$  и  $i_2 = 3 - 5 \cos \omega t - 3 \cos(2\omega t + \pi/4)$  А.

О т в е т: 6,85 А.

13-15. Сопротивление 50 Ом и емкость 50 мкФ, соединенные параллельно, подключены к источнику э. д. с.  $50 + 100 \sin(400t + \pi/6) + 50 \sin(1200t - \pi/4)$  В с внутренним сопротивлением  $30 \angle 0^\circ$  Ом. Определить действующее напряжение на параллельных ветвях и суммарный ток.

О т в е т: 54 В; 1,62 А.

13-16. Сохранив условия предыдущей задачи, вычислить активную мощность, расходуемую в обоих сопротивлениях, и энергию, запасенную в емкости при  $t = 0$ .

О т в е т: 95,5 Вт, 0,01 Дж.

13-17. Вычислить напряжение  $u(t)$  в схеме рис. 13-11 (см. пример 13-4).

О т в е т:  $10 + 9,64 \sin(\omega t + 26^\circ 12') + 18,97 \sin(3\omega t - 4^\circ 48')$  В.

13-18. Входное напряжение трансформатора (см. рис. 8-11)  $u_1 = 20 + 100 \sin 1000t + 40 \sin 3000t$  В, выходные выводы замкнуты:  $r_1 = 20$  Ом;  $L_1 = 15$  мГ;  $r_2 = 40$  Ом;  $L_2 = 30$  мГ;  $M = 20$  мГ. Определить токи  $i_1$  и  $i_2$ .

О т в е т:  $i_1 = 1 + 3,54 \sin(1000t - 21^\circ 10') + 1,09 \sin(3000t - 18^\circ 5')$ ;  $i_2 = 1,42 \sin(1000t + 32^\circ) + 0,665 \sin(3000t + 6^\circ)$  А.

13-19. Зависит ли действующее значение несинусоидальной функции от начальных фаз и частот отдельных гармоник?

13-20. Показать, что линейные напряжения трехфазного генератора не содержат гармоник, кратных трем.

---

## ГЛАВА ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ

### ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ. КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА

#### 14-1. ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

В предыдущих главах рассматривались установившиеся процессы в линейных электрических цепях, т. е. такие процессы, при которых напряжения и токи либо неизменны во времени (цепи постоянного тока), либо представляют собой периодические функции времени (цепи переменного тока).

Наступлению установившегося процесса, отличного от первоначального режима работы цепи, предшествует, как правило, переходный процесс, при котором напряжения и токи изменяются неперiodически.

Переход от одного режима работы цепи к другому может быть вызван изменением параметров или схемы цепи,



называемым в общем случае в электротехнике коммутацией.

Можно теоретически считать, что коммутация цепи производится мгновенно, т. е. на включение, выключение или переключение цепи время не расходуется. Тем не менее переход от исходного режима работы цепи к последующему установившемуся процессу происходит не мгновенно, а в течение некоторого времени. Объясняется это тем, что каждому состоянию цепи соответствует определенный запас энергии электрических и магнитных полей. Переход к новому режиму связан с нарастанием или убыванием энергии этих полей. Энергия  $\omega_L = Li^2/2$ , запасаемая в магнитном поле индуктивности  $L$ , и энергия  $\omega_C = Cu^2/2$ , запасаемая в электрическом поле емкости  $C$ , не могут изменяться мгновенно: энергия может изменяться непрерывно, без скачков, так как в противном случае мощность, равная производной энергии по времени, достигала бы бесконечных значений, что физически невозможно. Именно поэтому, например, в случае размыкания ветви с индуктивной катушкой в месте размыкания неизбежно возникает искра, в сопротивлении которой расходуется энергия, накопленная в магнитном поле индуктивной катушки. Аналогично если замкнуть накоротко выводы конденсатора, который был предварительно заряжен, то запасенная в нем электрическая энергия рассеется в сопротивлении соединяющего провода и между контактами.

Если исключить случаи размыкания индуктивности и замыкания накоротко емкости и рассматривать цепи, в которых энергия, накапливаемая в магнитном или электрическом поле, может рассеиваться в виде теплоты в сопротивлениях, то, считая, что коммутация происходит мгновенно, можно искрообразование не учитывать.

Для завершения переходного и наступления установившегося процессов теоретически требуется бесконечно большое время. Практически, однако, время переходного процесса определяется малым интервалом, по истечении которого токи и напряжения настолько приближаются к установившимся значениям, что разница оказывается практически неощутимой. Чем интенсивнее происходит рассеяние энергии в сопротивлениях, тем быстрее протекает переходный процесс.

Если бы электрическая цепь состояла только из сопротивлений и не содержала индуктивностей и емкостей, то переход от одного установившегося состояния к другому

совершался бы мгновенно, без затраты времени. В реальных электротехнических устройствах тепловые потери, обусловленные током, магнитные и электрические поля сопутствуют друг другу. Применяя специальные схемы и подбирая соответствующие параметры цепи, можно в зависимости от необходимости ускорить или замедлить переходный процесс.

В одних случаях переходные процессы в электрических цепях нежелательны и опасны (например, при коротких замыканиях в энергетических системах). В других случаях переходный процесс представляет собой естественный, нормальный режим работы цепи, как это, например, имеет место в радиопередающих и радиоприемных устройствах, системах автоматического регулирования и других цепях.

Существуют различные методы расчета переходных процессов в линейных электрических цепях. Настоящая глава посвящена классическому методу решения дифференциальных уравнений, описывающих переходные процессы.

## 14-2. ЗАКОНЫ КОММУТАЦИИ И НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Высказанные выше положения о том, что запас энергии магнитного или электрического поля может изменяться только плавно, без скачков, выражают *принцип непрерывности во времени потокосцепления индуктивности и электрического заряда емкости* и называются *законами коммутации*.

Невозможность скачкообразного изменения потокосцепления следует из того, что в противном случае на индуктивности появилось бы бесконечно большое напряжение  $u_L = d\Psi/dt = \infty$ , что лишено физического смысла. Ввиду равенства  $\Psi = Li$  принцип непрерывности потокосцепления означает, что при неизменном  $L$  ток  $i$  не может изменяться скачком. Итак, *в начальный момент после коммутации ток в индуктивности остается таким же, каким он был непосредственно перед коммутацией, а затем плавно изменяется*.

Аналогично невозможность скачкообразного изменения электрического заряда  $q$  следует из того, что в противном случае через емкость проходил бы бесконечно большой ток  $i_C = dq/dt = \infty$ , что также лишено физического смысла. Ввиду равенства  $q = Ci_C$  принцип непрерывности электрического заряда означает, что при неизменном  $C$  напряже-

ние  $u_C$  не может изменяться скачком. Итак, в начальный момент после коммутации напряжение на емкости остается таким же, каким оно было непосредственно перед коммутацией, а затем плавно изменяется.

При этом следует отметить, что в цепях с идеализированными сосредоточенными параметрами скачкообразно могут изменяться: 1) токи в сопротивлениях и емкостях и 2) напряжения на сопротивлениях и индуктивностях.

Значения тока в индуктивности и напряжения на емкости в момент коммутации называются *независимыми начальными условиями*.

Обычно принимают, что коммутация происходит в момент времени  $t = 0$ ; тогда ток в индуктивности и напряжение на емкости в момент времени непосредственно перед коммутацией обозначаются через  $i_L(0-)$  и  $u_C(0-)$ , а в начальный момент переходного процесса после коммутации — через  $i_L(0)$  и  $u_C(0)$ .

На основании законов коммутации:

$$\left. \begin{aligned} i_L(0-) &= i_L(0); \\ u_C(0-) &= u_C(0). \end{aligned} \right\} \quad (14-1)$$

Эти равенства выражают начальные условия цепи, в которых происходит коммутация.

При нулевых начальных условиях, т. е. когда  $i_L(0-) = 0$  и  $u_C(0-) = 0$ , индуктивность в начальный момент после коммутации равносильна разрыву цепи, а емкость равносильна короткому замыканию.

В случае *ненулевых начальных условий*, т. е. когда  $i_L(0) \neq 0$  и  $u_C(0) \neq 0$ , индуктивность в первый момент равносильна источнику тока  $i_L(0)$ , а емкость равносильна источнику э. д. с.  $u_C(0)$ .

Независимые начальные условия характеризуют энергию магнитного и электрического полей, запасенную к моменту коммутации, и для расчета переходного процесса обязательно требуется знание этих начальных условий, причем совершенно безразлично, каким образом эти условия в цепи были созданы.

При расчете переходных процессов в разветвленных электрических цепях наряду с независимыми начальными условиями используются так называемые *зависимые начальные условия*, а именно: значения токов, напряжений и их производных в начальный момент времени ( $t = 0$ ). Методика вычисления зависимых начальных условий и их использование в расчете описаны в § 14-7.



До сих пор нами исключались из рассмотрения случаи коммутации, при которых неизбежно между контактами возникает искра или дуга. Один из таких случаев показан на рис. 14-1, а. До коммутации ток проходит через индуктивность  $L_1$  и контакт, шунтирующий индуктивность  $L_2$ ; ток в  $L_2$  равен нулю. В момент  $t = 0$  контакт размыкается и индуктивности  $L_1$  и  $L_2$  оказываются включенными последовательно; ток в них принудительно становится одинаковым. Поскольку в момент коммутации ток в  $L_1$  не изменяется, а ток в  $L_2$  равен нулю, в силу первого закона Кирхгофа ток должен замкнуться через дугу, образовавшуюся между контактами. Кроме того, если под  $L_2$  подразумевать реальную индуктивную катушку, то ток может частично

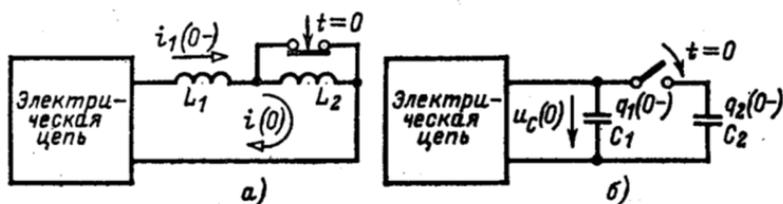


Рис. 14-1. Случай размыкания (а) или замыкания (б) при частичной потере энергии.

замкнуться и через межвитковую емкость. После быстрого погасания дуги токи в  $L_1$  и  $L_2$  уравниваются. Эта начальная стадия переходного процесса протекает столь быстро, что ею практически можно пренебречь, считая, что токи в  $L_1$  и  $L_2$  уравниваются мгновенно. Именно в этом смысле можно условно говорить о скачкообразном изменении токов в индуктивностях, которое предшествует исследуемому переходному процессу в цепи. При этом для расчета переходного процесса используется принцип непрерывности суммарного потокосцепления при коммутации, т. е.  $L_1 i(0-) = (L_1 + L_2) i(0)$ . Скачкообразное изменение токов и соответствующих им потоков в  $L_1$  и  $L_2$  в момент коммутации не сопряжено в данном случае с наведением бесконечно большой суммарной э. д. с. самоиндукции, поскольку суммарное потокосцепление не претерпевает скачкообразного изменения. При новых значениях токов в  $L_1$  и  $L_2$  магнитная энергия, запасенная в катушках, будет меньше энергии, запасенной в первой катушке до коммутации. Часть энергии превратится в тепло в искре, а также излучится.

Найденный таким образом ток  $i(0)$  в  $L_1$  и  $L_2$  может рассматриваться как независимое начальное условие для расчета переходного процесса во всей цепи на рис. 14-1, а после разрыва дуги.

При коммутациях в цепях с емкостями при отсутствии сопротивлений также возможны весьма быстрые перераспределения зарядов, условно рассматриваемые как мгновенные. В этом случае применим принцип непрерывности суммарного заряда. Полученные при этом значения зарядов и напряжений на отдельных емкостях используются в расчете последующего переходного процесса как независимые начальные условия.

Например, в случае схемы на рис. 14-1, б принцип непрерывности суммарного заряда до и после коммутации выражается равенством

$$q_1(0-) + q_2(0-) = q_1(0) + q_2(0) = u_c(0)(C_1 + C_2).$$

При сделанном допущении в остальной электрической цепи, соединенной с емкостями, не возникает бесконечно большого тока, так как суммарный заряд не изменяется скачкообразно при  $t = 0$ .

В процессе рассматриваемой коммутации энергия электрического поля уменьшится, так как часть ее превратится в тепло в очень малом сопротивлении проводника при очень большом токе, а также сможет выделиться в искре и излучиться.

### 14-3. УСТАНОВИВШИЙСЯ И СВОБОДНЫЙ РЕЖИМЫ

В общем случае анализ переходного процесса в линейной цепи с сосредоточенными параметрами  $r$ ,  $L$ ,  $C$  и  $M$  сводится к решению обыкновенных линейных неоднородных дифференциальных уравнений, выражающих законы Кирхгофа. Эти уравнения представляют собой линейную комбинацию напряжений, токов, их первых производных и интегралов по времени.

Например, если какая-нибудь э. д. с.  $e(t)$  включается в цепь, состоящую из последовательно соединенных  $r$ ,  $L$  и  $C$ , то интегрированное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = e(t). \quad (14-2)$$

Это уравнение после дифференцирования приводится к неоднородному дифференциальному уравнению второго



порядка

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{de}{dt}. \quad (14-3)$$

Как известно, общий интеграл такого уравнения равен сумме частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения.

Частное решение выражает установившийся режим, задаваемый источником.

Расчеты установившихся токов рассмотрены в предыдущих главах. Нахождение частного решения в других, более сложных случаях будет изложено в § 14-7, а также в 15-12.

Общее решение физически определяет поведение цепи при отсутствии внешних источников электрической энергии и заданных начальных условиях. Функции, определяемые общим решением, называются свободными составляющими (токов, напряжений и пр.).

В случае, рассмотренном выше, однородное уравнение имеет вид:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \quad (14-4)$$

и соответствующее ему характеристическое уравнение

$$Lp^2 + rp + \frac{1}{C} = 0. \quad (14-5)$$

Если корни характеристического уравнения обозначить через  $p_1$  и  $p_2$ , то общее решение запишется в виде:

$$i_{св}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \quad (14-6)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий (см. § 14-7).

Полный переходный ток в цепи равен сумме установившегося и свободного токов:

$$i(t) = i_y(t) + i_{св}(t). \quad (14-7)$$

Аналогично напряжение, заряд, магнитный поток и другие функции на любом участке цепи в переходном режиме состоят из установившейся и свободной составляющих.

На основании законов коммутации (см. § 14-2) можно найти начальные независимые условия  $i_L(0)$  и  $u_C(0)$ . После этого можно написать согласно (14-7):

$$i_L(0) = i_{Ly}(0) + i_{Lсв}(0); \quad u_C(0) = u_{Cy}(0) + u_{Cсв}(0),$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} i_{L_{св}}(0) &= i_L(0) - i_{Ly}(0); \\ u_{C_{св}}(0) &= u_C(0) - u_{Cy}(0). \end{aligned} \right\} \quad (14-8)$$

Итак, начальные значения свободных функций  $i_{L_{св}}(0)$  и  $u_{C_{св}}(0)$  определяются изменениями в момент коммутации соответствующих установившихся функций.

В частном случае при нулевых начальных условиях:

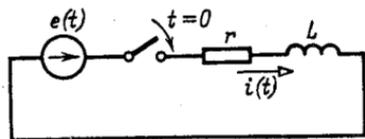
$$i_{L_{св}}(0) = -i_{Ly}(0); \quad u_{C_{св}}(0) = -u_{Cy}(0).$$

В зависимости от порядка дифференциальных уравнений, описывающих исследуемые переходные процессы, различают цепи первого, второго и более высокого порядков.

В цепях первого порядка накопление энергии происходит только в одном элементе,  $L$  или  $C$  в форме магнитной энергии (в цепи с индуктивностью, см. § 14-4), или электрической энергии (в цепи с емкостью, см. § 14-5). Одноконтурная цепь, содержащая элементы, в которых накапливается энергия обоих видов — магнитная и электрическая, представляет собой цепь второго порядка (цепь  $r, L, C$  — § 14-6). Разветвленные цепи могут быть более высокого порядка (см. § 14-7).

#### 14-4. ПЕРЕХОДНЫЙ ПРОЦЕСС В ЦЕПИ $r, L$

Положим, что в момент  $t = 0$  цепь, состоящая из сопротивления  $r$  и индуктивности  $L$ , включенных последовательно, присоединяется к источнику э. д. с.  $e(t)$  (рис. 14-2).



Дифференциальное уравнение для времени  $t \geq 0$  записывается в виде

Рис. 14-2. Включение цепи  $r, L$ .

$$e = ri + L \frac{di}{dt}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид  $r + pL = 0$  и соответственно корень уравнения  $p_1 = -\frac{r}{L}$ .

Отсюда свободный ток

$$i_{св} = Ae^{p_1 t} = Ae^{-\frac{r}{L} t}.$$

Переходный ток в цепи определится суммой установившегося и свободного токов:

$$i = i_y + Ae^{-\frac{r}{L} t}. \quad (14-9)$$

Установившийся ток может быть найден, если задана э. д. с.  $e(t)$ .

Рассмотрим три случая:

1) включение в цепь  $r, L$  постоянной э. д. с.  $E$ ;

2) короткое замыкание цепи  $r, L$ ;

3) включение в цепь  $r, L$  синусоидальной э. д. с.  $E_m \sin(\omega t + \psi)$ .

1. Включение в цепь  $r, L$  постоянной э. д. с.

При включении в цепь  $r, L$  постоянной э. д. с.  $E$  установившийся ток равен  $E/r$ . Поэтому согласно (14-9)

$$i = \frac{E}{r} + Ae^{-\frac{r}{L}t}. \quad (14-10)$$

Постоянная интегрирования  $A$  находится по начальному условию

$$i(0) = i(0-) = 0.$$

Согласно уравнению (14-10) при  $t = 0$

$$0 = \frac{E}{r} + A,$$

откуда  $A = -\frac{E}{r}$ .

Следовательно,

$$i = \frac{E}{r} \left( 1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right) = I \left( 1 - e^{-t/\tau} \right);$$

здесь  $I = E/r$  — предельное значение, к которому стремится ток  $i(t)$  по мере неограниченного возрастания  $t$ , называемое установившимся током.

В начальный момент  $t = 0$  э. д. с. самоиндукции  $e_L = -L \frac{di}{dt}(0) = -E$  и полностью компенсируется э. д. с. источника, так как ток  $i(0)$  равен нулю.

С течением времени э. д. с. самоиндукции убывает, а ток в цепи возрастает, асимптотически приближаясь к установившемуся значению.

На рис. 14-3 показаны кривые установившегося, свободного и переходного токов; на том же рисунке изображена

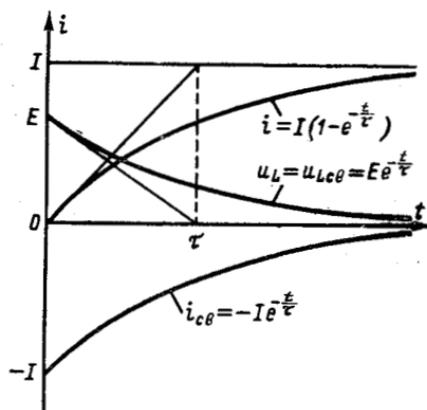


Рис. 14-3. Установившийся, свободный и переходный токи при включении в цепь  $r, L$  постоянной э. д. с.



кривая напряжения на индуктивности

$$u_L = L \frac{di}{dt} = Ee^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Из курса математического анализа известно, что если  $y = f(t)$ , то подкасательная равна  $\left| \frac{y}{y'} \right|$ . В данном случае при любом значении  $t$

$$\left| \frac{u_L}{u'_L} \right| = \left| \frac{i_{св}}{i'_{св}} \right| = \tau. \quad (14-11)$$

Величина  $\tau = L/r$  носит название постоянной времени. Постоянная времени измеряется в секундах:

$$\left[ \frac{L}{r} \right] = \frac{\Gamma}{\text{Ом}} = \frac{\text{Ом} \cdot \text{с}}{\text{Ом}} = \text{с}.$$

Выражение (14-11) показывает, что *постоянная времени графически определяется длиной подкасательной к кривой  $i_{св}$  или  $u_L$  при любом значении  $t$ .*

Нарастание тока происходит тем быстрее, чем меньше постоянная времени и соответственно чем быстрее убывает э. д. с. самоиндукции. Для различных моментов времени ток в цепи, выраженный в процентах конечного (установившегося) значения составляет:

	$t = \tau$	$2\tau$	$3\tau$	$4\tau$	$5\tau$	$\infty$
$\frac{i}{I} 100\%$	63,2	86,5	95,0	98,2	99,3	100

Следовательно, *постоянная времени цепи  $r, L$  равна промежутку времени, в течение которого свободная составляющая тока убывает в  $e = 2,718$  раза и соответственно ток в этой цепи, включенной на постоянное напряжение, достигает 63,2% своего установившегося значения.*

Как видно из рис. 14-3 и приведенной выше таблицы, переходный процесс теоретически длится бесконечно долго. Практически же можно считать, что он заканчивается спустя  $t = (4 \div 5) \tau$ .

## 2. Короткое замыкание цепи $r, L$ .

Положим, что цепь  $r, L$ , присоединенная к источнику постоянного или переменного напряжения, замыкается при  $t = 0$  накоротко (рис. 14-4, а). В образовавшемся при этом контуре  $r, L$  благодаря наличию магнитного поля индуктивной катушки ток исчезает не мгновенно: э. д. с. самоиндукции, обусловленная убыванием магнитного пото-



ка, стремится поддержать ток в контуре за счет энергии исчезающего магнитного поля.

По мере того как энергия магнитного поля постепенно рассеивается, превращаясь в сопротивлении  $r$  в тепло, ток в контуре приближается к нулю.

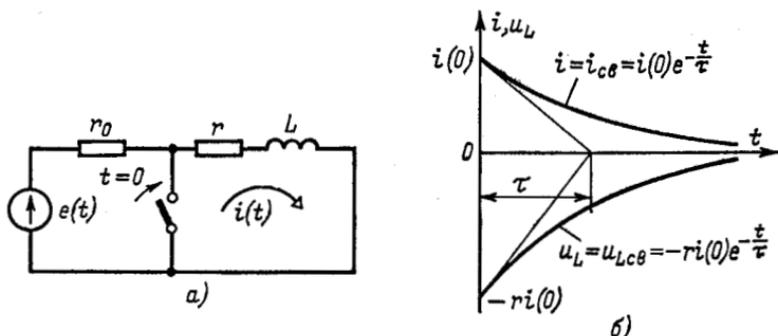


Рис. 14-4. Короткое замыкание цепи  $r, L$ .

$a$  — расчетная схема;  $b$  — кривая тока  $i$  и напряжения  $u_L$ .

Процесс, происходящий в короткозамкнутом контуре  $r, L$ , является свободным; установившийся ток в данном случае равен нулю.

Положив в (14-9)  $i_y = 0$ , получим:

$$i = Ae^{-\frac{r}{L}t}.$$

Постоянная интегрирования  $A$  находится из начального условия

$$i(0) = i(0-),$$

откуда

$$i(t) = i(0)e^{-\frac{r}{L}t} = i(0)e^{-\frac{t}{\tau}};$$

здесь  $i(0-)$  — значение тока в индуктивности в момент, непосредственно предшествовавший короткому замыканию; оно может быть положительным или отрицательным.

На рис. 14-4,  $b$  изображены кривые спада тока в короткозамкнутом контуре и кривая напряжения на индуктивности

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -ri(0)e^{-t/\tau}$$

в предположении, что  $i(0) > 0$ .

Постоянная времени контура  $\tau = L/r$  может быть найдена графически как подкасательная к кривой  $i(t)$  (например, в момент  $t = 0$ ).

Переходный процесс в короткозамкнутом контуре заканчивается теоретически при  $t = \infty$ . За это время в сопротивлении  $r$  выделяется в виде тепла энергия

$$\int_0^{\infty} r i^2 dt = r [i(0)]^2 \int_0^{\infty} e^{-2\frac{r}{L}t} dt = \frac{L [i(0)]^2}{2},$$

т. е. вся энергия, запасенная в магнитном поле катушки до коммутации.

Так же как и в предыдущем случае, переходный процесс в короткозамкнутом контуре можно практически считать законченным спустя  $t = (4 \div 5) \tau$ .

3. Включение в цепь  $r, L$  синусоидальной э. д. с.

При включении в цепь  $r, L$  синусоидальной э. д. с.  $e = E_m \sin(\omega t + \psi)$  установившийся ток будет:

$$i_{np} = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

где

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}} \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L}{r}.$$

На основании (14-9)

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) + A e^{-t/\tau},$$

где

$$\tau = L/r.$$

Постоянная интегрирования определяется по начальному условию  $i(0) = i(0-) = 0$ .

Следовательно,  $0 = I_m \sin(\psi - \varphi) + A$ , откуда  $A = -I_m \sin(\psi - \varphi)$ . Поэтому искомый ток будет:

$$i = I_m [\sin(\omega t + \psi - \varphi) - \sin(\psi - \varphi) e^{-t/\tau}].$$

На рис. 14-5, а изображены кривые  $i_y, i_{св}$  и  $i$ . Начальные ординаты  $i_y(0), i_{св}(0)$  одинаковы и противоположны по знаку; поэтому ток в начальный момент равен нулю. Свободный ток убывает по показательному закону. По истечении времени  $t = \tau$  свободный ток уменьшается в  $e = 2,718$  раза по сравнению с начальным значением  $i_{св}(0)$ . Постоянная времени прямо пропорциональна добротности



контура  $Q$  и обратно пропорциональна частоте  $\omega$ :

$$\tau = \frac{\omega L}{\omega r} = \frac{Q}{\omega}.$$

Если в момент коммутации ( $t = 0$ ) ток  $i_{св}$  проходит через нуль, т. е. выполняется условие  $\psi = \varphi$  или  $\psi = \varphi \pm \pi$ , то свободный ток не возникает и в цепи сразу наступает установившийся режим без переходного процесса.

Если же коммутация происходит при  $\psi - \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ , то начальный свободный ток максимален (рис. 14-5, б),

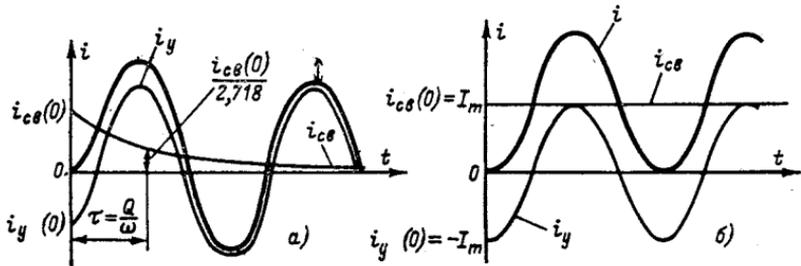


Рис. 14-5. Установившийся, свободный и переходный токи при включении в цепь  $r, L$  синусоидальной э. д. с.

а именно  $i_{св}(0) = \mp I_m$ , и ток переходного режима достигает экстремального значения (положительного или отрицательного) в конце первого полупериода. Однако даже в предельном случае, когда  $r = 0$  и, следовательно,  $\tau = \frac{L}{r} = \infty$ , ток не может превышать амплитуды установившегося режима более чем вдвое.

При достаточно большой постоянной времени  $\tau = L/r$  первым слагаемым в правой части дифференциального уравнения

$$e = ri + L \frac{di}{dt}$$

можно пренебречь по сравнению со вторым слагаемым, приняв приближенно  $e \approx L \frac{di}{dt}$ , откуда  $i \approx \frac{1}{L} \int_0^t e dt$  и соответственно  $u_r = ri \approx \frac{r}{L} \int_0^t e dt$ .

Следовательно, цепь с последовательно соединенными сопротивлением и индуктивностью при большой постоянной времени можно рассматривать как интегрирующее звено.

В свою очередь при достаточной малой постоянной времени, пренебрегая вторым слагаемым уравнения, приближенно получаем:

$$e \approx ri,$$

откуда

$$u_L = L \frac{di}{dt} \approx \frac{L}{r} \frac{de}{dt},$$

т. е. цепь с последовательно соединенными сопротивлением и индуктивностью при малой постоянной времени представляет собой дифференцирующее звено.

В обоих случаях функция  $e(t)$  может быть произвольной.

Интегрирующие и дифференцирующие звенья входят в качестве элементов в системы автоматического управления и регулирования.

#### 14-5. ПЕРЕХОДНЫЙ ПРОЦЕСС В ЦЕПИ $r, C$

Положим, что в момент  $t = 0$  цепь, состоящая из сопротивления  $r$  и емкости  $C$ , включенных последовательно, присоединяется к источнику э. д. с.  $e(t)$  (рис. 14-6).

На основании второго закона Кирхгофа уравнение для времени  $t \geq 0$  имеет вид:

$$e = ri + u_C,$$

где  $u_C$  — напряжение на емкости.

С учетом того, что  $i = C \frac{du_C}{dt}$ , получим:

$$e = rC \frac{du_C}{dt} + u_C;$$

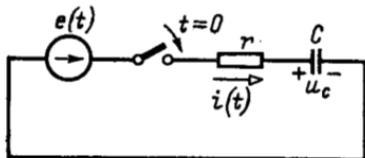
здесь искомой величиной является напряжение на емкости.

Характеристическое уравнение  $1 + rCp = 0$  и соответственно корень уравнения  $p_1 = -1/rC$ . Следовательно, свободная слагающая напряжения на емкости

$$u_{C_{св}} = Ae^{-t/rC} = Ae^{-t/\tau},$$

где  $\tau = rC$  — постоянная времени контура  $r, C$  (измеряется в секундах:  $[rC] = \text{Ом} \cdot \text{Ф} = \text{Ом} \cdot \text{А} \cdot \text{с}/\text{В} = \text{с}$ ).

Рис. 14-6. Включение цепи  $r, C$ .



Переходное напряжение на емкости равно сумме принужденного и свободного напряжений:

$$u_C = u_{C_{пр}} + Ae^{-t/\tau}. \quad (14-12)$$

В свою очередь ток в контуре

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{du_{Cy}}{dt} - \frac{A}{r} e^{-t/\tau}. \quad (14-13)$$

Рассмотрим три случая:

- 1) включение в цепь  $r, C$  постоянной э. д. с.  $E$ ;
- 2) короткое замыкание цепи  $r, C$
- 3) включение в цепь  $r, C$  синусоидальной э. д. с.

$E_m \sin(\omega t + \psi)$ .

### 1. Включение в цепь $r, C$ постоянной э. д. с.

Включим постоянную э. д. с.  $E$  в цепь с сопротивлением  $r$  и предварительно заряженной емкостью  $C$  (полярности заряженной емкости указаны на рис. 14-6 знаками  $+$  и  $-$ ); начальное напряжение на емкости  $u_C(0)$  обозначим для простоты через  $U$ .

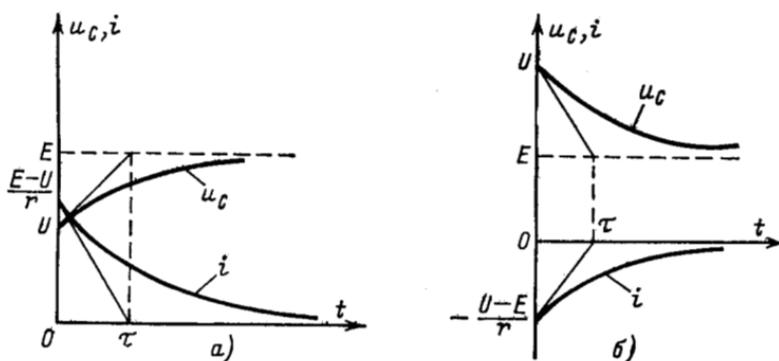


Рис. 14-7. Ток и напряжение при включении в цепь  $r, C$  постоянной э. д. с.

Установившееся напряжение на емкости равно э. д. с. источника. Поэтому согласно (14-12)

$$u_C = E + Ae^{-t/\tau}. \quad (14-14)$$

Постоянная интегрирования  $A$ , входящая в (14-14), находится по начальному условию:

При  $t = 0$  имеем  $U = E + A$ , откуда  $A = U - E$ .

Следовательно,

$$u_C = E - (E - U) e^{-t/\tau}. \quad (14-15)$$



Согласно (14-13) ток в контуре

$$i = \frac{E-U}{r} e^{-t/\tau}. \quad (14-16)$$

Если  $E > U$ , то с течением времени напряжение на емкости возрастает, стремясь к установившемуся значению  $E$ , а ток убывает, стремясь в пределе к нулю; на рис. 14-7, а изображены кривые нарастания  $u_C$  и спада  $i$ . Чем больше постоянная времени, тем медленнее происходят нарастание  $u_C$  и спад  $i$ .

Если  $E < U$ , то кривые  $u_C$  и  $i$  имеют вид, показанный на рис. 14-7, б.

Постоянная времени  $\tau = rC$  может быть найдена так же, как раньше, графически как подкасательная к кривой  $i$  в любой точке (например, при  $t = 0$ ).

Закон изменения напряжения на емкости и тока в данной цепи аналогичен закону изменения тока и напряжения  $u_L$  в контуре  $r, L$ , рассмотренном ранее. Поэтому все сказанное о постоянной времени в предыдущем случае сохраняет силу для данного случая.

## 2. Короткое замыкание цепи $r, C$

Замыкание накоротко цепи, состоящей из последовательно соединенных  $r$  и  $C$ , равносильно принятию в предыдущем случае э. д. с., равной нулю. Предполагается, что емкость  $C$  заряжена, т. е. в момент включения на выводах имеется напряжение  $U$ .

Положив в (14-15) и (14-16) э. д. с.  $E$  равной нулю, получим:

$$\begin{aligned} u_C &= Ue^{-t/\tau}; \\ i &= -Ie^{-t/\tau}, \end{aligned}$$

где

$$I = \frac{U}{r}.$$

При коротком замыкании цепи  $r, C$  электрический ток идет от вывода  $+$  к выводу  $-$ . Следовательно, при выбранной на рис. 14-6 полярности емкости ток проходит через сопротивление  $r$  в направлении, противоположном тому, которое принято на рис. 14-6 за положительное. Поэтому в выражении для тока стоит знак минус. На рис. 14-8 изображены кривые спада  $u_C$  и  $i$ .

В отличие от напряжения на емкости, которое изменяется непрерывно, ток в контуре  $r, C$ , пропорциональный скорости изменения  $u_C$ , совершает при  $t = 0$  скачок.

Энергия, рассеиваемая в сопротивлении  $r$  в течение всего переходного процесса, равна энергии, запасенной в электрическом поле до коммутации:

$$\int_0^{\infty} ri^2 dt = \frac{U^2}{r} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{rC}} dt = \frac{CU^2}{2}.$$

Так же как и в случае цепи  $r, L$ , переходный процесс может считаться законченным спустя  $t = (4 \div 5) \tau$ , так как к этому времени емкость разрядится на 98,2—99,3% и напряжение на емкости снизится до 1,8—0,7% первоначального (см. § 14-4, случай 1).

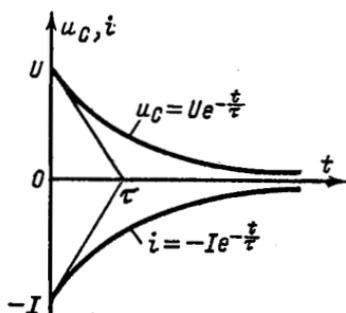


Рис. 14-8. Ток и напряжение при коротком замыкании цепи  $r, C$ .

### 3. Включение в цепь $r, C$ синусоидальной э. д. с.

При включении в цепь  $r, C$  синусоидальной э. д. с.  $E_m \sin(\omega t + \psi)$  установившееся напряжение на емкости

$$u_{Cy} = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

где

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \quad \varphi = \arctg\left(\frac{-1}{r\omega C}\right);$$

на основании (14-12)

$$u_C = -\frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t + \psi - \varphi) + Ae^{-t/\tau}.$$

Если предполагать, что конденсатор не был заряжен, то постоянная интегрирования определится по начальному условию  $u_C(0) = 0$ :

$$0 = -\frac{I_m}{\omega C} \cos(\psi - \varphi) + A,$$

откуда

$$A = \frac{I_m}{\omega C} \cos(\psi - \varphi).$$

Тогда искомое напряжение на емкости будет:

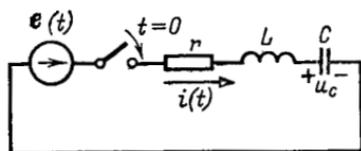
$$u_C = -\frac{I_m}{\omega C} [\cos(\omega t + \psi - \varphi) - \cos(\psi - \varphi)e^{-t/\tau}],$$

а ток в цепи

$$i = C \frac{du_C}{dt} = I_m \left[ \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{1}{\omega r C} \cos(\psi - \varphi) e^{-t/\tau} \right].$$

Из написанных выражений видно, что если включение цепи  $r, C$  происходит в момент, когда установившийся ток должен достигать максимума — положительного или отрицательного (т. е.  $\psi - \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ ), а установившееся напряжение на емкости должно быть равно нулю, то свободной слагающей напряжения на емкости не возникает и в цепи сразу же без переходного процесса наступает установившийся режим.

Так как цепь  $r, C$  по протеканию переходного процесса подобна цепи  $r, L$ , то при соответствующем подборе параметров  $r$  и  $C$  она также может служить дифференцирующим и интегрирующим звеном.



#### 14-6. ПЕРЕХОДНЫЙ ПРОЦЕСС В ЦЕПИ $r, L, C$

Рис. 14-9. Включение цепи  $r, L, C$ .

При включении в цепь  $r, L, C$  э. д. с.  $e(t)$  (рис. 14-9) переходный процесс исследуется с помощью дифференциального уравнения (14-3):

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{de}{dt}.$$

Соответствующее ему характеристическое уравнение (14-5)

$$Lp^2 + rp + \frac{1}{C} = 0$$

имеет корни

$$p_{1,2} = -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad (14-17)$$

где

$$\delta = \frac{r}{2L}; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ — резонансная частота.}$$

Свободный ток согласно (14-6) равен:

$$i_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

Ток в цепи определяется суммой установившегося и свободного токов:

$$i = i_y + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (14-18)$$

Установившийся ток находится в соответствии с заданной э. д. с.  $e(t)$ . Что касается свободного тока, то его характер зависит от знака подкоренного выражения (14-17).

### 1. Включение в цепь $r, L, C$ постоянной э. д. с.

Рассмотрим сначала случай, когда э. д. с. источника постоянна:  $e = E$ , и емкость имеет начальное напряжение  $u_C(0) = U$ .

Ввиду наличия индуктивности начальное значение тока  $i(0) = 0$ .

Исходное уравнение

$$E = ri + L \frac{di}{dt} + u_C$$

для начального момента записывается в виде

$$E = L \frac{di}{dt}(0) + u_C(0),$$

откуда находится начальное значение производной  $\frac{di}{dt}(0)$ , которое является зависимым начальным условием, необходимым для вычисления  $A_1$  и  $A_2$ :

$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{E-U}{L}. \quad (14-19)$$

При установившемся режиме ток будет равен нулю, что следует как из физического смысла, так и из вида правой части дифференциального уравнения (14-3). Продифференцировав (14-18) с учетом того, что  $i_{\text{пр}} = 0$ , получим:

$$\frac{di}{dt} = A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}. \quad (14-20)$$

Подставляя в (14-18) и (14-20)  $t = 0$  и используя (14-19), получаем:

$$0 = A_1 + A_2;$$
$$\frac{E-U}{L} = A_1 p_1 + A_2 p_2.$$



Из этих уравнений следует:

$$A_1 = -A_2 = \frac{E-U}{L(p_1-p_2)} = \frac{E-U}{2L\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}},$$

поэтому

$$i = \frac{E-U}{2L\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \quad (14-21)$$

Рассмотрим возможные три случая.

С л у ч а й 1.  $\delta > \omega_0$ , т. е.  $r > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  (апериодический процесс).

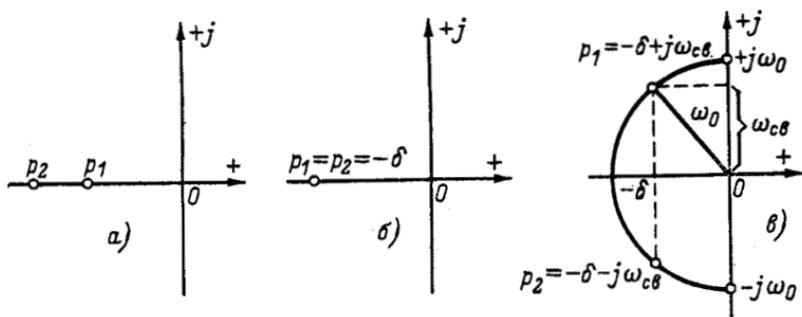


Рис. 14-10. Расположение корней характеристического уравнения на комплексной плоскости.

Согласно (14-17) корни характеристического уравнения  $p_1$  и  $p_2$  — отрицательные действительные числа (рис. 14-10, а). Если индекс 1 соответствует верхнему знаку перед корнем, то  $|p_1| < |p_2|$  и поэтому кривая  $e^{p_1 t}$  спадает медленнее, чем  $e^{p_2 t}$ . На рис. 14-11 показана кривая  $i$ , построенная по выражению (14-21).

При больших значениях  $C$  влияние емкости мало и кривая тока приближается к кривой тока в цепи  $r, L$  (см. рис. 14-3); при малых значениях  $L$  влияние индуктивности незначительно и кривая тока близка к кривой тока в цепи  $r, C$  (рис. 14-7).

Выражение (14-21) может быть преобразовано в гиперболическую форму

$$i = \frac{E-U}{L\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}} e^{-\delta t} \operatorname{sh} \sqrt{\delta^2-\omega_0^2} t. \quad (14-22)$$

Следует заметить, что при коротком замыкании цепи  $r, L, C$ , т. е. при  $E = 0$ , ток в цепи обуславливается разрядом емкости.

С л у ч а й 2.  $\delta = \omega_0$ , т. е.  $r = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  (критический случай).

Согласно (14-17) корни характеристического уравнения одинаковы:

$$p_1 = p_2 = -\frac{r}{2L} = -\delta$$

(см. рис. 14-10, б).

Выражение (14-21) приводит в этом случае к неопределенности вида  $0/0$ .

Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталья дифференцированием числителя и знаменателя по  $p_1$ , получаем:

$$i = \lim_{p_1 \rightarrow p_2} \frac{E-U}{L(p_1-p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = \frac{E-U}{L} t e^{-\delta t}.$$

То же выражение получится, если воспользоваться общим решением однородного дифференциального уравнения с кратными корнями:

$$i_{св} = (B_1 + B_2 t) e^{-\delta t}.$$

В рассматриваемом случае  $i_{св}(0) = B_1 = 0$  и

$$\frac{di}{dt} = B_2 e^{-\delta t} - B_2 t \delta e^{-\delta t}.$$

Следовательно,

$$\frac{di}{dt}(0) = B_2 = \frac{E-U}{L}.$$

Кривая тока аналогична кривой  $i$  на рис. 14-11.

С л у ч а й 3.  $\delta < \omega_0$ , т. е.  $r < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  (колебательный процесс).

Корни характеристического уравнения комплексные и сопряженные:

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{св}, \quad (14-23)$$

где

$$\omega_{св} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (14-24)$$

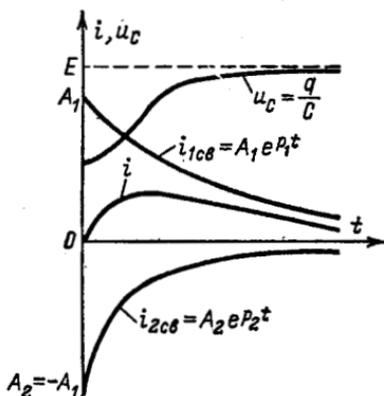


Рис. 14-11. Аperiодический процесс в цепи  $r, L, C$ .



Согласно (14-24)  $\omega_0 = \sqrt{\delta^2 + \omega_{св}^2}$ .

Корни характеристического уравнения располагаются симметрично относительно действительной оси в левой полуплоскости, на полуокружности, центр которой совпадает с началом координат, а радиус равен  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  (см. рис. 14-10, в).

Сопоставление рис. 14-10, а, б и в показывает, что о характере переходного процесса в цепи  $r, L, C$  можно судить по расположению корней характеристического уравнения, т. е. нулей функции  $Z(p)$ , на комплексной плоскости.

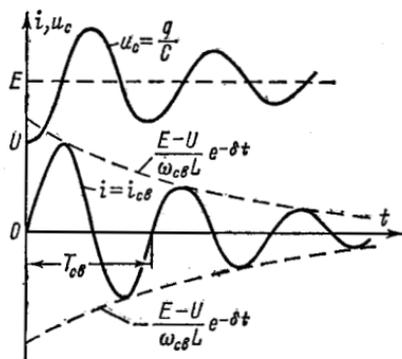


Рис. 14-12. Колебательный процесс при включении в цепь  $r, L, C$  постоянной э. д. с.

Если расположенные в левой полуплоскости нули функции  $Z(p)$  лежат на действительной оси, то имеет место апериодический процесс: совмещение нулей в одной точке отвечает критический случай; наконец, если нули функции  $Z(p)$  являются комплексно-сопряженными, то имеет место колебательный процесс.

Величина  $\omega_{св}$  (рис. 14-10, в) называется угловой частотой свободных или собственных колебаний в цепи  $r, L, C$ , а  $T_{св} = 2\pi/\omega_{св}$  — периодом этих колебаний.

Ток в цепи согласно (14-22)

$$i = \frac{E-U}{j\omega_{св}L} e^{-\delta t} \operatorname{sh} j\omega_{св}t = \frac{E-U}{\omega_{св}L} e^{-\delta t} \sin \omega_{св}t^*. \quad (14-25)$$

Полученное выражение показывает, что при включении цепи  $r, L, C$  на постоянное напряжение, когда  $\delta < \omega_0$ , в цепи возникают затухающие синусоидальные колебания, причем огибающими кривой тока служат кривые  $\pm \frac{E-U}{\omega_{св}L} e^{-\delta t}$  (рис. 14-12). Колебания возникают вследствие периодического преобразования энергии электрического поля в энергию

\* Тот же результат получится, если исходить из общего решения однородного дифференциального уравнения с комплексно-сопряженными корнями:

$$i_{св} = (M \cos \omega_{св}t + N \sin \omega_{св}t) e^{-\delta t}.$$

магнитного поля и обратно, причем эти колебания сопровождаются потерей энергии в сопротивлении.

При  $t = 1/\delta$  ордината огибающей в  $e = 2,718$  раза меньше начального значения огибающей. Поэтому величину  $1/\delta = 2L/r$  называют постоянной времени колебательного контура.

На рис. 14-12 показана также кривая напряжения  $u_C$  на емкости, которая в другом масштабе выражает также зависимость электрического заряда  $q$  от времени. Функции  $u_C$  и  $i$  имеют одинаковый множитель затухания. При нулевых начальных условиях ( $U = 0$ ) кривая  $u_C$  начинается с нуля.

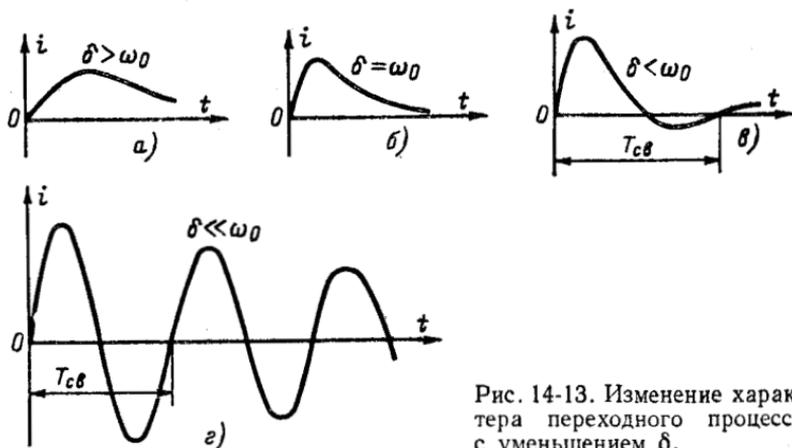


Рис. 14-13. Изменение характера переходного процесса с уменьшением  $\delta$ .

Как видно из (14-23) и рис. 14-10,  $\omega_{св}$ , угловая частота этих колебаний  $\omega_{св}$  определяется абсолютным значением ординаты корня характеристического уравнения, которая при  $\delta \neq 0$  всегда меньше резонансной частоты  $\omega_0$ .

Чем меньше  $\delta$  по сравнению с  $\omega_0$ , тем медленнее затухает колебательный процесс и тем больше частота собственных колебаний цепи  $r, L, C$  приближается к резонансной частоте.

В пределе, при  $\delta = 0$   $\omega_{св} = \omega_0$ , колебания не затухают и корни характеристического уравнения располагаются на мнимой оси (см. рис. 14-10, в).

О быстроте затухания колебательного процесса судят по величине  $e^{\delta T_{св}}$ , называемой декрементом колебания, или величине  $\theta = \ln e^{\delta T_{св}} = \delta T_{св}$ , называемой логарифмическим декрементом колебания.

На рис. 14-13, *a*—*г* показано изменение характера переходного процесса при уменьшении  $\delta$ .

Приведенные выше величины  $\omega_{св}$  и  $\theta$  связаны с параметрами последовательного резонансного контура — добротностью  $Q = \omega_0 L/r$  и затуханием  $d = 1/Q$ , введенными в гл. 5:

$$\omega_{св} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2\omega_0 L}\right)^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}.$$

При достаточно высокой добротности  $\omega_{св} \approx \omega_0$ . В этом случае  $\theta = \frac{\delta 2\pi}{\omega_{св}} \approx \frac{\pi}{Q}$ , откуда  $d \approx \theta/\pi$ . Для контура среднего качества  $d \approx 0,01$  и логарифмический декремент  $\theta \approx 0,03$ .

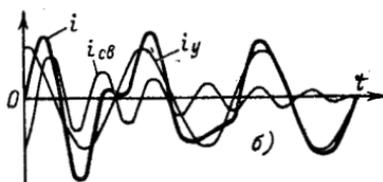
## 2. Включение в цепь $r, L, C$ синусоидальной э. д. с.

Если цепь  $r, L, C$  присоединяется к источнику синусоидальной э. д. с.  $E_m \sin(\omega t + \psi)$ , то установившийся ток равен:



$$i_y = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi)$$

и переходный ток согласно (14-18) равен:



$$i = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) + A_1 e^{\rho_1 t} + A_2 e^{\rho_2 t}.$$

Кривые установившегося, свободного и переходного токов при апериодическом и колебательном процессах показаны в виде примера на рис. 14-14.

Рис. 14-14. Апериодический (*a*) и колебательный (*б*) процессы при включении в цепь  $r, L, C$  синусоидальной э. д. с.

Частота установившегося тока равна частоте источника синусоидального

напряжения, свободный же ток при  $\delta < \omega_0$  изменяется с собственной частотой цепи  $\omega_{св}$ . Частота  $\omega_{св}$  может быть в зависимости от параметров  $r, L$  и  $C$  меньше, больше или равна частоте  $\omega$ .

Свободные колебания тока накладываются на установившийся ток и затухают пропорционально множителю  $e^{-\delta t}$ . По мере затухания свободного тока кривая переходного тока приближается к кривой установившегося тока.

Та из двух слагающих тока  $i$ , частота которой меньше, служит как бы криволинейной осью для другой слагающей, колеблющейся относительно нее (рис. 14-14, б). При близком совпадении частот  $\omega$  и  $\omega_{св}$  в цепи возникают биения. Этот вопрос подробнее рассмотрен в [Л. 12 и 14].

#### 14-7. РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В РАЗВЕТВЛЕННОЙ ЦЕПИ

Переходный процесс в разветвленной линейной электрической цепи описывается системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, общее решение которых находится как сумма установившейся и свободной составляющих.

Рассмотрим сначала методику расчета установившегося режима.

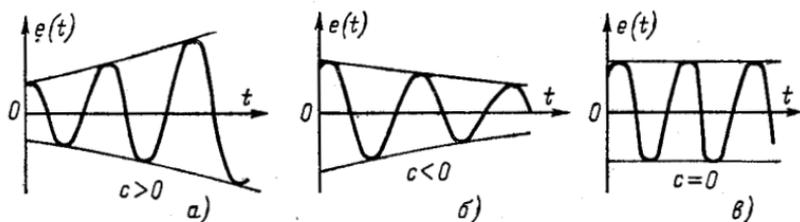


Рис. 14-15. «Синусоиды» с возрастающей (а), убывающей (б) и неизменной (в) амплитудами.

Во многих случаях воздействующая функция, например э. д. с. источника, может быть представлена в обобщенной форме  $E_m e^{j\psi} e^{pt}$ , где  $p = c + j\omega$  — комплексное число. В зависимости от значений буквенных величин, входящих в приведенное выражение, получается тот или иной закон изменения э. д. с., причем мгновенные значения э. д. с. определяются мнимой или действительной частью выражения.

Условие  $\omega \neq 0$  соответствует гармонической э. д. с. с возрастающей ( $c > 0$ ), убывающей ( $c < 0$ ) или неизменной ( $c = 0$ ) амплитудой (рис. 14-15).

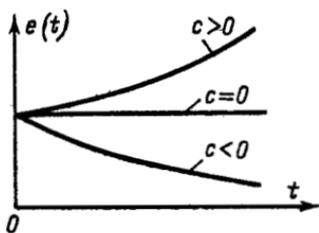
Условие  $\omega = 0$  соответствует возрастающей ( $c > 0$ ) или убывающей ( $c < 0$ ) показательной функции; при  $c = 0$  э. д. с. постоянна (рис. 14-16).

Задавшись э. д. с.  $E_m e^{j\psi} e^{pt}$ , ищем установившийся ток в виде  $I_m e^{j\alpha} e^{pt}$ . Данная функция при дифференцировании (по переменной  $t$ ) умножается на  $p$ , а при интегрировании

делится на  $p$ . Поэтому подстановка выражения  $I_m e^{j\alpha e^{pt}}$  в исходное дифференциальное (или интегродифференциальное) уравнение приводит к алгебраическому уравнению, которое отличается от уравнения для установившегося режима, записанного в комплексной форме, только тем, что  $j\omega$  заменяется на  $p$ . Таким образом, установившийся ток получается равным

$$I_y(t) = \frac{E_m e^{j\psi} e^{pt}}{Z(p)} = \frac{E_m e^{ct} e^{j(\omega t + \psi)}}{Z(c + j\omega)}.$$

В зависимости от схемы и постановки задачи  $Z(p)$  означает обобщенное входное сопротивление или величину, обратную обобщенной передаточной проводимости;  $Z(p)$  получается из соответствующего комплексного сопротивления заменой  $j\omega L$  на  $pL$  и  $1/j\omega C$  на  $1/pC$ .



Мгновенные значения тока определяются мнимой или действительной частью  $I_{np}(t)$ .

Рис. 14-16. Возрастающая ( $c > 0$ ) и убывающая ( $c < 0$ ) показательные функции и постоянная ( $c = 0$ ).

В случае синусоидальной э. д. с. ( $c = 0$ ;  $p = j\omega$ ) установившийся ток также синусоидальный

$$I_y(t) = E_m e^{j(\omega t + \psi)} / Z(j\omega).$$

Если э. д. с. есть показательная функция ( $\psi = 0$ ;  $p = c$ ;  $E_m = E$ ), то установившийся ток изменяется также по показательному закону

$$i_y(t) = E e^{ct} / Z(c),$$

где

$$Z(c) = [Z(p)]_{p=c}.$$

При постоянной э. д. с. ( $\psi = 0$ ;  $p = 0$ ;  $E_m = E$ ) установившийся ток равен постоянному току

$$I = E / z(0),$$

где  $z(0)$  — сопротивление при постоянном токе.

Перейдем теперь к рассмотрению свободного режима.

Свободные составляющие представляют собой общее решение системы однородных линейных дифференциальных уравнений. Для заданной цепи степень характеристического уравнения не зависит от выбора контуров, для кото-

рых составляются уравнения по второму закону Кирхгофа. Однако если выбрать контуры так, чтобы порядок дифференциальных уравнений был наименьшим, то степень характеристического уравнения не будет превышать суммы порядков исходных дифференциальных уравнений системы. При этом, как будет показано ниже, для получения характеристического уравнения отнюдь не обязательно приводить систему дифференциальных уравнений к одному уравнению относительно одной неизвестной функции.

Корни характеристического уравнения могут быть действительными или комплексными. Если корни комплексные, то они всегда образуют комплексно сопряженные пары. В связи с этим характеристическое уравнение нечетной степени всегда имеет хотя бы один действительный корень, остальные же корни могут быть действительными или комплексно-сопряженными; характеристическое уравнение четной степени имеет четное число действительных или комплексно-сопряженных корней. Действительные части всех корней характеристического уравнения всегда отрицательны, что физически обусловлено затуханием свободных составляющих в пассивных цепях с течением времени. При этом все коэффициенты характеристического уравнения должны быть действительными и положительными.

Корни единого характеристического уравнения используются для нахождения в данной цепи свободных составляющих как токов, так и напряжений.

Допустим, что характеристическое уравнение имеет  $n$  корней. Тогда свободный ток в любой ветви

$$i_{св}(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}; \quad (14-26)$$

здесь  $p_k$  — корни характеристического уравнения,  $A_k$  — постоянные интегрирования.

Аналогичная структура решения получается и для свободных составляющих напряжений.

В случае, когда  $p_k = -\delta_k$  является действительным корнем  $m$ -й кратности, решение для этого корня записывается в виде

$$e^{-\delta_k t} \sum_{i=1}^m B_i t^{i-1}.$$

Если имеются сопряженные комплексные корни, например  $p_{k,k+1} = -\delta_k \pm j\omega_k$ , то выражение  $A_k e^{p_k t} + A_{k+1} e^{p_{k+1} t}$



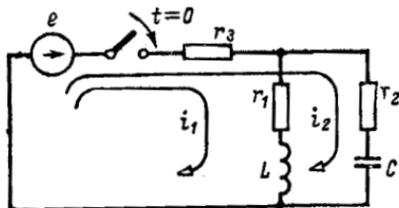
преобразуется в  $e^{-\delta_k t} (A_k e^{j\omega_k t} + A_{k+1} e^{-j\omega_k t}) = e^{-\delta_k t} \times (M \cos \omega_k t + N \sin \omega_k t)$ .

Для  $m$ -кратных сопряженных комплексных корней решение принимает вид:

$$e^{-\delta_k t} \sum_{i=1}^m t^{i-1} (M_i \cos \omega_k t + N_i \sin \omega_k t).$$

Методика получения характеристического уравнения иллюстрирована ниже на примере двухконтурной схемы, изображенной на рис. 14-17.

Первый контур содержит сопротивления  $r_1$  и  $r_3$  и индуктивность  $L$ , второй контур содержит сопротивления  $r_2$  и  $r_3$  и емкость  $C$ ; поэтому порядок дифференциального уравнения для каждого из этих контуров равен единице:



$$r_3 (i_1 + i_2) + r_1 i_1 + L \frac{di_1}{dt} = e;$$

$$r_3 (i_1 + i_2) + r_2 i_2 + \frac{1}{C} \int i_2 dt = e.$$

Рис. 14-17. Пример двухконтурной схемы.

Соответственно степень характеристического уравнения равна 2.

Для получения характеристического уравнения применяется следующий прием. Система дифференциальных уравнений для свободных слагающих токов

$$r_3 (i_{1св} + i_{2св}) + r_1 i_{1св} + L \frac{di_{1св}}{dt} = 0;$$

$$r_3 (i_{1св} + i_{2св}) + r_2 i_{2св} + \frac{1}{C} \int i_{2св} dt = 0$$

записывается в символической алгебраической форме, при которой символ  $p$  заменяет операцию дифференцирования, а символ  $1/p$  — операцию интегрирования:

$$(r_1 + r_3 + pL) i_{1св} + r_3 i_{2св} = 0;$$

$$r_3 i_{1св} + \left( r_2 + r_3 + \frac{1}{pC} \right) i_{2св} = 0.$$

Данная система уравнений имеет решение, отличное от нулевого, если определитель системы равен нулю, т. е.

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} r_1 + r_3 + pL & r_3 \\ r_3 & r_2 + r_3 + \frac{1}{pC} \end{vmatrix}$$

или

$$\begin{aligned} & (r_1 + r_3 + pL) \left( r_2 + r_3 + \frac{1}{pC} \right) - r_3^2 = \\ & = \frac{1}{pC} \{ (r_2 + r_3) LCp^2 + [(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3) C + \\ & + L] p + r_1 + r_3 \} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, получается характеристическое уравнение второй степени

$$(r_2 + r_3) LCp^2 + [(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3) C + L] p + r_1 + r_3 = 0.$$

Ввиду прямой пропорциональности, существующей между входным сопротивлением цепи  $Z(p)$  и определителем системы  $\Delta(p)$  [см., например, (7-9) в § 7-5], то же характеристическое уравнение получается и по формуле  $Z(p) = 0$ .

Операторное сопротивление  $Z(p)$  получается из комплексного сопротивления  $Z(j\omega)$  заменой  $j\omega$  на  $p$ . При этом, разомкнув любую ветвь в пассивной цепи, находим в месте размыкания входное сопротивление  $Z(p)$  \*.

Если характеристическое уравнение имеет степень  $n$ , то искомыми являются  $n$  постоянных интегрирования ( $A_1, A_2, \dots, A_n$ ), входящих в выражение (14-26) \*\*. Постоянные интегрирования находятся в результате решения системы  $n$  уравнений, соответствующих моменту времени  $t = 0$ . Эта система уравнений получается путем

\* Предыдущие рассуждения основывались на уравнениях контурных токов. Аналогично, исходя из метода узловых напряжений, можно показать, что  $Y(p) = 0$  также является характеристическим уравнением, если под  $Y(p)$  подразумевать операторную проводимость между любыми двумя узлами заданной схемы пассивной цепи.

\*\* Методика вычисления постоянных интегрирования остается такой же и в случае кратных или комплексных корней характеристического уравнения.



занных в п. 2, соответствующее принужденному режиму цепи.

5. Определяются зависимые начальные условия для искомых функций на основании найденных в п. 1 независимых начальных условий и уравнений Кирхгофа из п. 2, примененных для  $t = 0$ .

6. По начальным условиям определяются постоянные интегрирования, содержащиеся в общем решении.

7. Найденные установившиеся и свободные токи и напряжения складываются<sup>1</sup>.

Приведенный ниже пример 14-1 иллюстрирует нахождение начальных условий; в примере 14-2 дан численный расчет переходного процесса в цепи на рис. 14-17.

**Пример 14-1.** В цепи, изображенной на рис. 14-18, моменту  $t = 0$  предшествовал установившийся режим постоянного тока. При  $t = 0$  замкнулся контакт  $K$ . Найти начальные значения тока в индуктивности и напряжений на емкостях и их первых производных.

Независимыми начальными условиями будут ток в индуктивности  $i_4(0) = i_4(0-) = \frac{E}{r_1 + r_2}$  и напряжения на емкостях  $u_1(0) = u_1(0-)$  и  $u_2(0) = u_2(0-)$ .

Напряжения на емкостях до коммутации находятся из условий равенства их зарядов (так как емкости соединены последовательно) и равенства суммарного напряжения на емкостях напряжению на сопротивлении  $r_1$ :

$$C_1 u_1(0-) = C_2 u_2(0-);$$

$$u_1(0-) + u_2(0-) = r_1 i_3(0-) = r_1 i_4(0-),$$

откуда

$$u_1(0-) = r_1 i_4(0-) \frac{C_2}{C_1 + C_2};$$

$$u_2(0-) = r_1 i_4(0-) \frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

Требуемые зависимые начальные условия определяются из уравнений

$$C_1 \frac{du_1}{dt}(0) = i_1(0) \quad \text{и} \quad C_2 \frac{du_2}{dt}(0) = i_2(0),$$

<sup>1</sup> В случае, когда э. д. с. изменяется в виде импульса, имеющего кусочно-аналитическую форму, представляется часто целесообразным применять интеграл Дюамеля (см. § 15-11).

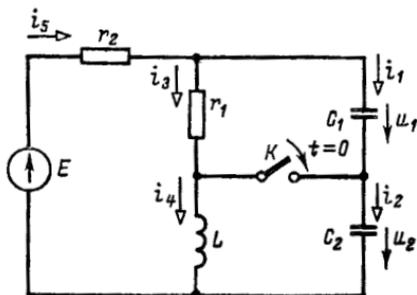


Рис. 14-18. Пример 14-1.

токи же  $i_1(0)$  и  $i_2(0)$  — из уравнений Кирхгофа после коммутации:

$$E_{i_2} = r_2 i_5 + u_1 + u_2, \quad u_1 = r_1 i_3; \quad i_1 + i_3 = i_2 + i_4 = i_5.$$

Подстановка в эти уравнения найденных значений  $i_4(0)$ ,  $u_1(0)$  и  $u_2(0)$  дает:

$$i_5(0) = \frac{E - u_1(0) - u_2(0)}{r_2}; \quad i_3(0) = \frac{u_1(0)}{r_1};$$

$$i_1(0) = i_5(0) - i_3(0); \quad i_2(0) = i_5(0) - i_4(0)$$

и далее

$$\frac{du_1}{dt}(0) = \frac{i_1(0)}{C_1}; \quad \frac{du_2}{dt}(0) = \frac{i_2(0)}{C_2}.$$

Начальное значение производной тока в индуктивности определяется также из уравнения Кирхгофа:

$$E = r_2 i_5 + r_1 i_3 + L \frac{di_4}{dt},$$

откуда при  $t = 0$

$$\frac{di_4}{dt}(0) = \frac{E - r_2 i_5(0) - r_1 i_3(0)}{L}.$$

**Пример 14-2.** Определить ток  $i$  в цепи на рис. 14-17, если известно, что  $e = E = 100$  В,  $r_1 = 5$  Ом,  $r_2 = 3$  Ом,  $r_3 = 100$  Ом,  $L = 0,1$  Г,  $C = 100$  мкФ,  $u_C(0) = 0$ .

Подстановка заданных значений в приведенное выше характеристическое уравнение дает:

$$1,03 \cdot 10^{-3} p^2 + 0,1815p + 105 = 0,$$

или

$$p^2 + 176p + 1,02 \cdot 10^5 = 0;$$

корни характеристического уравнения комплексные:

$$p_{1,2} = -88 \pm j307.$$

Искомый ток

$$i_1 = i_{1y} + i_{1св}.$$

Установившийся ток

$$i_{1y} = \frac{100}{105} = 0,952 \text{ А.}$$

Свободный ток

$$i_{1св} = e^{-88t} (A_1 e^{j307t} + A_2 e^{-j307t}) = e^{-88t} (M \cos 307t + N \sin 307t).$$

В начальный момент  $i_1(0) = 0$ , следовательно,  $0 = 0,952 + M$ , откуда  $M = -0,952$ .

Производная тока по времени

$$\frac{di_1}{dt} = e^{-88t} (-307M \sin 307t + 307N \cos 307t) - 88e^{-88t} (M \cos 307t + N \sin 307t).$$



В начальный момент  $u_C(0) = 0$ ,  $i_1(0) = 0$  и  $i_2(0) = \frac{100}{103} = 0,971$  А. Следовательно, в начальный момент напряжение на ветви  $r_2C$  (и параллельной ей ветви  $r_1L$ ) равно  $3 \cdot 0,971 = 2,913$  А. Начальное значение производной  $di_1/dt(0)$  определяется из уравнений  $2,913 = 0,1 \frac{di_1}{dt}(0)$ , откуда  $\frac{di_1}{dt}(0) = 29,13$  А/с.

Следовательно, подставляя значение  $\frac{di_1}{dt}(0)$  в выражение для производной при  $t = 0$ , получаем:

$$29,13 = 307N - 88M = 307N + 83,8,$$

откуда

$$N = -0,178.$$

Итак,

$$i_1 = 0,952 - e^{-88t} (0,952 \cos 307t + 0,178 \sin 307t) \text{ А.}$$

#### 14-8. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПЯХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Переходные процессы в цепях с распределенными параметрами (в линиях, обмотках электрических машин и т. п.) возникают при коммутациях, передаче непериодических сигналов или под влиянием внешнего электромагнитного поля (например, при грозовых разрядах). Для исследования переходных процессов в однородных цепях с распределенными параметрами пользуются дифференциальными уравнениями (11-2) в частных производных, выведенными в гл. 11:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = ri + L \frac{\partial i}{\partial t}; \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = gu + C \frac{\partial u}{\partial t},$$

где  $r$ ,  $L$ ,  $g$  и  $C$  — параметры цепи на единицу длины;  $x$  — координата рассматриваемой точки, отсчитываемая от начала цепи.

В общем виде решение этих дифференциальных уравнений достаточно сложно. Решение упрощается, если пренебречь потерями, т. е. считать, что  $r$  и  $g$  равны нулю. В этом случае

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t}; \quad (14-28)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (14-29)$$



Дифференцируя (14-28) по  $x$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -L \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial i}{\partial t} \right) = -L \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial i}{\partial x} \right)$$

и используя (14-29), получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (14-30)$$

Дифференциальное уравнение (14-30) известно в математической физике под названием уравнения колебаний струны. Его решение дано Даламбером и имеет вид:

$$u = f_1(x - vt) + f_2(x + vt), \quad (14-31)$$

где

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Первая слагающая представляет собой одиночную прямую волну напряжения, которая без изменения перемещается в сторону возрастающих  $x$ , т. е. от начала к концу цепи. Для всех значений  $x$ , при которых  $x - vt = \text{const}$ , эта слагающая имеет одно и то же значение, т. е. волна движется со скоростью  $v = dx/dt$ .

Вторая слагающая представляет собой одиночную обратную волну напряжения, которая без изменения перемещается в противоположном направлении.

Для нахождения тока произведем замену переменных, обозначив  $\xi = x - vt$  и  $\eta = x + vt$ . На основании (14-29) и (14-31)

$$\begin{aligned} \frac{\partial i}{\partial x} &= -C \frac{\partial}{\partial t} (f_1 + f_2) = -C \left( \frac{\partial f_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) = \\ &= Cv \left( \frac{\partial f_1}{\partial \xi} - \frac{\partial f_2}{\partial \eta} \right). \end{aligned}$$

Но

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial \xi}$$

и

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial \eta}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial i}{\partial t} = Cv \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial x} \right).$$



Интегрирование последнего уравнения дает <sup>1</sup>:

$$i = \sqrt{\frac{C}{L}} [f_1(x - vt) - f_2(x + vt)]. \quad (14-32)$$

Выражения (14-31) и (14-32) записываются сокращенно:

$$u = u_n + u_o; \quad (14-33)$$

$$i = \frac{1}{z_B} (u_n - u_o) = i_n - i_o, \quad (14-34)$$

здесь  $i_n$  и  $i_o$  — прямая и обратная волны тока;  $z_B = \sqrt{\frac{L}{C}}$  — волновое сопротивление.

Следовательно, напряжение и ток прямой и соответственно обратной волн связаны законом Ома:

$$\frac{u_n}{i_n} = \frac{u_o}{i_o} = z_B.$$

Аналогичный результат был получен в § 11-3 для установившихся прямой и обратной волн при рассмотрении синусоидального режима в однородной линии. Физически установившиеся волны представляют собой бесконечные суммы прямых и обратных одиночных волн, отраженных от обоих концов линии.

Итак, при отсутствии потерь в однородной цепи с распределенными параметрами напряжение и ток могут быть представлены как сумма и разность двух волн, движущихся с одинаковой скоростью  $v = 1/\sqrt{LC}$  в противоположных направлениях, без изменения их формы. При этом в любой точке однородной цепи отношение напряжения и тока для прямой и обратной волн равно волновому сопротивлению  $z_B$ .

Если на пути распространения волны встречается неоднородность, например воздушная линия переходит в кабельную или волна достигает конца линии (разомкнутого или замкнутого через сопротивление или на короткое), происходит отражение волны. В зависимости от характера неоднородности отражение может быть частичным или полным. В первом случае наряду с отраженной волной возникает преломленная волна, распространяющаяся за место нарушения однородности; во втором случае преломленная волна отсутствует.

Обозначим  $u_1$  и  $i_1$  — напряжение и ток в месте отражения;

$u_{1n}$  и  $i_{1n}$  — напряжение и ток падающей (прямой) волны;

<sup>1</sup> Постоянная интегрирования может быть отнесена к функциям  $f_1$  и  $f_2$ .



$u_{10}$  и  $i_{10}$  — напряжение и ток отраженной (обратной) волны;

$u_2$  и  $i_2$  — напряжение и ток преломленной (прямой) волны;

$z_1$  и  $z_2$  — волновые сопротивления для прямой и обратной волн ( $z_1$ ) и преломленной волны ( $z_2$ ).

В месте неоднородности выполняется условие равенства напряжений и токов:

$$u_1 = u_2, \quad i_1 = i_2.$$

Следовательно,

$$u_{1п} + u_{10} = u_2; \quad (14-35)$$

$$i_{1п} - i_{10} = i_2. \quad (14-36)$$

Подстановка в (14-36) значений  $i_{1п} = u_{1п}/z_1$ ,  $i_{10} = u_{10}/z_1$  и  $i_2 = u_2/z_2$  дает:

$$\frac{u_{1п} - u_{10}}{z_1} = \frac{u_2}{z_2}. \quad (14-37)$$

В результате совместного решения уравнений (14-35) — (14-37) находятся отраженная ( $u_{10}$ ) и преломленная ( $u_2$ ) волны:

$$\left. \begin{aligned} u_{10} &= nu_{1п}; \\ u_2 &= (1+n)u_{1п}, \end{aligned} \right\} \quad (14-38)$$

где  $n = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1}$  — коэффициент отражения.

Соответственно ток отраженной волны

$$i_{10} = \frac{u_{10}}{z_1} = n \frac{u_{1п}}{z_1},$$

а ток преломленной волны

$$i_2 = \frac{u_2}{z_2} = \frac{(1+n)u_{1п}}{z_2} = \frac{2u_{1п}}{z_1 + z_2}.$$

Последнее выражение показывает, что ток в конце линии после отражения можно найти как ток в эквивалентной цепи, в которую включается напряжение, равное двойному напряжению падающей волны, и которая состоит из волнового сопротивления первой линии  $z_1$  и последовательно соединенного с ним сопротивления нагрузки (в которое входит вторая линия своим волновым сопротивлением  $z_2$ ).

Опишем процесс включения однородной линии без потерь. После присоединения линии к источнику э. д. с. по линии начнет распространяться зарядная волна, создающая напряжение и ток. Если в конце линии присоединена нагрузка, равная волновому сопротивлению линии,

то падающая волна, достигнув ее, не отразится и в линии сразу наступит установившийся режим. Если же нагрузка с линией не согласована, то падающая зарядная волна, достигнув конца линии, претерпит отражение. Распространяясь в обратную сторону, отраженная волна сложится с падающей, причем напряжения волн суммируются, а токи вычитаются (алгебраически). Достигнув начала линии, обратная волна снова отразится от источника э. д. с., как от короткозамкнутого конца; появится новая прямая волна напряжения и тока, которая также отразится от конца, и т. д. Процесс будет продолжаться до наступления установившегося режима. Теоретически в идеальной линии без потерь при чисто реактивной нагрузке процесс колебаний будет продолжаться бесконечно долго. В реальной линии при наличии потерь волны напряжения и тока будут постепенно затухать в направлении распространения.

Напряжение и ток в линии в произвольный момент времени определяются как алгебраические суммы и соответственно разности напряжений и токов прямых и обратных волн.

Пользуясь формулами и схемой замещения, описанной выше, можно найти напряжение и ток, возникающие в месте присоединения сосредоточенной нагрузки или перехода одной линии в другую (см. пример 14-3).

Следует отметить что индуктивность, включенная последовательно в линию, или емкость, включенная параллельно проводам линии, сглаживает фронт преломленных волн; активное сопротивление, включенное в линию параллельно, уменьшает преломленную волну.

Различные случаи отражения и преломления волн рассмотрены в [Л. 5, 12 и 14].

**Пример 14-3.** К концу линии, имеющей волновое сопротивление  $z_0$ , присоединена индуктивная катушка  $r, L$ . Определить ток в катушке и напряжение на ней под воздействием прямоугольной волны  $U$ .

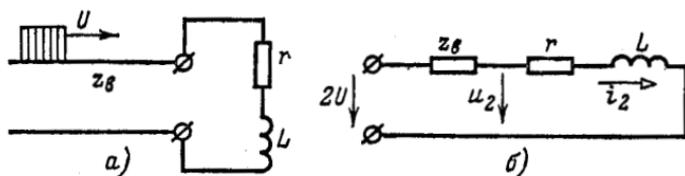


Рис. 14-19. Пример 14-3.

На рис. 14-19 показаны расчетная схема и эквивалентная схема замещения, Дифференциальное уравнение Кирхгофа для такой цепи

запишется так:

$$2U = i_2(z_B + r) + L \frac{di_2}{dt},$$

откуда

$$i_2 = \frac{2U}{z_B + r} (1 - e^{-t/\tau})$$

и

$$u_2 = 2U - z_B i_2 = \frac{2U}{z_B + r} (r + z_B e^{-t/\tau});$$

здесь  $\tau = \frac{L}{z_B + r}$ ;  $t = 0$  соответствует моменту падения волны на катушку.

#### 14-9. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

14-1. Сопротивление  $r = 1000$  Ом и незаряженная емкость  $C = 1$  мкФ, соединенные последовательно, подключаются при  $t = 0$  к источнику постоянной э. д. с.  $E = 100$  В. Вычислить ток и первую производную тока по времени для  $t = 0$ , не находя функциональной зависимости  $i(t)$ .

О т в е т:  $i(0) = 0,1$  А.

$$\frac{di}{dt}(0) = -100 \text{ А/с.}$$

14-2. Сопротивление  $r = 10$  Ом и индуктивность  $L = 1$  Г, соединенные последовательно, подключаются при  $t = 0$  к источнику э. д. с.  $E = 100$  В. Вычислить ток и первую производную тока по времени для  $t = 0$ , не находя функциональной зависимости  $i(t)$ .

О т в е т:  $i(0) = 0$ ;  $\frac{di}{dt}(0) = 100$  А/с.

14-3. Сопротивление  $r = 10$  Ом и незаряженная емкость  $C = 10$  мкФ, соединенные последовательно, подключаются при  $t = 0$  к источнику э. д. с.  $10e^{-t} \sin t$  В. Определить  $i(t)$ .

О т в е т:  $i = 10^{-4} e^{-t} (\cos t - \sin t) - 10^{-4} e^{-10^4 t}$  А.

14-4. Цепь, состоящая из последовательно соединенных сопротивлений  $r = 75$  Ом, индуктивности  $L = 3 \cdot 10^{-4}$  Г и незаряженной емкости  $C = 12 \cdot 10^{-10}$  Ф, подключается при  $t = 0$  к источнику постоянной э. д. с.  $E = 100$  В. Определить  $i(t)$ .

О т в е т:  $i = 0,2e^{-12,5 \cdot 10^4 t} \sin(1,66 \cdot 10^6 t)$  А.

14-5. Сопротивление  $r = 20$  Ом и емкость  $C = 5$  мкФ, соединенные последовательно, подключаются при  $t = 0$  к источнику постоянной э. д. с.  $E = 25$  В. Определить  $i(t)$ , если начальное напряжение на емкости равно 50 В.

О т в е т:  $i = 3,75e^{-10^4 t}$ , или  $i = -1,25 \cdot 10^4 t$  А.

14-6. Сопротивление  $r = 50$  Ом и незаряженная емкость  $C = 3,75$  мкФ, соединенные последовательно, подключаются при  $t = 0$  к источнику э. д. с.  $E = 20$  В. Определить  $i(t)$ .

О т в е т:  $i = 0,4e^{-533t}$  А.

14-7. В цепи на рис. 14-17  $r_2 = 0$  и  $e = E$ . Определить: 1) напряжения на  $r_1$  и на  $L$ , для  $t = 0$  и  $t = \infty$ ;

2) первые производные напряжений на  $r_1$  и  $L$  по времени для  $t = 0$ .  
 Ответ:  $u_{r_1}(0) = u_L(0) = 0$ ,

$$u_{r_1}(\infty) = E \frac{r_1}{r_1 + r_3}; \quad u_L(\infty) = 0; \quad \frac{du_{r_1}}{dt}(0) = 0;$$

$$\frac{du_L}{dt}(0) = \frac{F}{r_3 C}.$$

14-8. Заряженная емкость  $C_1 = 10$  мкФ с начальным напряжением 1000 В присоединяется при  $t = 0$  к двум параллельным ветвям. Первая ветвь состоит из одного сопротивления  $r_1 = 10^6$  Ом, вторая ветвь состоит из сопротивления  $r_2 = 2 \cdot 10^6$  Ом и незаряженной емкости  $C_2 = 20$  мкФ, соединенных последовательно. Вычислить вторую производную тока во второй ветви для  $t = 0$ , не находя функциональной зависимости от времени.

Ответ:  $1,41 \cdot 10^{-5}$  А/с<sup>2</sup>.

14-9. Сопротивление  $r = 100$  Ом и заряженная емкость  $C = 100$  мкФ, соединенные последовательно, подключаются к источнику э. д. с.  $e = 141 \sin(377t + \pi/6)$  В при  $t = 0$ . Определить  $i(t)$ , если начальное напряжение на емкости равно 50 В.

Ответ:  $i = 1,37 \sin(377t + 44^\circ 48') + 0,241e^{-100t}$  А или  $i = 1,37 \sin(377t + 44^\circ 48') - 0,759e^{-100t}$  А.

14-10. Возможно ли включение на переменное синусоидальное напряжение контуров  $r, L, r, C$  и  $r, L, C$ , не сопровождаемое переходным процессом (пояснить физическую сторону явления)?

14-11. Может ли частота колебательного разряда в контуре  $r, L, C$  быть равной или больше резонансной частоты этого контура?

14-12. Пояснить физический смысл постоянных времени цепей  $r, L$  и  $r, C$ . Почему с увеличением  $r$  постоянная времени для первого контура уменьшается, а для второго контура увеличивается?

14-13. Цепь  $r, L$  подключается при  $t = 0$  к источнику синусоидальной э. д. с. Выбрать начало отсчета времени так, чтобы свободный ток отсутствовал.

14-14. Изменив в схеме на рис. 14-6 полярность заряженной емкости, начертить кривые тока и напряжения при включении в цепь  $r, C$  постоянной э. д. с.

14-15. Зависит ли характеристическое уравнение (и соответственно порядок цепи) от воздействующей функции?

## ГЛАВА ПЯТНАДЦАТАЯ

### ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА К РАСЧЕТУ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

#### 15-1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Необходимость определения постоянных интегрирования из начальных условий в ряде случаев сильно осложняет расчет переходных процессов классическим методом



решения линейных дифференциальных уравнений, обыкновенных или с частными производными, описывающих исследуемые процессы. По мере усложнения электрических схем и возрастания порядка дифференциальных уравнений трудности, связанные с нахождением постоянных интегрирования, увеличиваются.

Для инженерной практики, более удобным является метод решения линейных дифференциальных уравнений, при котором заданные начальные условия включаются в исходные уравнения и для нахождения искомых функций не требуется дополнительно определять постоянные интегрирования.

В прошлом столетии в математике развивалось так называемое символическое исчисление, построенное на системе формальных операций над символом  $p$ : производная  $df(t)/dt$  представлялась как результат действия на функцию  $f(t)$  символа  $p$ ; операция интегрирования рассматривалась как применение символа  $1/p$  и т. д. В числе работ, посвященных этому вопросу, большого внимания заслуживает монография М. Е. Ващенко-Захарченко «Символическое исчисление и приложение его к интегрированию линейных дифференциальных уравнений» (Киев, 1862).

В конце XIX в. английский инженер-электрик О. Хевисайд успешно применил и развил символический метод решения линейных дифференциальных уравнений для расчета переходных процессов в электрических цепях с сосредоточенными и распределенными параметрами. Строгое обоснование символического, или, как его стали называть, операционного исчисления, было дано лишь в 20-х годах нашего столетия на базе общей теории функциональных (интегральных) преобразований.

В настоящее время формально-операционное исчисление Хевисайда полностью вытеснено более общим и строгим методом — преобразованием Лапласа, нашедшим широкое применение в технике.

Идея этого метода заключается в том, что из области функций действительного переменного решение переносится в область функций комплексного переменного  $^1 p = c + j\omega$ , где операции принимают более простой вид, а именно: вместо исходных дифференциальных или интегродифференциальных уравнений получаются алгебраические уравне-

---

<sup>1</sup> В современной литературе наряду с обозначением комплексного переменного  $p$  широко распространено также обозначение  $s$ .



ния; затем полученный решением алгебраических уравнений результат «интерпретируется», т. е. производится обратный переход в область функций действительного переменного. Этот переход осуществляется с помощью формул или таблиц.

В этом отношении преобразование Лапласа можно сравнить с логарифмированием, когда от чисел переходят к логарифмам, над логарифмами производят действия, соответствующие действиям над числами, причем умножению чисел соответствует более простая операция сложения логарифмов, и т. д.; наконец, по найденному логарифму определяют искомое число (пользуясь таблицами).

## 15-2. ПРЯМОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА. ОРИГИНАЛ И ИЗОБРАЖЕНИЕ

Пусть  $f(t)$  — функция действительного переменного  $t$ , заданная в области  $t > 0$  и равная нулю при  $t < 0$ , возрастает не быстрее показательной функции, т. е.  $|f(t)| < Me^{c_0 t}$  при  $t > 0$ ; здесь  $M$  и  $c_0$  — постоянные (положительные и действительные);  $t$  — переменное (время). Постоянная  $c_0$  называется показателем роста функции  $f(t)$ . Говорят, что функция имеет ограниченный рост, если показатель роста конечен.

Из курса математического анализа известно, что если  $f(t)$  имеет ограниченный рост, то интеграл

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (15-1)$$

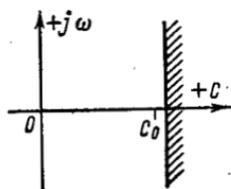


Рис. 15-1. Комплексная плоскость.

сходится абсолютно и является аналитической функцией комплексного переменного  $p = c + j\omega$  в полуплоскости  $\text{Re } p = c > c_0$  (рис. 15-1).

Интегральное уравнение вида (15-1) представляет собой *прямое преобразование Лапласа*. Функция  $f(t)$  называется *оригиналом*, а функция  $F(p)$  — *изображением* по Лапласу. Следовательно, оригинал и изображение представляют собой пару функций действительного переменного  $t$  и комплексного переменного  $p$ , связанных преобразованием Лапласа.

Из определения изображения следует, что каждый оригинал имеет единственное изображение. В свою оче-

редь оригинал вполне определяется своим изображением с точностью до значений в точках разрыва оригинала.

Фразе «оригинал  $f(t)$  имеет своим изображением  $F(p)$ » будем записывать символически (с помощью знака соответствия  $\doteq$ ):

$$f(t) \doteq F(p) \quad \text{или} \quad F(p) \doteq f(t).$$

Такая сокращенная запись равносильна интегральному уравнению (15-1). В литературе применяется также другая условная форма записи прямого преобразования Лапласа, а именно:

$$L[f(t)] = F(p).$$

Для обоснования операционного исчисления Хевисайда в свое время использовалось изображение по Карсону<sup>1</sup>

$$F(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt,$$

отличающееся от изображения по Лапласу множителем  $p$ .

В настоящее время в теории автоматического регулирования и радиотехнике применяется преобразование Лапласа, имеющее прямую связь со спектральным преобразованием Фурье (см. гл. 16). Поэтому все последующие рассуждения будут относиться к изображениям по Лапласу, а не по Карсону.

### 15-3. ИЗОБРАЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ПРОСТЕЙШИХ ФУНКЦИЙ

При исследовании переходных процессов в электрических цепях часто предполагается, что в некоторый момент времени, принимаемый за начальный ( $t = 0$ ), в электрическую цепь включается источник постоянной синусоидальной или какой-либо другой э. д. с., выражаемой функцией  $f(t)$ . Для всех значений  $t < 0$  функция  $f(t)$  принимается равной нулю; это означает, что данная э. д. с. не воздействует на рассматриваемую электрическую цепь до момента ее включения.

Если функция  $f(t)$  имеет ограниченный рост, то на основании § 15-2 она рассматривается как оригинал.

Простейшими оригиналами являются единичная и показательная функции.

<sup>1</sup> Изображение по Карсону имеет ту же размерность, что и оригинал, однако эта особенность не имеет для практики существенного значения.



Единичная функция (рис. 15-2), заданная условием

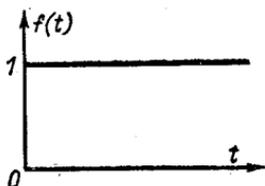
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

соответствует случаю включения постоянной э. д. с., равной 1 в.

Единичная функция имеет условное обозначение  $1(t)$ . Однако для простоты записи в дальнейшем будем условно писать  $f(t) = 1$ , помня, что всякий оригинал (в том числе и единичная функция) по определению равен нулю при  $t < 0$ .

Изображение единичной функции согласно (15-1) имеет вид:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \left. \frac{e^{-pt}}{-p} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{p}.$$



Следовательно,

$$1 \doteq \frac{1}{p} \text{ при } \operatorname{Re} p > 0^1. \quad (15-2)$$

Рис. 15-2. Единичная функция.

Умножение единичной функции на любую функцию времени оставляет последнюю без изменения при  $t > 0$  и дает нуль при  $t < 0$ . Поэтому, умножив, например, единичную функцию на показательную функцию  $e^{qt}$ , получим функцию-оригинал

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ e^{qt} & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

для которой, применяя в дальнейшем сокращенную запись  $f(t) = e^{qt}$ , условно сохраним название показательной функции<sup>2</sup>.

Найдем изображение этого оригинала, полагая, что  $q$  — произвольное комплексное число:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{qt} dt = \left. \frac{e^{-(p-q)t}}{p-q} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{p-q}$$

<sup>1</sup> При  $\operatorname{Re} p \leq 0$  интеграл расходится.

<sup>2</sup> Данная условность распространяется и на другие функции времени: синусоидальные, косинусоидальные и т. п.



при  $\operatorname{Re} (p - q) > 0$ , т. е. при  $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} q$ . Итак,

$$e^{qt} \doteq \frac{1}{p-q} \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} q. \quad (15-3)$$

Полученное выражение справедливо также для действительных или мнимых значений  $q$ .

#### 15-4. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Математическим операциям над оригиналами соответствуют определенные операции над изображениями и наоборот.

Знание этих операций, или, как их называют, *свойств преобразования Лапласа*, облегчает нахождение изображений: оно позволяет переходить от дифференциальных (или интегродифференциальных) уравнений, записанных для функций-оригиналов, к «операторным» уравнениям, записываемым для изображений, и облегчает последующее нахождение искомого оригинала по вычисленному изображению.

Основные свойства преобразования Лапласа, известные из курса математического анализа, приведены в табл. 15-1. Во всех соотношениях предполагается, что  $f(t) \doteq F(p)$ .

Пользуясь соответствием (15-3) и свойством линейности преобразования Лапласа (изображение линейной комбинации есть линейная комбинация изображений), легко найти изображения следующих функций-оригиналов, часто встречающихся в задачах по электротехнике:

$$e^{j(\omega_1 t + \psi)} \doteq \frac{e^{j\psi}}{p - j\omega_1}; \quad (15-4)$$

$$\begin{aligned} \sin(\omega_1 t + \psi) &= \frac{1}{2j} [e^{j(\omega_1 t + \psi)} - e^{-j(\omega_1 t + \psi)}] \doteq \\ &\doteq \frac{p \sin \psi + \omega_1 \cos \psi}{p^2 + \omega_1^2}; \end{aligned} \quad (15-5)$$

$$\cos(\omega_1 t + \psi) \doteq \frac{p \cos \psi - \omega_1 \sin \psi}{p^2 + \omega_1^2}. \quad (15-6)$$

Такие изображения соответствуют, например, э. д. с., включаемым в электрическую цепь, если эти э. д. с. задаются в комплексной (показательной), синусоидальной или косинусоидальной форме (амплитуда равна единице).

Ниже приводятся дополнительные разъяснения к табл. 15-1 и применение некоторых свойств преобразования Лапласа иллюстрируется на примерах.



## Основные свойства одностороннего преобразования Лапласа

Наименование	Формула
Свойство линейности	$\sum_{i=1}^n a_i f_i(t) \doteq \sum_{i=1}^n a_i F_i(p)$
Свойство коммутативности преобразований Лапласа и операций Re и Im	$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(t) &\doteq \operatorname{Re} F(p) \\ \operatorname{Im} f(t) &\doteq \operatorname{Im} F(p) \end{aligned}$
Дифференцирование оригинала (теорема дифференцирования)	$f'(t) \doteq pF(p) - f(0)$
Интегрирование оригинала (теорема интегрирования)	$\int_0^t f(t) dt \doteq \frac{F(p)}{p}$
Дифференцирование изображения	$(-t)^n f(t) \doteq \frac{d^n F(p)}{dp^n}$
Интегрирование изображения	$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_0^{\infty} F(p) dp$
Дифференцирование по параметру	$\frac{\partial}{\partial x} f(t, x) \doteq \frac{\partial}{\partial x} F(p, x)$
Интегрирование по параметру	$\int_{x_0}^x f(t, x) dx \doteq \int_{x_0}^x F(p, x) dx$
Изменение масштаба независимого переменного (теорема подобия)	$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$
Смещение в области действительного переменного (теорема запаздывания)	$f(t - t_0) \doteq e^{-pt_0} F(p)$

Наименование	Формула
Смещение в области комплексного переменного (теорема сдвига)	$e^{\pm \lambda t} f(t) \doteq F(p \mp \lambda)$
Предельные соотношения: начальное значение оригинала конечное значение оригинала	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$ $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$
Умножение изображений (теорема свертывания)	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \doteq F_1(p) F_2(p)$
Следствие теоремы свертывания	$\frac{d}{dt} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \doteq pF_1(p) F_2(p)$
Интеграл Дюамеля	$f_1(0) f_2(t) + \int_0^t f_1'(\tau) f_2(t-\tau) d\tau =$ $= f_1(t) f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau) f_2'(t-\tau) d\tau \doteq$ $\doteq pF_1(p) F_2(p)$
Умножение оригинала на косинус или синус	$f(t) \cos \omega_1 t \doteq \frac{1}{2} [F(p - j\omega_1) + F(p + j\omega_1)]$ $f(t) \sin \omega_1 t \doteq \frac{1}{2j} [F(p - j\omega_1) - F(p + j\omega_1)]$

Особого внимания заслуживают преобразования, связанные с дифференцированием и интегрированием оригиналов (теоремы дифференцирования и интегрирования).

По теореме дифференцирования

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0). \quad (15-7)$$

Здесь, как и ранее в гл. 14, под  $f(0)$  подразумевается предел  $f(0+)$ , к которому стремится  $f(t)$ , когда  $t$  неограниченно убывает, оставаясь положительным. В случае, когда оригинал в начальной точке непрерывен, т. е.  $f(0) =$

$= f(0-) = 0$ , его дифференцированию соответствует операция умножения изображения на  $p$ :

$$\dot{f}(t) \doteq pF(p). \quad (15-8)$$

Повторным применением операции, выражаемой формулой (15-7), можно распространить теорему о дифференцировании на производные высших порядков:

$$f''(t) \doteq p[pF(p) - f(0)] - f'(0) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$$

и т. д., откуда

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - \sum_{k=1}^n f^{(k-1)}(0) p^{n-k},$$

где  $f^{(k-1)}(0)$  — правое предельное значение, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow 0+} f^{(k-1)}(t).$$

Если, в частности,  $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$ , то

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p)$$

и, следовательно,  $n$ -кратному дифференцированию оригинала соответствует  $n$ -кратное умножение на  $p$  (если все производные при  $t = 0$  равны нулю).

По теореме интегрирования

$$\int_0^t f(t) dt \doteq \frac{F(p)}{p}. \quad (15-9)$$

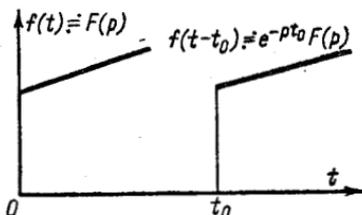


Рис. 15-3. Сдвиг в области действительного переменного.

Повторное применение операции, выраженной этой формулой, дает:

$$\int_0^t \dots \int_0^t f(t) (dt)^n \doteq \frac{F(p)}{p^n}. \quad (15-10)$$

Теоремы дифференцирования и интегрирования показывают, что комплексное переменное  $p$  можно рассматривать как оператор (отсюда и наименование «операторный метод»).

По теореме запаздывания

$$f(t - t_0) \doteq e^{-pt_0} F(p). \quad (15-11)$$



Формула (15-11) показывает, что умножение изображения на  $e^{-pt_0}$  сдвигает график оригинала вправо на  $t_0$  (рис. 15-3).

Пример 15-1. Найти изображение функции (рис. 15-4, а)

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{при } 0 < t < t_0; \\ 0 & \text{при } t > t_0 \end{cases}$$

( $a$  — положительное действительное число).

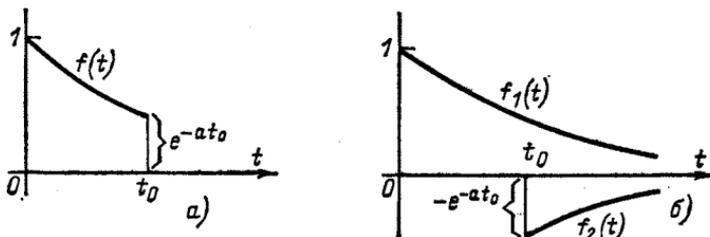


Рис. 15-4. Пример 15-1.

Согласно (15-1)

$$F(p) = \int_0^{t_0} e^{-at} e^{-pt} dt = \frac{1}{p+a} [1 - e^{-(p+a)t_0}].$$

Тот же результат получится, если рассматривать  $f(t)$  как сумму двух функций, показанных на рис. 15-4, б;  $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ . Функ-

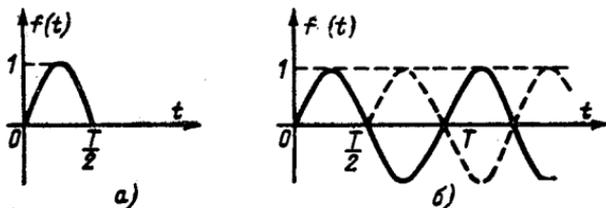


Рис. 15-5. Пример 15-2.

ция  $f_1(t)$  имеет изображение  $\frac{1}{p+a}$ . Поэтому в соответствии с (15-11) функция  $f_2(t)$  имеет изображение

$$-\frac{e^{-at_0} e^{-pt_0}}{p+a}.$$

Искомое изображение функции  $f(t)$  в силу линейности преобразования Лапласа равно:

$$\frac{1}{p+a} [1 - e^{-(p+a)t_0}].$$

**Пример 15-2.** Найти изображение полупериода синусоиды (рис. 15-5, а) с амплитудой, равной единице, и основанием, равным  $T/2$ .

Такой импульс можно получить сложением двух синусоид, сдвинутых на полпериода (рис. 15-5, б),  
По теореме запаздывания

$$F(p) = \frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2} + \frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2} e^{-pT/2} = \\ = \frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2} (1 + e^{-pT/2}).$$

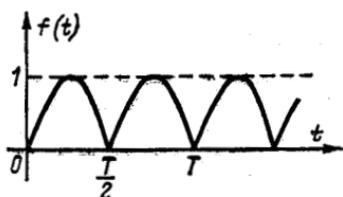


Рис. 15-6, Пример 15-3.

**Пример 15-3.** Найти изображение «выпрямленной» синусоиды, т. е. функции  $f(t) = |\sin \omega_1 t|$  (рис. 15-6).

Заданная кривая получается периодическим повторением полуволн синусоиды, для которой в предыдущем примере найдено изображение  $F_1(p)$ . По теореме запаздывания изображение «выпрямленной» синусоиды будет:

$$F(p) = F_1(p) (1 + e^{-pT/2} + e^{-pT} + \dots) = \frac{F_1(p)}{1 - e^{-pT/2}}.$$

Следовательно,

$$F(p) = \frac{\omega_1 (1 + e^{-p\pi/\omega_1})}{(p^2 + \omega_1^2) (1 - e^{-p\pi/\omega_1})} = \frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2} \operatorname{cth} \frac{p\pi}{2\omega_1}.$$

**Пример 15-4.** Найти изображение пилообразной функции по рис. 15-7, а.

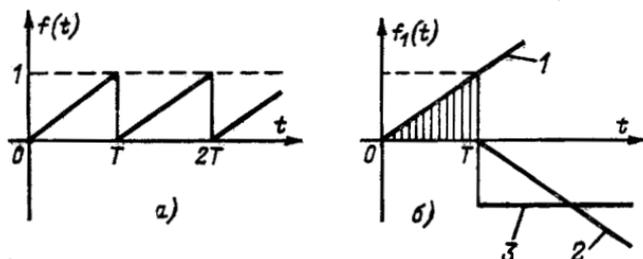


Рис. 15-7. Пример 15-4.

Заданная пилообразная кривая получается периодическим повторением кривой рис. 15-7, б. Последняя складывается из трех функций: прямолинейных 1 и 2 и единичной 3. Тангенсы углов наклона прямых равны соответственно  $1/T$  и  $-1/T$ .

По таблице приложения III и теореме запаздывания рассматриваемая кусочная функция  $f_1(t)$  имеет изображение

$$F_1(p) = \frac{1}{Tp^2} - \frac{e^{-pT}}{p} - \frac{e^{-pT}}{Tp^2}.$$

То же получится, если применить непосредственно формулу (15-1) и вычислить интеграл

$$F_1(p) = \int_0^T \frac{t}{T} e^{-pt} dt.$$

Изображение заданной функции  $f(t)$  находится сложением изображений одинаковых треугольников с учетом сдвига:

$$\begin{aligned} F(p) &= F_1(p) (1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \dots) = \frac{F_1(p)}{1 - e^{-pT}} = \\ &= \frac{1}{Tp^2} - \frac{e^{-pT}}{p(1 - e^{-pT})}. \end{aligned}$$

*Теорема смещения*

$$e^{\pm \lambda t} f(t) \doteq F(p \mp \lambda) \quad (15-12)$$

показывает, как изменяется изображение при умножении оригинала на показательную функцию. При этом следует иметь в виду, что число  $\lambda$  может быть как действительным, так и комплексным. Если  $F(p)$  определено при  $\operatorname{Re} p > c_0$ , то изображение (15-12) определено при  $\operatorname{Re} p > c_0 \pm \operatorname{Re} \lambda$ .

*Предельные соотношения*

Первое предельное соотношение согласно табл. 15-1

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) \quad (15-13)$$

дает возможность найти начальное значение функции  $f(t)$  при  $t=0$  непосредственно по изображению. Эта формула устанавливает существование равенства между двумя частными значениями: значением функции  $f(t)$  в начале координат (при подходе справа) и значением функции  $F(p)$  в бесконечно удаленной точке (в предположении, что  $p$  стремится к бесконечности внутри угла  $|\arg p| < \pi/2$ , т. е. в правой полуплоскости).

Второе предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) \quad (15-14)$$

дает возможность найти предел функции  $f(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  по значению функции  $F(p)$  в начале координат.

Эта формула имеет смысл только в том случае, когда предел функции  $f(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  существует.

Предельные соотношения (15-13) и (15-14) полезны для проверки вычислений с помощью преобразования Лапласа.

*Теорема умножения изображений* (теорема свертывания)

$$F_1(p)F_2(p) \doteq \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau) d\tau \quad (15-15)$$

устанавливает, что умножению в области комплексного переменного соответствует свертывание в области действительного переменного.

Если произведение представляет собой произведение более чем двух сомножителей, то теорема свертывания может быть применена к попарно сгруппированным сомножителям (в любом порядке).

Применение *интеграла Дюамеля*

$$\begin{aligned} pF_1(p)F_2(p) &\doteq f_1(0)f_2(t) + \int_0^t f_1'(\tau)f_2(t-\tau) d\tau = \\ &= f_1(t)f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau)f_2'(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (15-16)$$

облегчает вычисления по сравнению с формулой

$$pF_1(p)F_2(p) \doteq \frac{d}{dt} \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau) d\tau \quad (15-17)$$

в тех случаях, когда после дифференцирования функции  $f_1(\tau)$  или  $f_2(t-\tau)$  подынтегральное выражение упрощается и вычисление интеграла в результате этого облегчается. Следует иметь в виду, что функция  $f_2(t-\tau)$  в (15-16) дифференцируется по переменной  $t$ .

В § 15-11 будет специально рассмотрен метод расчета переходных процессов в электрических цепях с помощью интеграла Дюамеля.

### 15-5. НАХОЖДЕНИЕ ОРИГИНАЛА ПО ИЗОБРАЖЕНИЮ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Из теории функции комплексного переменного известно, что если функция  $F(p)$  аналитична в полуплоскости  $\text{Re } p > c_0$ , стремится к нулю при  $|p| \rightarrow \infty$  в любой полуплоскости  $\text{Re } p = c > c_0$  равномерно относительно аргумента  $p$  и интеграл  $\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) dp$  абсолютно сходится,



то  $F(p)$  является изображением функции

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} dp. \quad (15-18)$$

Эта формула, носящая название *обратного преобразования Лапласа*, представляет собой решение интегрального уравнения (15-1) относительно функции  $f(t)$ .

В литературе применяется также условная форма записи обратного преобразования Лапласа:

$$L^{-1}[F(p)] = f(t).$$

За путь интегрирования в (15-18) может быть принята любая бесконечная прямая, параллельная мнимой оси, расположенная на расстоянии  $c > c_0$  от последней (см. рис. 15-1), так чтобы все особые точки функции  $F(p)$  оставались левее пути интегрирования. Интеграл в (15-18) принимается в смысле главного значения<sup>1</sup>.

При практическом применении обратного преобразования Лапласа путь интегрирования вдоль прямой, параллельной оси мнимых величин, заменяется замкнутым контуром<sup>2</sup>, что дает возможность применить теорему о вычетах, согласно которой оригиналом  $F(p)$  служит функция

$$f(t) = \sum_{p_k} \text{Res } F(p) e^{pt} \quad (t > 0), \quad (15-19)$$

где сумма вычетов берется по всем особым точкам  $p_k$  функции  $F(p)$ .

При  $t < 0$  функция  $f(t)$  равна нулю.

Формула (15-19) позволяет вывести теорему разложения (см. § 15-6) применительно к мероморфной функции  $F(p)$ , т. е. когда особенности интегральной функции в конечной области — только полюсы.

#### 15-6. ТЕОРЕМА РАЗЛОЖЕНИЯ

Пусть изображение задано в виде правильной дроби  $F(p) = F_1(p)/F_2(p)$ , причем числитель и знаменатель не имеют общих корней. Положение полюсов функции  $F(p)$  определяется корнями уравнения

$$F_2(p) = 0. \quad (15-20)$$

<sup>1</sup> То есть как предел интеграла вдоль отрезка  $(c - j\omega, c + j\omega)$  при  $\omega \rightarrow \infty$ .

<sup>2</sup> Возможность такой замены основывается на лемме Жордана.



Обозначим  $n$  корней уравнения (15-20) через  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . При этом возможны два случая: а) все корни простые; б) некоторые или все корни кратные.

Рассмотрим эти случаи в отдельности.

### а) Случай простых корней

Из теории функций комплексного переменного известно, что вычет функции  $\varphi(p)/\psi(p)$  по полюсу первого порядка  $p = p_k$  равен:

$$\operatorname{Res}_{p_k} \frac{\varphi(p)}{\psi(p)} = \left[ (p - p_k) \frac{\varphi(p)}{\psi(p)} \right]_{p=p_k} = \frac{\varphi(p_k)}{\psi'(p_k)}. \quad (15-21)$$

Если, как в формуле (15-18), функция комплексного переменного  $p$  имеет вид  $\frac{F_1(p)}{F_2(p)} e^{pt}$ , причем все корни уравнения (15-20) простые (полюсы первого порядка), то на основании (15-19) и (15-21)

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \doteq \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k) e^{p_k t}}{\left[ \frac{F_2(p)}{p - p_k} \right]_{p=p_k}} = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k) e^{p_k t}}{F_2'(p_k)}. \quad (15-22)$$

Это общая форма теоремы разложения для случая простых корней. Выражение в квадратных скобках в знаменателе сначала надо сократить на множитель  $(p - p_k)$ , после чего произвести подстановку  $p = p_k$ .

В случае комплексных корней получаются два сопряженных слагаемых, сумма которых равна удвоенному значению действительной части (см. пример 15-11).

**Пример 15-5.** Пользуясь теоремой разложения (15-22), найти оригинал по изображению

$$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}.$$

В данном случае  $F_1(p) = 1$ ;  $F_2(p) = p(p+a)(p+b)$ .  
Корни уравнения  $F_2(p) = 0$  равны соответственно:

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -a, \quad p_3 = -b.$$

Следовательно, на основании (15-22)

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(p+a)(p+b)} & \doteq \frac{1}{ab} + \frac{e^{-at}}{(-a)(-a+b)} + \\ & + \frac{e^{bt}}{(-b)(-b+a)} = \frac{1}{ab} + \frac{ae^{-bt} - be^{-at}}{ab(b-a)}. \end{aligned}$$



## б) Случай кратных корней

Допустим, что корень  $p_k$  повторяется  $m$  раз. Из теории функций комплексного переменного известно, что если функция  $\frac{F_1(p)}{F_2(p)} e^{pt}$  имеет в точке  $p_k$  полюс порядка  $m$ , то вычет функции в этой точке равен:

$$\operatorname{Res}_{p_k} \frac{F_1(p)}{F_2(p)} e^{pt} = \frac{1}{(m-1)!} \left[ \frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}} \frac{F_1(p)}{F_2(p)} (p - p_k)^m e^{pt} \right]_{p=p_k}.$$

Как и в предыдущем случае, все операции производятся после сокращения на множитель  $(p - p_k)^m$ . Обозначив  $A(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} (p - p_k)^m$ , продифференцируем  $A(p) e^{pt}$  по  $pt - 1$  раз:

$$\frac{d}{dp} A(p) e^{pt} = e^{pt} [tA(p) + A'(p)];$$

$$\frac{d^2}{dp^2} A(p) e^{pt} = e^{pt} [t^2 A(p) + 2tA'(p) + A''(p)],$$

$$\dots$$

$$\frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}} A(p) e^{pt} = e^{pt} \left[ t^{m-1} A(p) + (m-1) t^{m-2} A'(p) + \dots + \frac{(m-1)(m-2)}{2!} t^{m-3} A''(p) + \dots + A^{(m-1)}(p) \right]^*.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{p_k} \frac{F_1(p)}{F_2(p)} e^{pt} &= \\ &= e^{p_k t} \left[ \frac{t^{m-1} A(p)}{(m-1)!} + \frac{t^{m-2} A'(p)}{(m-2)!} + \frac{t^{m-3} A''(p)}{(m-3)! 2!} + \dots + \frac{A^{(m-1)}(p)}{(m-1)!} \right]_{p=p_k} = \\ &= e^{p_k t} \sum_{i=1}^m \frac{t^{m-i} A^{(i-1)}(p_k)}{(m-i)! (i-1)!}. \end{aligned} \quad (15-23)$$

Формула (15-23) универсальна; она справедлива для любого корня. Здесь предполагается, что  $0! = 1$ . Поэтому если в (15-23) принять  $m = 1$ , то получится выражение

$$\frac{e^{p_k t} t^0 A^0(p_k)}{0! 0!} = \frac{F_1(p_k) e^{p_k t}}{\left[ \frac{F_2(p)}{p - p_k} \right]_{p=p_k}},$$

\* То же получается непосредственно при формуле Лейбница

$$(uv)^{(n)} = uv^{(n)} + nu'v^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2!} u^{(2)}v^{(n-2)} + \dots + u^{(n)}v.$$



соответствующее случаю простого корня  $p_k$ . Это в равной мере относится и к приведенной выше исходной формуле вычета функции в полюсе порядка  $m$ , которая при  $m = 1$  переходит в формулу (15-21).

Если уравнение (15-20) содержит несколько кратных корней, то формула (15-23) применяется поочередно для каждого корня, после чего полученные результаты суммируются.

Если имеются одновременно простые и кратные корни, то формулы (15-22) и (15-23) применяются раздельно соответственно для простых и кратных корней; затем производится суммирование.

15-6. Найти оригинал по изображению

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{p+2}{(p-1)^2 p^3}.$$

Заданная функция имеет полюс второго порядка  $p_1 = 1$  и полюс третьего порядка  $p_2 = 0$ . Применяв формулу (15-23) поочередно для случаев  $m = 2$  и  $m = 3$ , получим:

$$e^t \left[ t \frac{p+2}{p^3} + \frac{d}{dp} \frac{p+2}{p^3} \right]_{p=1} = (3t-8) e^t;$$

$$e^0 \left[ \frac{t^2}{2} \frac{p+2}{(p-1)^2} + t \frac{d}{dp} \frac{p+2}{(p-1)^2} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dp^2} \frac{p+2}{(p-1)^2} \right]_{p=0} = t^2 + 5t + 8.$$

Следовательно,

$$\frac{p+2}{(p-1)^2 p^3} = (3t-8) e^t + t^2 + 5t + 8.$$

Другой способ нахождения оригинала при наличии кратных корней, не требующий дифференцирования, заключается в том, что заданное дробное рациональное выражение раскладывается на простые дроби; для перехода от простых дробей к оригиналу используется соответствие

$$\frac{1}{(p-p_k)^i} \leftrightarrow \frac{1}{(i-1)!} t^{i-1} e^{p_k t}.$$

Разложение на простые дроби может быть произведено известным в математике методом неопределенных коэффициентов, который, однако, связан с решением системы уравнений, что практически не всегда удобно.

Если заданная рациональная дробь имеет  $m$ -кратный полюс  $p_k$ , то разложение на простые дроби может быть осуществлено непосредственным делением полиномов, расположенных по восходящим степеням  $p$ . Например, в рас-



смотренном выше примере в результате деления полиномов получаем

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{2+p}{p^3-2p^4+p^5} = \frac{2}{p^3} + \frac{5}{p^2} + \frac{8}{p} + \frac{11p^3-8p^4}{p^3-2p^4+p^5}.$$

Остаточный член в данном случае разлагается весьма просто:

$$\frac{8(p^3-p^4)+3p^3}{(p-1)^2 p^3} = -\frac{8}{p-1} + \frac{3}{(p-1)^2}.$$

Если имеется  $m$ -кратный полюс  $p_k$ , отличный от нуля, то после замены  $p - p_k = z$  производится деление полиномов, расположенных по восходящим степеням  $z$ .

Пусть, например,

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{p^3}{(p+2)^4(p+1)};$$

здесь  $p_k = -2$  — полюс кратности 4.

Обозначив  $p + 2 = z$  и соответственно  $p = z - 2$ ;  $p + 1 = z - 1$ , получим:

$$\frac{(z-2)^3}{z^4(z-1)} = \frac{-8+12z-6z^2+z^3}{-z^4+z^5} = \frac{8}{z^4} - \frac{4}{z^2} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}.$$

Следовательно,

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{8}{(p+2)^4} - \frac{4}{(p+2)^2} + \frac{2}{(p+2)^2} + \frac{1}{p+2} - \frac{1}{p+1}.$$

В заключение отметим, что для разложения  $F_1(p)/F_2(p)$  на простые дроби при наличии  $m$ -кратного полюса  $p_k$  можно пользоваться формулой

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{i=1}^m \frac{K_i}{(p-p_k)^i},$$

где

$$K_i = \frac{1}{(m-i)!} A^{(m-i)}(p_k).$$

Данное разложение приводит к формуле (15-23).

## 15-7. ТАБЛИЦЫ ОРИГИНАЛА И ИЗОБРАЖЕНИЙ

Теорема разложения для случаев простых и кратных корней (см. § 15-6) в сочетании с другими свойствами преобразования Лапласа (см. § 15-4) дает возможность составить *таблицы оригиналов и изображений*, весьма облегчающие и ускоряющие расчеты переходных процессов. Такие таблицы широко применяются на практике.



Наиболее полные таблицы приводятся в справочниках по операционному исчислению и специальных трудах, посвященных преобразованию Лапласа. При практическом пользовании той или иной таблицей во избежание возможных недоразумений надлежит в первую очередь проверить форму записи изображения: дается ли изображение по Лапласу или по Карсону. Если изображение дается по Карсону, то в соответствии с § 15-2 его надлежит разделить на  $p$  для получения изображения по Лапласу.

В ряде типовых примеров, разобранных в предыдущих параграфах, были приведены оригиналы и изображения по Лапласу. Эти пары функций, а также некоторые другие, встречающиеся на практике, помещены в сводной таблице в приложении IV (в конце книги).

Возможность пользования таблицами оригиналов и изображений наряду с теоремами и различными свойствами преобразования Лапласа представляет большое удобство. Поэтому преобразование Лапласа широко применяется на практике для расчета переходных процессов в линейных электрических цепях. К этому следует добавить, что изображения по Лапласу, приводимые в таблицах, непосредственно связаны с гармоническим анализом непериодических функций (см. гл. 16), что делает этот метод еще более универсальным.

#### 15-8. ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА К РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Рассмотрим цепь с нулевыми начальными условиями, показанную на рис. 15-8. Допустим, что в момент времени  $t = 0$  участок  $r, L, C$  подключается к источнику э. д. с.  $e(t)$ . Требуется найти изображение тока на этом участке.

По второму закону Кирхгофа для  $t \geq 0$  имеем:

$$e = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0); \quad (15-24)$$

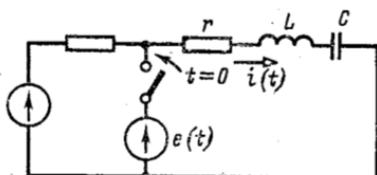


Рис. 15-8. Включение источника э. д. с. в цепь с ненулевыми условиями.

здесь  $u_C(0)$  — начальное напряжение на емкости, обусловленное электрическим зарядом емкости в момент коммутации.

Будем рассматривать  $e(t)$ ,  $u_C(0)$  и  $i(t)$  как функции-оригиналы, имеющие изображения  $E(p)$ ,  $u_C(0)/p$  и  $I(p)$ .

На основании свойства линейности преобразования Лапласа и теорем дифференцирования и интегрирования исходному уравнению (15-24) соответствует следующее уравнение для изображений:

$$E(p) = rI(p) + pLI(p) - Li(0) + \frac{I(p)}{pC} + \frac{u_C(0)}{p}; \quad (15-25)$$

здесь  $i(0)$  — начальный ток в индуктивности.

Благодаря тому, что операция дифференцирования и интегрирования оригинала соответствует операции умножения и деления изображения на  $p$ , уравнение для изображений получается алгебраическим, т. е. более простым, чем исходное интегродифференциальное уравнение. Его решение относительно  $I(p)$  дает:

$$I(p) = \frac{E(p) - \frac{u_C(0)}{p} + Li(0)}{r + pL + \frac{1}{pC}}. \quad (15-26)$$

Далее после преобразований получим:

$$I(p) = \frac{1}{L} \frac{pE(p) + pLi(0) - u_C(0)}{p^2 + \frac{r}{L}p + \frac{1}{LC}}. \quad (15-26a)$$

Искомая функция  $i(t)$  (оригинал) находится по изображению (15-26a) одним из указанных выше способов, а именно: с помощью теоремы разложения (или других правил) или по готовым таблицам.

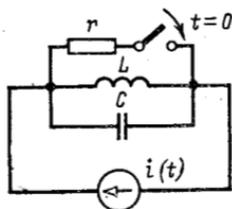


Рис. 15-9. Включение ветви в цепь с источником тока.

Для схемы, показанной на рис. 15-9, уравнение записывается по первому закону Кирхгофа (при  $t > 0$ , т. е. после подключения сопротивления  $r$ ):

$$i = \frac{1}{r} u + C \frac{du}{dt} + \frac{1}{L} \int_0^t u dt + i_L(0),$$

где  $i$  — ток источника тока;  $u(t)$  — напряжение между узлами;  $i_L(0)$  — ток в индуктивности при  $t = 0$ .

Полагая  $i(t) \doteq I(p)$  и  $u(t) \doteq U(p)$ , находим:

$$I(p) = \frac{U(p)}{r} + pCU(p) - Cu(0) + \frac{U(p)}{pL} + \frac{i_L(0)}{p}; \quad (15-27)$$

здесь  $u(0)$  — начальное напряжение между узлами, равное напряжению на емкости.

После преобразований получается изображение искомого напряжения

$$U(p) = \frac{1}{C} \frac{pI(p) + pCu(0) - i_L(0)}{p^2 + p\frac{1}{rC} + \frac{1}{LC}},$$

для которого указанными выше способами находится оригинал  $u(t)$ .

При нулевых начальных условиях, т. е. при включении источников в пассивные цепи, выражения (15-26) и (15-27) упрощаются, а именно:

$$I(p) = \frac{E(p)}{r + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{E(p)}{Z(p)}$$

и

$$I(p) = \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{pL} + pC \right) U(p) = Y(p) U(p).$$

Здесь  $Z(p)$  и  $Y(p)$  представляют собой сопротивление и проводимость соответствующих цепей при комплексной частоте  $p = \sigma + j\omega$ . Это те же сопротивление и проводимость, которые уже встречались в гл. 14. Они называются операторными сопротивлением и проводимостью.

В общем случае порядок решения задачи следующий:

1) записываются интегродифференциальные уравнения Кирхгофа для цепи, в которой исследуется переходный процесс;

2) записываются те же уравнения для изображений с учетом независимых начальных условий;

3) уравнения для изображений решаются алгебраически относительно изображения искомой функции;

4) на основе полученного изображения находится оригинал искомой функции.

При достаточном навыке или если схемы относительно просты, уравнения для изображений записываются непосредственно, без предварительного составления интегродифференциальных уравнений (см. примеры 15-8, 15-11 и др.).

В случае сложной схемы также можно обойтись без записи интегродифференциальных уравнений, если предварительно нарисовать эквивалентную схему для изобра-



жений. Как видно из предыдущих рассуждений такая схема отличается от схемы цепи для установившегося синусоидального режима тем, что комплексные величины  $j\omega L$  и  $j\omega C$  заменяются соответственно  $pL$  и  $pC$  и вместо комплексных функций времени вводятся их лапласовы изображения. Кроме того, при ненулевых начальных условиях в схему для изображений последовательно с индуктивностью включается дополнительный источник э. д. с., равной  $Li_L(0)$  (рис. 15-10, а), а последовательно с ем-

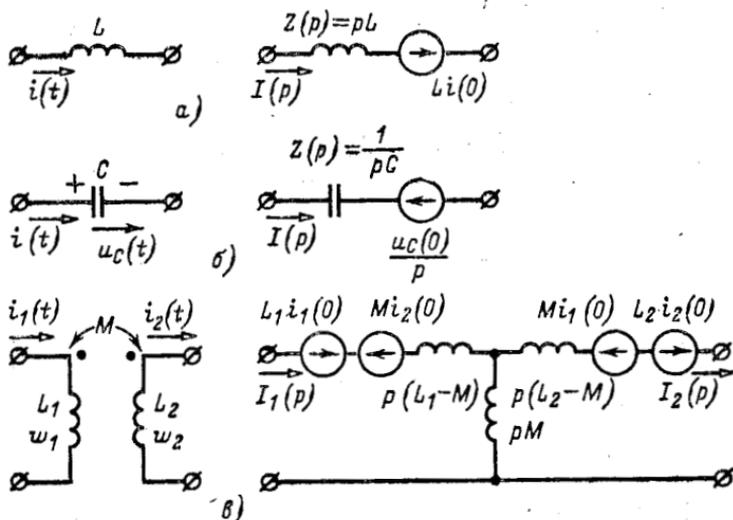


Рис. 15-10. Схемы замещения элементов для изображений.

костью — дополнительный источник с э. д. с., равной  $u_C(0)/p$  (рис. 15-10, б).

В случае индуктивной связи между двумя элементами соответствующая схема замещения представлена рис. 15-10, в. При коэффициенте связи  $k = 1$  имеют место соотношения:

$$L_1 = \frac{\omega_1}{\omega_2} M; \quad L_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1} M$$

и

$$i_1(0) \omega_1 = i_2(0) \omega_2;$$

поэтому в этом случае в схеме замещения э. д. с. дополнительных источников взаимно уничтожаются.



После введения дополнительных источников записываются уравнения Кирхгофа непосредственно для изображений; структура этих уравнений аналогична структуре уравнений для установившегося синусоидального режима. Сказанное проиллюстрировано в примере 15-7.

Если воздействующая функция, например э. д. с. источника, синусоидальна, то переходный процесс можно рассчитывать в действительной или комплексной форме. При комплексной форме расчета начальные значения токов в индуктивностях и напряжений на емкостях учитываются в виде комплексных амплитуд и уравнения записываются для изображений комплексных функций токов и напряжений. Искомые функции времени определяются мнимой частью найденных комплексных оригиналов (подробнее см. пример 15-10). Любая из указанных здесь форм решения уравнений для изображений приводит в конечном итоге к необходимости нахождения оригинала по теореме разложения или таблице; оригинал получим в виде суммы установившейся и свободной составляющих.

Вычисления во многих случаях могут быть облегчены, если предварительно рассчитать установившийся режим и определить по формулам (14-8) начальные значения свободных токов в индуктивностях  $i_{L_{св}}(0)$  и свободных напряжений на емкостях  $u_{C_{св}}(0)$ . Используя эти значения как начальные условия в уравнениях для свободного режима или соответствующих эквивалентных схемах замещения с дополнительными источниками, но без основных источников, можно получить изображение свободного тока. Оно будет иметь более простой вид, чем изображение полного тока. Соответственно облегчится и нахождение оригинала по изображению. Полный ток определится как сумма установившегося тока, найденного отдельно, и оригинала свободного тока (см. пример 15-11).

Такой метод расчета целесообразен в том случае, когда установившийся ток, входящий в состав полного тока, значительно усложняет лапласово изображение для полного тока и тем затрудняет нахождение оригинала.

**Пример 15-7.** Составить уравнения для изображений контурных токов схемы на рис. 15-11, а после замыкания контакта. Начальные значения тока в индуктивности  $L$  и напряжения на емкости  $C$  обозначим через  $i_1(0)$  и  $i_C(0)$ , приняв положительное направление напряжения на емкости в направлении тока  $i_1$ . Уравнения по второму закону Кирх-

гофа для  $t \geq 0$  запишутся так:

$$E_m \sin(\omega_1 t + \psi) = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + r_2 (i_1 - i_2) + \frac{1}{C} \int_0^t (i_1 - i_2) dt + u_C(0);$$

$$0 = r_3 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + r_2 (i_2 - i_1) + \frac{1}{C} \int_0^t (i_2 - i_1) dt - u_C(0).$$

Соответствующие уравнения для изображений, если обозначить

$$I_1(p) = I_1 \hat{=} i_1(t) \quad \text{и} \quad I_2(p) = I_2 \hat{=} i_2(t),$$

примут вид:

$$E_m \frac{p \sin \psi + \omega_1 \cos \psi}{p^2 + \omega_1^2} = \left( r_1 + r_2 + pL_1 + \frac{1}{pC} \right) I_1 - \left( r_2 + \frac{1}{pC} \right) I_2 + \frac{u_C(0)}{p} - L_1 i_1(0);$$

$$0 = \left( r_2 + r_3 + pL_2 + \frac{1}{pC} \right) I_2 - \left( r_2 + \frac{1}{pC} \right) I_1 - \frac{u_C(0)}{p}.$$

Те же самые уравнения получаются и на основании эквивалентной схемы на рис. 15-11, б, составленной для изображений.

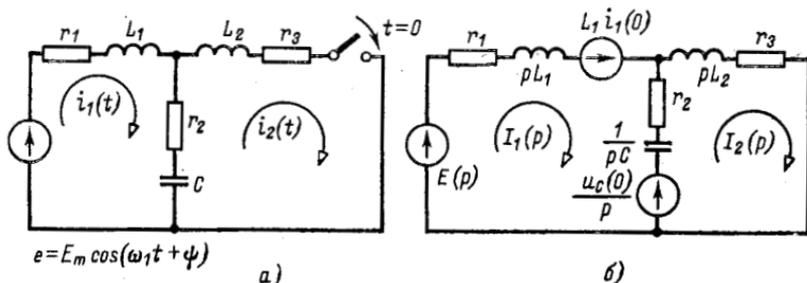


Рис. 15-11. Пример 15-7.

**Пример 15-8.** Найти токи в схеме на рис. 15-12 после замыкания контакта.

Начальные значения тока в индуктивности и напряжения на емкости равны соответственно:

$$i_L(0) = \frac{E}{r_1 + r_2} \quad \text{и} \quad u_C(0) = \frac{r_2}{r_1 + r_2} E.$$

На основании расчетной схемы можно непосредственно написать уравнения по второму закону Кирхгофа для изображений:

$$\frac{E}{p} + L i_L(0) = (r_2 + pL) I_2;$$

$$\frac{E}{p} - \frac{u_C(0)}{p} = \left( r_3 + \frac{1}{pC} \right) I_3,$$

откуда

$$I_2 = \frac{E + Li_L(0)p}{p(r_2 + pL)} = \frac{\frac{E}{L} + i_L(0)p}{p\left(p + \frac{r_2}{L}\right)}$$

и

$$I_3 = \frac{E - u_C(0)}{r_3\left(p + \frac{1}{r_3C}\right)}$$

Переходя к оригиналам, по формуле (15-22) находим:

$$i_2(t) = \frac{E}{r_2} \left(1 - e^{-\frac{r_2}{L}t}\right) + i_L(0) e^{-\frac{r_2}{L}t};$$

$$i_3(t) = \frac{E - u_C(0)}{r_3} e^{-\frac{1}{r_3C}t};$$

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t).$$

**Пример 15-9.** Определить ток в контуре цепи на рис. 15-13 после размыкания контакта, если до размыкания в цепи был установившийся постоянный ток.

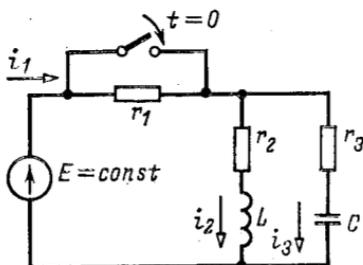


Рис. 15-12. Пример 15-8.

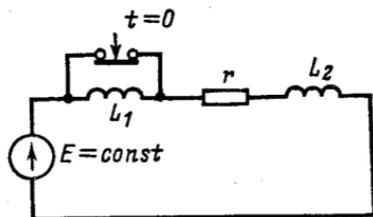


Рис. 15-13. Пример 15-9.

В задаче пренебрегают временем горения дуги на контакте; считается, что токи в индуктивностях  $L_1$  и  $L_2$  уравниваются мгновенно. В § 14-2 указывалось, что решение такого рода задач основано на принципе непрерывности суммарного потокосцепления до и после коммутации.

Дифференциальное уравнение для заданной цепи запишется так:

$$E = ri + L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt}.$$

При  $t = 0$  токи в индуктивностях были  $i_1(0-) = 0$  и  $i_2(0-) = E/r$ .

Начальным условием для процесса после разрыва дуги будет:

$$L_2 i_2(0-) = (L_1 + L_2) i(0),$$

откуда

$$i(0) = \frac{i_2(0-)L_2}{L_1 + L_2}.$$

Переходя к изображениям, напишем:

$$\frac{E}{p} = rI(p) + (L_1 + L_2)pI(p) - (L_1 + L_2)i(0);$$

откуда

$$I(p) = \frac{\frac{E}{p} + L_2 i_2(0-)}{r + 2(L_1 + L_2)p} = \frac{E + \frac{EL_2}{r}p}{(L_1 + L_2)\left(p + \frac{r}{L_1 + L_2}\right)p}.$$

По формуле (15-22) найдем оригинал:

$$i(t) = \frac{E}{r} \left( 1 - \frac{L_1}{L_1 + L_2} e^{-\frac{r}{L_1 + L_2} t} \right).$$

**Пример 15-10.** В момент  $t = 0$  цепь, состоящая из последовательно соединенных  $r$  и  $L$ , присоединяется к источнику синусоидальной э. д. с.  $e(t) = E_m \sin(\omega_1 t + \psi)$ .

Определить ток  $i(t)$ , пользуясь комплексной формой расчета переходного процесса.

При  $t \geq 0$

$$E_m e^{j(\omega_1 t + \psi)} = rI(j\omega) + L \frac{dI(j\omega)}{dt}.$$

Переходя к изображениям, приняв  $I(j\omega) \doteq I(p)$ , получаем:

$$E_m e^{j\psi} \frac{1}{p - j\omega_1} = rI(p) + pLI(p).$$

откуда

$$I(p) = \frac{E_m e^{j\psi}}{(p - j\omega_1)(r + pL)}.$$

Оригинал находим по формуле (15-22):

$$I(j\omega) = \frac{E_m e^{j(\omega_1 t + \psi)}}{r + j\omega_1 L} - \frac{E_m e^{j\psi}}{r + j\omega_1 L} e^{-\frac{r}{L} t}.$$

Искомый ток определяется мнимой частью этого выражения, т. е.

$$i(t) = \frac{E_m \sin(\omega_1 t + \psi - \varphi)}{\sqrt{r^2 + (\omega_1 L)^2}} - \frac{E_m \sin(\psi - \varphi)}{\sqrt{r^2 + (\omega_1 L)^2}} e^{-\frac{r}{L} t},$$

где

$$\varphi = \arctg \frac{\omega_1 L}{r}.$$

**Пример 15-11.** Найти методом отделения свободного тока от установившегося ток в цепи на рис. 15-14 после замыкания контакта.



Дано:  $E_m = 10$  В;  $\omega_1 = 400$  рад/с;  $r_1 = 10$  Ом;  $r_2 = 5$  Ом;  $L = 0,1$  Г;  $C = 100$  мкФ.

Обычным методом расчета установившегося синусоидального режима легко найти до коммутации ток и напряжение  $u_C$ :

$$i = 0,472 \sin(400t - \pi/4) \text{ А};$$

$$u_C = -11,8 \cos(400t - \pi/4) \text{ В}.$$

Отсюда находятся начальные условия:

$$i(0) = i(0-) = -0,332 \text{ А};$$

$$u_C(0) = u_C(0-) = -8,34 \text{ В}.$$

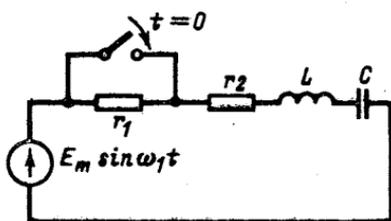


Рис. 15-14. Пример 15-11,

Аналогичным расчетом после коммутации находятся те же установившиеся значения:

$$i_y(t) = 0,633 \sin(400t - 71^\circ 30') \text{ А}$$

и

$$u_{C_y}(t) = -15,8 \cos(400t - 71^\circ 30') \text{ В},$$

что для  $t = 0$  дает:

$$i_y(0) = -0,6 \text{ А и } u_{C_y}(0) = -5 \text{ В}.$$

Согласно (14-8) начальные независимые значения свободных составляющих будут:

$$i_{св}(0) = -0,332 + 0,6 = 0,268 \text{ А};$$

$$i_{C_{св}}(0) = -8,34 + 5 = -3,34 \text{ В}.$$

Изображение свободного тока для такой цепи имеет вид:

$$\begin{aligned} I_{св}(p) &= \frac{Li_{св}(0) - \frac{u_{C_{св}}(0)}{p}}{r_2 + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{0,1 \cdot 0,268 - \frac{-3,34}{p}}{5 + p0,1 + \frac{10^6}{p \cdot 100}} = \\ &= \frac{0,268p + 33,4}{p^2 + 50p + 10^6} = \frac{0,268p + 33,4}{(p - p_1)(p - p_2)}; \end{aligned}$$

здесь  $p_{1,2} = -25 \pm j315$ .

По формуле (15-22) находим оригинал:

$$\begin{aligned} i_{св}(t) &= \frac{0,268(-25 + j315) + 33,4}{2 \cdot j315} e^{p_1 t} + \\ &+ \frac{0,268(-25 - j315) + 33,4}{-2 \cdot j315} e^{p_2 t} = \\ &= 2\text{Re} [0,141e^{-j17^\circ 30'} e^{-25t} e^{j315t}] = 0,282e^{-25t} \cos(315t - 17^\circ 30') \text{ А}. \end{aligned}$$

Как видно, оригинал свободного тока найти достаточно просто.

**Пример 15-12.** Найти ток в контуре  $rC$  в случае включения в него источника э. д. с. треугольной формы (рис. 15-15).

Начальные условия нулевые.

Функцию  $e(t)$  можно представить в виде суммы трех прямолинейных функций, изображенных на рис. 15-15, а. Тангенсы углов наклона первой и третьей прямой равны  $1/T$ , а второй прямой ( $-2/T$ ). Используя теорему запаздывания для функции  $e(t)$ , получаем изображение

$$E(p) = \frac{1}{Tp^2} - \frac{2}{Tp^2} e^{-pT} + \frac{1}{Tp^2} e^{-2pT}.$$

Тот же результат получится, если применить непосредственно формулу (15-1) и произвести интегрирование.

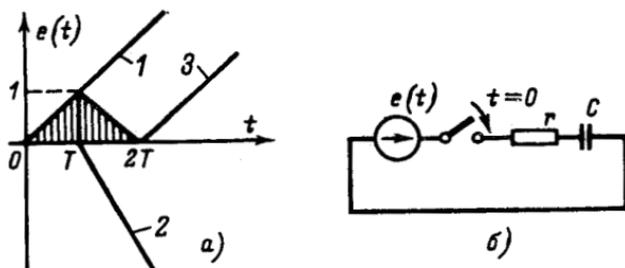


Рис. 15-15. Пример 15-12.

Изображение искомого тока будет:

$$I(p) = \frac{E(p)}{r + \frac{1}{pC}};$$

первое слагаемое э. д. с. даст:

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{1}{Tp^2 \left( r + \frac{1}{pC} \right)} = \frac{1}{rTp \left( p + \frac{1}{rC} \right)} \doteq \\ &\doteq \frac{rC}{rT} e^0 + \frac{1}{rT \left( -\frac{1}{rC} \right)} e^{-\frac{t}{rC}} = \frac{C}{T} - \\ &- \frac{C}{T} e^{-\frac{t}{rC}} = \frac{C}{T} \left( 1 - e^{-\frac{t}{rC}} \right) = i_1(t). \end{aligned}$$

Второе и третье слагаемые имеют тот же вид, но запаздывают относительно первого соответственно на  $T$  и  $2T$  (второе слагаемое учитывается при  $t > T$ , третье — при  $t > 2T$ ). Поэтому при  $t > 2T$

$$i(t) = i_1(t) - 2i_1(t-T) + i_1(t-2T).$$

### 15-9. УЧЕТ НЕНУЛЕВЫХ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ МЕТОДОМ ЭКВИВАЛЕНТНОГО ИСТОЧНИКА

Если в электрической цепи при ненулевых начальных условиях (т. е. при наличии токов в индуктивностях или напряжений на емкостях) происходит замыкание или

размыкание какой-либо ветви, то переходный процесс, вызываемый изменением схемы, может быть рассчитан *методом эквивалентного источника*. В случае замыкания ветви удобно применять теорему об эквивалентном источнике э. д. с., а в случае размыкания — теорему об эквивалентном источнике тока (см. гл. 7).

На рис. 15-16, а показан случай замыкания ветви электрической цепи в момент  $t = 0$ . Так же как в § 7-9, буква А означает активную, а буква П — пассивную цепь;  $u_x(t)$  — напряжение, существовавшее до момента замыкания ветви, условно продолженное на время  $t > 0$ .

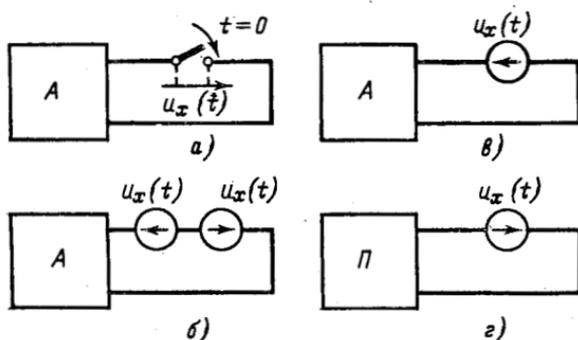


Рис. 15-16. Замыкание ветви электрической цепи.

Режим электрической цепи при  $t > 0$  мог быть как установившимся, так и переходным. Ход рассуждений в обоих случаях остается одним и тем же. Включив в замкнутую ветвь две э. д. с., равные  $u_x(t)$  и противоположно направленные (рис. 15-16, б), и пользуясь методом наложения, приходим к двум схемам на рис. 15-16, в и г, в первой из которых токи те же, что и в первоначальной схеме.

Таким образом, *переходный процесс при замыкании ветви находится в результате наложения токов предшествующего режима (при разомкнутой ветви), условно продолженного на время  $t > 0$ , на токи, получаемые в результате включения в пассивную цепь источника э. д. с.  $u_x(t)$* . При этом если при  $t < 0$  режим был установившимся, то напряжение  $u_x(t)$  может быть как постоянным, так и переменным (синусоидальным).

При  $u_x(t) = U = \text{const}$  в расчет вводится изображение  $U_x(p) = U/p$ , а при синусоидальном напряжении

$u_x(t)$ , записанном в комплексной форме  $U_m e^{j(\omega_1 t + \psi)}$ , в расчет вводится изображение  $U_m e^{j\psi} \frac{1}{p - j\omega_1}$ .

Ток в замыкаемой ветви находится по изображению

$$I(p) = \frac{U_x(p)}{Z(p)}, \quad (15-28)$$

где  $Z(p)$  — операторное сопротивление всей пассивной цепи, рассматриваемой со стороны места замыкания. Применительно к схеме на рис. 15-16 оно равно входному операторному сопротивлению пассивного двухполюсника.

Рассмотрим для иллюстрации изложенного метода один простейший пример.

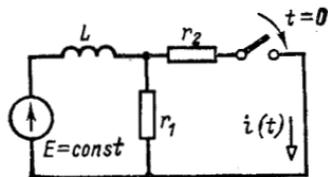


Рис. 15-17. Пример 15-13.

**Пример 15-13.** Найти ток  $i(t)$  в ветви с сопротивлением  $r_2$ , замыкаемой при  $t = 0$  (рис. 15-17).

Напряжение на разомкнутых контактах равно  $E$ . Следовательно, изображение  $U_x(p)$  равно  $E/p$ . Входное операторное сопротивление пассивной цепи, рассматриваемой со стороны замыкающего контакта,

$$Z(p) = r_2 + \frac{r_1 p L}{r_1 + p L}.$$

Следовательно, на основании (15-28)

$$I(p) = \frac{E}{p \left( r_2 + \frac{r_1 p L}{r_1 + p L} \right)} = \frac{E (r_1 + p L)}{p [r_1 r_2 + (r_1 + r_2) p L]}.$$

Переходим к оригиналу:

$$i(t) = \frac{E}{r_2} - \frac{r_1 E}{r_2 (r_1 + r_2)} e^{-\frac{r_1 r_2}{(r_1 + r_2) L} t}.$$

На рис. 15-18 показан случай *размыкания ветви* электрической цепи в момент  $t = 0$ . Здесь  $i_k(t)$  — ток, существовавший до момента размыкания ветви, условно продолженный на время  $t > 0$ .

Включив параллельно в месте размыкания два источника тока  $i_k(t)$ , действующие в противоположных направлениях (рис. 15-18, б), и пользуясь принципом наложения, приходим к двум схемам (в и г). В первой схеме токи те же, что и в первоначальной схеме а.

Таким образом, *переходный процесс при размыкании ветви находится в результате наложения токов предшествующего режима (при замкнутой ветви), условно продолжен-*

ного на время  $t > 0$ , на распределение токов, получаемое в результате включения в пассивную цепь источника тока  $i_k(t)$ .

Напряжения в исследуемом переходном режиме также находятся методом наложения, т. е. алгебраическим сложением напряжений на одинаковых участках цепи на рис. 15-18, а и г.

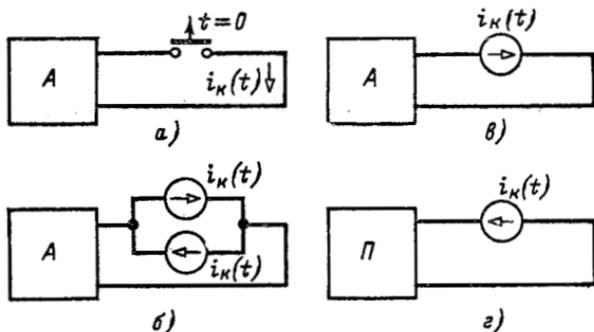


Рис. 15-18. Размыкание ветви электрической цепи.

Ток  $i_k(t)$  заменяется изображением  $I_k(p)$ , и напряжение в месте размыкания определяется по изображению

$$U(p) = Z(p) I_k(p); \quad (15-29)$$

здесь  $Z(p)$  — входное операторное сопротивление пассивного двухполюсника (схема г).

Если исследуемый переходный процесс вызывается изменением схемы электрической цепи не при  $t = 0$ , а при  $t = t_1$ , то заменой переменной  $t' = t - t_1$  начало отсчета времени переносится в  $t_1$  (см. примеры 15-14 и 15-15).

**Пример 15-14.** [Л. 5]. В схеме на рис. 15-19 при  $t = 0$  замыкается контакт  $K_1$ , а при  $t = t_1$  — контакт  $K_2$ . Требуется определить ток в цепи контакта  $K_2$  методом эквивалентного источника.

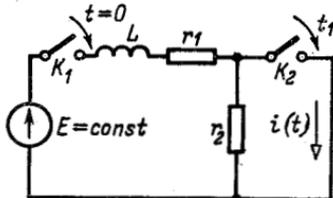


Рис. 15-19. Пример 15-14.

При  $t < t_1$ , т. е. до замыкания контакта  $K_2$ , напряжение на нем определяется напряжением на сопротивлении  $r_2$ :

$$u_x(t) = \frac{Er_2}{r_1 + r_2} (1 - e^{-at}),$$

где

$$a = \frac{r_1 + r_2}{L}.$$

Произведем замену переменной:  $t = t_1 + t'$ , Следовательно,

$$u_x(t') \doteq \frac{Er_2}{(r_1+r_2)} (1 - e^{-at'} e^{-at_1}).$$

Пусть  $u_x(t') \doteq U_x(p)$ , т. е.

$$U_x(p) = \frac{Er_2}{r_1+r_2} \left( \frac{1}{p} - \frac{e^{-at_1}}{p+a} \right) = \frac{Er_2 [a+p(1-e^{-at_1})]}{(r_1+r_2)p(p+a)}.$$

Изображение искомого тока находится по формуле (15-28):

$$I(p) = U_x(p)/Z(p),$$

где

$$Z(p) = \frac{r_2(r_1+pL)}{r_1+r_2+pL}.$$

Подставляя выражения  $U_x(p)$  и  $Z(p)$  в выражение для  $I(p)$ , получаем:

$$I(p) = \frac{E [a+p(1-e^{-at_1})]}{(r_1+r_2)(p+b)p};$$

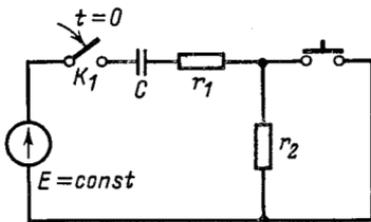
здесь

$$b = r_1/L.$$

Переходя к оригиналу, находим:

$$i(t') = \frac{E}{r_1} - E \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1-e^{-at_1}}{r_1+r_2} \right) e^{-bt'} \quad (t' > 0).$$

**Пример 15-15** [Л. 5]. В схеме на рис. 15-20 при  $t = 0$  замыкается контакт  $K_1$ , а при  $t = t_1$  размыкается кнопка. Требуется определить напряжения на выводах кнопки после ее замыкания.



При  $t = t_1$ , т. е. до размыкания кнопки, проходящий через нее ток равен:

$$i_k(t) = \frac{E}{r_1} e^{-at},$$

где

$$a = 1/r_1 C.$$

Рис. 15-20. Пример 15-15.

Производим замену переменной:  $t = t' + t_1$ . Следовательно,

$$i_k(t') = \frac{E}{r_1} e^{-at_1} e^{-at'}.$$

Полагая  $i_k(t') \doteq I_k(p)$ , имеем:

$$I_k(p) = \frac{E}{r_1} e^{-at_1} \frac{1}{p+a}.$$

Обозначим через  $Z(p)$  входное операторное сопротивление пассивной цепи, рассматриваемой со стороны выводов кнопки:

$$Z(p) = \frac{r_2 \left( r_1 + \frac{1}{pC} \right)}{r_1 + r_2 + \frac{1}{pC}} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \frac{p+a}{p+b},$$

где

$$b = \frac{1}{(r_1 + r_2)C}.$$

Изображение искомого напряжения на выводах кнопки находится по формуле (15-29):

$$U(p) = Z(p) I_k(p) = \frac{Er_2(p+a)e^{-at_1}}{(r_1+r_2)(p+b)(p+a)} = \frac{Er_2 e^{-at_1}}{(r_1+r_2)(p+b)}.$$

Оригинал искомой функции

$$u(t') = \frac{Er_2}{r_1+r_2} e^{-(at_1+bt')} \quad (t' > 0).$$

## 15-10. ФОРМУЛЫ ВКЛЮЧЕНИЯ

Как было показано выше, включение источника э. д. с. в пассивную (без энергии) электрическую цепь вызывает ток

$$I(p) = E(p)/Z(p).$$

Операторное сопротивление  $Z(p)$  может представлять собой либо входное сопротивление [в этом случае  $I(p)$  является входным током], либо величину, обратную передаточной проводимости.

Если включаемая э. д. с. задана в виде экспоненциальной функции  $Ee^{qt}$ , то

$$E(p) = \frac{E}{p-q}$$

и соответственно

$$I(p) = \frac{E}{(p-q)Z(p)}.$$

Применяя теорему разложения (15-22), получаем формулу включения для экспоненциальной э. д. с.<sup>1</sup>

$$I(p) = i(t) = \frac{Ee^{qt}}{Z(q)} + \sum_{k=1}^n \frac{Ee^{pk}t}{(p_k - q)Z'(p_k)}. \quad (15-30)$$

Первое слагаемое представляет собой установившийся ток; сумма остальных слагаемых образует свободный ток.

Наиболее распространенными на практике случаями являются случаи включения источников постоянной или синусоидальной э. д. с.

<sup>1</sup> Здесь по аналогии с § 14-7 предполагается, что уравнение  $Z(p) = 0$  имеет  $n$  корней.



При включении источника постоянной э. д. с. ( $q = 0$ ) формула (15-30) принимает вид:

$$i(t) = \frac{E}{Z(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{E e^{p_k t}}{p_k Z'(p_k)}. \quad (15-31)$$

В случае включения источника синусоидальной э. д. с. (в комплексной форме)  $q = j\omega_1$ , причем вместо  $E$  должна быть введена комплексная амплитуда  $E_m e^{j\omega_1 t}$ :

$$I(t) = \frac{E_m e^{j(\omega_1 t + \psi)}}{Z(j\omega_1)} + \sum_{k=1}^n \frac{E_m e^{j\psi} e^{p_k t}}{(p_k - j\omega_1) Z'(p_k)}. \quad (15-32)$$

Нетрудно убедиться в том, что формулы включения (15-30) — (15-32) остаются справедливыми и в том случае, когда  $Z(p)$  представляет собой дробную функцию вида  $Z(p) = A(p)/B(p)$ , однако при этом удобнее пользоваться теоремами разложения (15-22) и (15-23).

#### 15-11. РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛ НАЛОЖЕНИЯ

Если пассивную электрическую цепь (без запаса энергии), имеющую операторное сопротивление  $Z(p)$ , присоединить к источнику э. д. с.  $e(t) \doteq E(p)$ , то возникнет ток  $i(t) \doteq I(p) = E(p)/Z(p)$ . Изображение искомого тока равно произведению двух функций:  $1/Z(p)$  и  $E(p)$ .

Рассматривая функцию  $1/Z(p)$  как изображение, соответствующее некоторому оригиналу  $y_3(t)$ , можно воспользоваться формулой (15-15) умножения изображений (теоремой свертывания). В результате получим:

$$i(t) = \int_0^t e(\tau) y_3(t - \tau) d\tau = \int_0^t e(t - \tau) y_3(\tau) d\tau. \quad (15-33)$$

Выражение  $1/Z(p)$  может трактоваться как изображение тока, возникающего в данной цепи под воздействием э. д. с., изображение которой равно единице. Функция, изображение которой равно единице, представляет собой предел прямоугольного импульса длительностью  $\tau$  и высотой  $1/\tau$  при  $\tau \rightarrow 0$ . Действительно прямоугольный импульс на рис. 15-21, а, заштрихованная площадь которого равна единице, может быть представлен как разность двух функций (рис. 15-21, б и в), имеющих изображения  $1/\tau p$  и  $e^{-p\tau}/\tau p$ . Следовательно, изображение прямоугольного импульса равно  $\frac{1}{\tau p} (1 - e^{-p\tau})$ . При  $\tau \rightarrow 0$  данное выражение принимает



неопределенный вид  $0/0$ . Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталья, находим:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau p} (1 - e^{-p\tau}) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{pe^{-p\tau}}{p} = 1.$$

Хотя физически этот предел нереализуем, однако на основании сказанного выше условно считается, что функция, изображение которой равно единице, означает бесконечно большой импульс бесконечно малой продолжительности; площадь, ограниченная импульсом, равна единице. Такая функция называется импульсной функцией и обозначается  $\delta(t)$ .

Итак, оригинал  $y_{\delta}(t)$  представляет собой не что иное, как реакцию цепи на импульсную функцию. Если функция  $y_{\delta}(t)$  известна, то переходный процесс в той же цепи под воздействием произвольной э. д. с.  $e(t)$  рассчитывается по формуле (15-33), представляющей собой одну из разновидностей *формулы наложения*.

Другие разновидности формул наложения основаны на том, что первоначально исследуется переходный процесс под воздействием единичной функции, т. е. в предположении, что заданная цепь присоединяется к источнику постоянной э. д. с., равной 1 В.

Ток, возникающий под воздействием единичной функции, имеет изображение  $1/pZ(p)$ . Функция  $y_1(t) \doteq 1/pZ(p)$  носит в литературе название *переходной проводимости*.

Ток  $i(t)$ , возникающий под воздействием э. д. с.  $e(t)$ , имеет изображение

$$I(p) = \frac{E(p)}{Z(p)} = pE(p) \frac{1}{pZ(p)}. \quad (15-34)$$

Следовательно, задача сводится к нахождению оригинала по изображению, сомножителями которого являются  $p$ ,  $E(p) \doteq e(t)$  и  $1/pZ(p) \doteq y_1(t)$ .

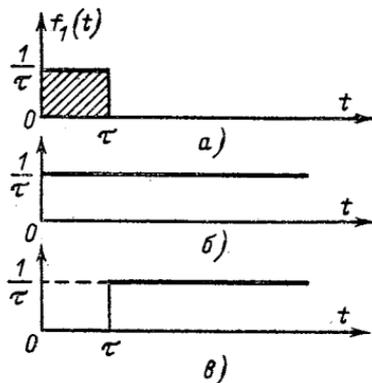


Рис. 15-21. Прямоугольный импульс как разность двух единичных функций.

В данном случае можно воспользоваться следствием теоремы свертывания, т. е. одной из формул интеграла Дюамеля (15-16):

$$\begin{aligned}
 i(t) &= e(0) y_1(t) + \int_0^t e'(\tau) y_1(t-\tau) d\tau = \\
 &= e(t) y_1(0) + \int_0^t e(\tau) y_1'(t-\tau) d\tau. \quad (15-35)
 \end{aligned}$$

Таким образом, зная реакцию электрической цепи на импульсную или единичную функцию, можно найти реакцию той же цепи на произвольную функцию с помощью одной из интегральных формул (15-33) или (15-35). Эти формулы могут быть также выведены на основе метода наложения.

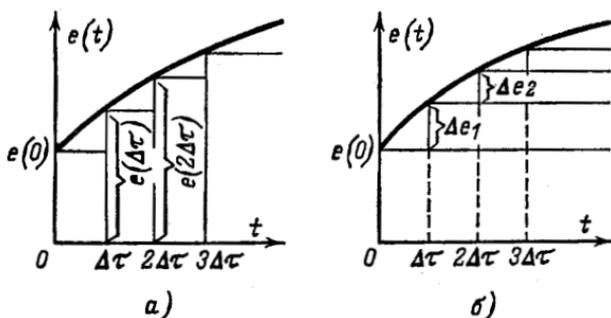


Рис. 15-22. Иллюстрация к выводу формул наложения.

Заданную кривую э. д. с.  $e(t)$  можно приближенно заменить ступенчатой кривой в виде серии прямоугольных импульсов длительностью  $\Delta\tau$  (рис. 15-22, а). При достаточно малом  $\Delta\tau$  реакция цепи на первый прямоугольный импульс приближенно равна реакции цепи на импульсную функцию, умноженную на площадь первого прямоугольного импульса  $e(0) \Delta\tau y_{\delta}(t)$ . Реакция цепи на второй прямоугольный импульс приближенно равна  $e(\Delta\tau) \times \Delta\tau y_{\delta}(t - \Delta\tau)$ , где  $e(\Delta\tau) \Delta\tau$  — площадь второго прямоугольного импульса,  $y_{\delta}(t - \Delta\tau)$  — реакция цепи на импульсную функцию, соответствующую моменту времени  $\Delta\tau$ .

Следовательно, для рассматриваемого момента времени  $t = n\Delta\tau$  реакция цепи приближенно выражается так:

$$i(t) \approx \sum_{k=0}^n e(k\Delta\tau) \Delta\tau y_{\delta}(t - k\Delta\tau).$$

Когда  $\Delta\tau \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ . В этом случае

$$i(t) = \lim_{\substack{\Delta\tau \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=0}^n e(k\Delta\tau) \Delta\tau y_{\delta}(t - k\Delta\tau).$$

По мере приближения  $\Delta\tau$  к нулю изменение  $k\Delta\tau$  вместо скачкообразного (дискретного) становится непрерывным; операция суммирования превращается в операцию интегрирования по переменной  $\tau = k\Delta\tau$ :

$$i(t) = \int_0^t e(\tau) y_{\delta}(t - \tau) d\tau.$$

На рис. 15-22, б кривая  $e(t)$  приближенно заменена серией ступенчатых функций, запаздывающих друг относительно друга на  $\Delta\tau$ . Реакция цепи на первую ступень равна реакции цепи на единичную функцию, помноженную на высоту первой ступени:  $e(0) y_1(t)$ . Реакция цепи на вторую ступень равна  $\Delta e_1 y_1(t - \Delta\tau)$ , где  $\Delta e_1$  — высота второй ступени,  $y_1(t - \Delta\tau)$  — реакция цепи на единичную функцию, смещенную в сторону, запаздывания  $\Delta\tau$ .

Следовательно, для рассматриваемого момента времени  $t = n\Delta\tau$  реакция цепи равна:

$$i(t) \approx e(0) y_1(t) + \sum_{k=1}^n \Delta e_k y_1(t - k\Delta\tau).$$

При  $\Delta\tau \rightarrow 0$  и  $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} i(t) &= e(0) y_1(t) + \lim_{\substack{\Delta\tau \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n \frac{\Delta e_k}{\Delta\tau} y_1(t - k\Delta\tau) \Delta\tau = \\ &= e(0) y_1(t) + \int_0^t e'(\tau) y_1(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

*Метод интеграла Дюамеля целесообразно применять в тех случаях, когда известна или легко находится реакция на единичную функцию, а воздействующая функция имеет кусочно-аналитическую форму.*

Если воздействующая функция является разрывной при  $t > 0$ , то удобнее пользоваться той формой интеграла Дюамеля, которая не содержит производной этой функции. В противном случае должна быть учтена реакция цепи на соответствующий скачок функции.



**Пример 15-17.** Сопротивление  $r$  и емкость  $C$ , соединенные последовательно, подключаются при  $t = 0$  к источнику э. д. с. в виде треугольного импульса (см. рис. 15-15, а). Определить ток при  $t > 2T$ .

$$\text{Реакция цепи на единичную функцию равна } Y_1(p) = \frac{1}{p \left( r + \frac{1}{pC} \right)}.$$

$$\text{Следовательно, } y_1(t) = \frac{1}{r} e^{-\frac{t}{rC}}.$$

Воспользуемся первой формулой (15-35):

$$i(t) = e(0) y_1(t) + \int_0^t e'(\tau) y_1(t-\tau) d\tau;$$

$$i(t) = \int_0^T \frac{1}{Tr} e^{-\frac{t-\tau}{rC}} d\tau - \int_T^{2T} \frac{1}{Tr} e^{-\frac{t-\tau}{rC}} d\tau.$$

Проинтегрировав, получим ток после окончания действия импульса, т. е. для  $t > 2T$ :

$$i(t) = -\frac{Ce^{-\frac{t}{rC}}}{T} \left( 1 - e^{\frac{T}{rC}} \right)^2.$$

Нетрудно убедиться, что полученный результат совпадает с результатом примера 15-12, найденным с помощью преобразования Лапласа. В данном случае интеграл Дюамеля дал очень легкое решение.

**Пример 15-18.** Сопротивление  $r$  и индуктивность  $L$ , соединенные последовательно, подключают при  $t = 0$  к источнику ступенчатой э. д. с., показанной на рис. 15-23. Определить ток при  $t_2 > t > t_1$  и  $t > t_2$ .

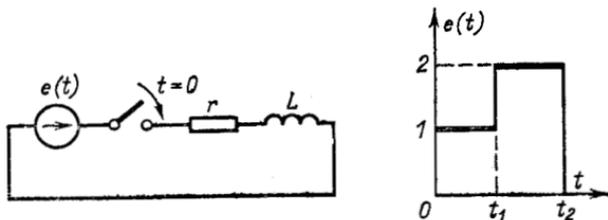


Рис. 15-23. Пример 15-18.

Решение находится проще всего методом наложения. Суммируются реакции цепи на две единичные ступени напряжения, одна из которых запаздывает на  $t_1$ ; при  $t > t_2$  вычитается реакция цепи на удвоенную ступень напряжения, смещенную в сторону запаздывания на  $t_2$ .

Итак, при

$$t_2 > t > t_1$$

$$i(t) = \frac{1}{r} \left[ 1 - e^{-\frac{r}{L}t} + 1 - e^{-\frac{r}{L}(t-t_1)} \right] = \frac{1}{r} \left[ 2 - e^{-\frac{r}{L}t} \left( 1 + e^{\frac{r}{L}t_1} \right) \right].$$

При  $t > t_2$

$$i(t) = \frac{1}{r} \left[ 2 - e^{-\frac{r}{L}t} \left( 1 + e^{\frac{r}{L}t_1} \right) - 2 + 2e^{-\frac{r}{L}(t-t_2)} \right] = \\ = \frac{1}{r} e^{-\frac{r}{L}t} \left( 2e^{\frac{r}{L}t_2} - e^{\frac{r}{L}t_1} - 1 \right).$$

Для сравнения приведем решения по формулам (15-33) и (15-35).

По первой формуле (15-33)  $i(t) = \int_0^t e(\tau) y_{\delta}(t-\tau) d\tau$ .

Изображение реакции цепи на импульсную функцию равно:

$$Y_{\delta}(p) = \frac{1}{r + pL}.$$

Следовательно,

$$y_{\delta}(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{r}{L}t}, \quad y_{\delta}(t-\tau) = \frac{1}{L} e^{-\frac{r}{L}(t-\tau)}.$$

При  $t_2 > t > t_1$

$$i(t) = \int_0^{t_1} \frac{1}{L} e^{-\frac{r}{L}(t-\tau)} d\tau + 2 \int_{t_1}^t \frac{1}{L} e^{-\frac{r}{L}(t-\tau)} d\tau = \\ = \frac{1}{r} \left[ 2 - e^{-\frac{r}{L}t} \left( 1 + e^{\frac{r}{L}t_1} \right) \right].$$

При  $t > t_2$

$$i(t) = \int_0^{t_1} \frac{1}{L} e^{-\frac{r}{L}(t-\tau)} d\tau + 2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{L} e^{-\frac{r}{L}(t-\tau)} d\tau = \\ = \frac{1}{r} e^{-\frac{r}{L}t} \left( 2e^{\frac{r}{L}t_2} - e^{\frac{r}{L}t_1} - 1 \right).$$

По второй формуле (15-35)

$$i(t) = e(t) y_1(0) + \int_0^t e(\tau) y_1'(t-\tau) d\tau.$$

Реакция цепи на единичную функцию равна:

$$y_1(t) = \frac{1}{r} \left( 1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right).$$

Следовательно,

$$y_1(0) = 0, \quad y_1'(t-\tau) = \frac{1}{L} e^{-\frac{r}{L}(t-\tau)},$$

т. е. получаются те же интегралы, которые были вычислены выше.



## 15-12. НАХОЖДЕНИЕ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ УСТАНОВИВШЕЙСЯ РЕАКЦИИ ЦЕПИ НА ПЕРИОДИЧЕСКУЮ НЕСИНУСОИДАЛЬНУЮ ВОЗДЕЙСТВУЮЩУЮ ФУНКЦИЮ

В § 13-5 было показано, что в случае периодической несинусоидальной воздействующей функции установившаяся реакция цепи может быть получена не только как сумма гармоник, но и в замкнутой форме с конечным, относительно малым числом слагаемых. Решение основывалось на интегрировании дифференциального уравнения в определенном интервале времени и нахождении постоянной интегрирования из условия периодичности процесса.

Другой метод решения этой задачи основан на применении преобразования Лапласа. Допустим, что первый период воздействующей периодической функции (равной нулю при  $t < 0$ ) имеет изображение  $F_1(p)$ . Тогда изображением периодической функции-оригинала будет:

$$F(p) = F_1(p) (1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \dots) = \frac{F_1(p)}{1 - e^{-pT}},$$

где  $T$  — период.

Обозначив передаточную функцию цепи<sup>1</sup> через  $K(p)$ , получим реакцию цепи на периодическую функцию-оригинал как сумму вычетов функции:

$$\frac{F_1(p)}{1 - e^{-pT}} K(p) e^{pt}.$$

Установившаяся реакция цепи равна сумме вычетов относительно полюсов воздействующей функции  $\frac{F_1(p)}{1 - e^{-pT}}$ , а свободная реакция — сумме вычетов относительно полюсов передаточной функции  $K(p)$ .

Число полюсов воздействующей функции бесконечно велико, так как уравнению  $1 - e^{-pT} = 0$  соответствует бесчисленное множество корней:  $p_k = jk \frac{2\pi}{T}$  ( $k$  — целые числа). Поэтому находить установившуюся реакцию цепи непосредственно по изображению  $\frac{F_1(p)}{1 - e^{-pT}} K(p)$  нецелесообразно (получится ряд Фурье).

<sup>1</sup> Ход рассуждений останется тем же, если вместо передаточной функции воспользоваться сопротивлением или проводимостью цепи.



Свободная же реакция цепи определяется суммой конечного числа слагаемых, так как число полюсов передаточной функции  $K(p)$  ограничено (здесь рассматривается цепь с сосредоточенными параметрами).

Если из полной реакции цепи вычесть свободную реакцию, то получится установившаяся реакция цепи. При этом для первого периода полная реакция цепи на функцию  $F(p)$  не отличается от реакции на функцию  $F_1(p)$  и поэтому находится по изображению  $F_1(p)K(p)$ .

Поясним сказанное на примере, приведенном в § 13-5. Периодическая знакопеременная э. д. с. прямоугольной формы, равная нулю при  $t < 0$ , имеет изображение

$$\frac{E}{p} \left( 1 - 2e^{-p\frac{T}{2}} + 2e^{-pT} - \dots \right) = \frac{E}{p} \frac{1 - e^{-p\frac{T}{2}}}{1 + e^{-p\frac{T}{2}}}.$$

Сопrotивление цепи  $Z(p) = r + pL$ .  
Изображение тока в цепи

$$I(p) = \frac{E}{p} \frac{1 - e^{-p\frac{T}{2}}}{\left( 1 + e^{-p\frac{T}{2}} \right) (r + pL)}.$$

Свободный ток

$$i_{св} = \operatorname{Res}_{p = -\frac{r}{L}} \frac{E}{p} \frac{\left( 1 - e^{-p\frac{T}{2}} \right) e^{pt}}{\left( 1 + e^{-p\frac{T}{2}} \right) (r + pL)} = \frac{E}{r} \frac{1 - e^{-a}}{1 + e^{-a}} e^{-\frac{r}{L}t},$$

где  $a = rT/2L$ .

Переходный ток в течение первого полупериода

$$i_1 = \frac{E}{r} \left( 1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right).$$

Следовательно, искомый установившийся ток

$$i_y = i_1 - i_{св} = \frac{E}{r} \left( 1 - \frac{2}{1 + e^{-a}} e^{-\frac{r}{L}t} \right) \\ \left( 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \right),$$

что совпадает с результатом, полученным в примере 13-4.

Ниже приводятся два типовых примера для цепей первого и второго порядков.



**Пример 15-19** [Л. 16]. Сопротивление  $r = 2$  Ом и емкость  $C = 1$  Ф, соединенные последовательно, подключены к источнику пилообразной э. д. с. вида, изображенного на рис. 15-7, а; период  $T = 1$  с. Найти установившееся напряжение на сопротивлении.

Из примера 15-4 известно изображение первого периода (см. рис. 15-17, б):

$$E_1(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p} - \frac{e^{-p}}{p^2}$$

и всей пилообразной функции (рис. 15-7, а):

$$E(p) = \frac{E_1(p)}{1 - e^{-p}}.$$

Передаточная функция равна:

$$\frac{r}{r + \frac{1}{pC}} = \frac{2}{2 + \frac{1}{p}} = \frac{p}{p + \frac{1}{2}}.$$

Изображение реакции цепи на пилообразную функцию

$$\begin{aligned} U(p) &= \frac{1 - e^{-p} - pe^{-p}}{p \left( p + \frac{1}{2} \right) (1 - e^{-p})} = \\ &= \frac{1}{p \left( p + \frac{1}{2} \right)} - \frac{e^{-p}}{\left( p + \frac{1}{2} \right) (1 - e^{-p})}. \end{aligned}$$

Свободное напряжение на сопротивлении

$$\begin{aligned} u_{св} &= \operatorname{Res}_{p=-\frac{1}{2}} \left[ \frac{e^{pt}}{p \left( p + \frac{1}{2} \right)} \right] - \operatorname{Res}_{p=-\frac{1}{2}} \left[ \frac{e^{p(t-1)}}{\left( p + \frac{1}{2} \right) (1 - e^{-p})} \right] = \\ &= -2e^{-t/2} - \frac{e^{-t/2} e^{1/2}}{1 - e^{1/2}} = -2e^{-t/2} + \frac{e^{-t/2}}{1 - e^{-1/2}}. \end{aligned}$$

Переходное напряжение на сопротивлении в течение первого периода (т. е. реакция цепи на первый «зубец»)

$$u_1 = \operatorname{Res}_{p=-\frac{1}{2}} \left[ \frac{e^{pt}}{p \left( p + \frac{1}{2} \right)} \right] = 2 - 2e^{-t/2} \quad (0 \leq t < 1).$$

Здесь принято во внимание только первое, слагаемое изображения «зубца», так как два вторых слагаемых не относятся ко времени  $t < 1$ .

Установившееся напряжение на сопротивлении в течение первого периода

$$\begin{aligned} u_y = u_1 - u_{св} &= 2 - 2e^{-t/2} - \\ &- \left( -2e^{-t/2} + \frac{e^{-t/2}}{1 + e^{-1/2}} \right) = 2 - \frac{e^{-t/2}}{1 - e^{-1/2}} \quad (0 \leq t < 1). \end{aligned}$$



Правильность ответа может быть проверена по условию непрерывности установившегося напряжения на емкости:

$$u_{Cy}(0) = u_{Cy}(1) = \frac{-1 + 2e^{-1/2}}{1 - e^{-1/2}}.$$

**Пример 15-20** [Л. 16]. Сопротивление  $r = 3$  Ом, индуктивность  $L = 1$  Г и емкость  $C = 1/2$  Ф, соединенные последовательно, подключены к источнику периодической э. д. с. треугольной формы:

$$e(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1, \\ 2-t & 1 \leq t \leq 2 \text{ и т. д.} \end{cases}$$

Найти установившееся напряжение на емкости.

Из примера 15-12 известно изображение треугольника (см. рис. 15-15, а):

$$E_1(p) = \frac{1}{p^2} (1 - 2e^{-p} + e^{-2p}) = \frac{1}{p^2} (1 - e^{-p})^2.$$

Периодическая э. д. с. треугольной формы, равная нулю при  $t < 0$ , имеет изображение

$$E(p) = \frac{E_1(p)}{1 - e^{-2p}} = \frac{1 - e^{-p}}{p^2 (1 + e^{-p})}.$$

Передаточная функция равна:

$$\frac{\frac{1}{pC}}{r + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{1}{\frac{1}{2}p^2 + \frac{3}{2}p + 1} = \frac{2}{(p+1)(p+2)}.$$

Изображение реакции цепи на периодическую э. д. с.

$$U(p) = \frac{2(1 - e^{-p})}{p^2(1 + e^{-p})(p+1)(p+2)}.$$

Свободное напряжение на емкости

$$u_{св} = \operatorname{Res}_{p=-1} \frac{2(1 - e^{-p})e^{pt}}{p^2(1 + e^{-p})(p+1)(p+2)} + \\ + \operatorname{Res}_{p=-2} \frac{2(1 - e^{-p})e^{pt}}{p^2(1 + e^{-p})(p+1)(p+2)}.$$

Изображение напряжения на емкости в первом периоде

$$U_1(p) = E_1(p) \frac{2}{(p+1)(p+2)} = \frac{2(1 - 2e^{-p} + e^{-2p})}{p^2(p+1)(p+2)}$$

имеет простые полюсы  $p_1 = -1$  и  $p_2 = -2$  и полюс второго порядка  $p_3 = 0$ .

В интервале  $0 \leq t < 1$  принимается во внимание только первое слагаемое числителя, так как второе и третье слагаемые относятся к последующим интервалам времени.



На основании (15-22) и (15-23) переходное напряжение на емкости

$$u_1(t) = \frac{1}{2}(2t - 3 + 4e^{-t} - e^{-2t}) \quad (0 \leq t < 1);$$

$$u_2(t) = u_1(t) - 2u_1(t-1) \quad (1 \leq t < 2).$$

Искомое установившееся напряжение на емкости

$$u_y = t - \frac{3}{2} + \frac{4e^{-(t-1)}}{1+e} - \frac{e^{-2(t-1)}}{1+e^2} \quad (0 \leq t < 1);$$

$$u_y = -(t-2) + \frac{3}{2} - \frac{4e^{-(t-2)}}{1+e} + \frac{e^{-2(t-2)}}{1+e^2} \quad (1 \leq t < 2).$$

Проверка:

$$u_y(0) = u_y(2) = \frac{-3 + 5e - 5e^2 + 3e^3}{2(1+e)(1+e^2)}.$$

### 15-13. ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПЯХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

В гл. 11 (см. § 11-2) были выведены дифференциальные уравнения однородной двухпроводной линии; ввиду наличия двух независимых переменных ( $t$  и  $x$ ) дифференциальные уравнения получились в частных производных:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= ri + L \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= gu + C \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (15-36)$$

Минусы в левой части уравнений (15-36) соответствуют случаю, когда расстояние  $x$  отсчитывается от начала линии, или, точнее, в положительном направлении тока.

Формула дифференцирования по параметру (табл. 15-1) позволяет применить преобразование Лапласа к уравнениям (15-36), в которых  $x$  является параметром.

Если изображения искомых функций обозначить через

$$\left. \begin{aligned} u(x, t) &\doteq U(x, p) = U; \\ i(x, t) &\doteq I(x, p) = I, \end{aligned} \right\} \quad (15-37)$$

то системе дифференциальных уравнений в частных производных (15-36) будет соответствовать система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{dU}{dx} &= (r + pL)I - Li(x, 0); \\ -\frac{dI}{dx} &= (g + pC)U - Cu(x, 0); \end{aligned} \right\} \quad (15-38)$$



здесь  $i(x, 0)$  и  $u(x, 0)$  — начальные (по времени) значения тока и напряжения в точке  $x$ .

Ввиду того что  $p$  не зависит от  $x$  и в уравнениях (15-38) производные по  $p$  отсутствуют, при переходе от уравнений (15-36) к (15-38) частные производные по  $x$  заменены обыкновенными.

Исключая из системы (15-38)  $I$ , получаем уравнение относительно  $U$ :

$$\frac{d^2U}{dx^2} = (r + pL)(g + pC)U + L \frac{di(x, 0)}{dx} - C(r + pL)u(x, 0). \quad (15-39)$$

Аналогично, исключая из (15-38)  $U$ , получаем уравнение относительно  $I$ :

$$\frac{d^2I}{dx^2} = (r + pL)(g + pC)I + C \frac{du(x, 0)}{dx} - L(g + pC)i(x, 0). \quad (15-40)$$

Эти уравнения решаются как обычные дифференциальные уравнения второго порядка.

Обозначим:

$$\gamma(p) = \sqrt{(r + pL)(g + pC)}$$

и назовем это выражение операторным коэффициентом распространения.

При нулевых начальных значениях уравнения (15-39) и (15-40) упростятся:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2U}{dx^2} &= \gamma^2 U; \\ \frac{d^2I}{dx^2} &= \gamma^2 I. \end{aligned} \right\} \quad (15-41)$$

Обращает на себя внимание сходство полученных операторных уравнений (15-41) при нулевых начальных условиях с дифференциальными уравнениями однородной линии при установившемся режиме.

Соответственно остаются в силе для (15-41) решения, полученные в гл. 11 (см. § 11-3), если под  $U$  и  $I$  подразумевать изображения напряжения и тока, а под

$$Z_B(p) = \sqrt{\frac{r + pL}{g + pC}}$$

операторное волновое сопротивление линии<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Если в выражениях для  $\gamma(p)$  и  $Z_B(p)$  заменить  $p$  на  $j\omega$ , то получатся известные выражения для параметров линии при синусоидальном режиме.



В общем случае переход от изображений  $U(x, p)$  и  $I(x, p)$ , являющихся трансцендентными функциями  $p$ , к искомым оригиналам  $u(x, t)$  и  $i(x, t)$  представляет значительные трудности. При решении задач обычно делаются какие-либо упрощающие предположения [Л. 2 и 8].

#### 15-14. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

15-1. Сопротивление  $r = 2$  Ом и индуктивность  $L = 1$  Г, соединенные последовательно, подключаются при  $t = 0$  к источнику э. д. с.  $e(t) = t$  В. Определить  $i(t)$ .

Ответ:  $\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t}$  А.

15-2. Применить обратное преобразование Лапласа к изображениям:

$$\frac{3p}{(p^2+1)(p^2+4)}; \frac{p+1}{p^2+2p};$$

$$\frac{1}{(p+1)(p+2)^2}; \frac{1}{p(p^2+2p+5)}; \frac{p^2}{(p^2+1)^2}.$$

Ответ:

$$\cos t - \cos 2t; \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}); e^{-t} - e^{-2t}(1+t);$$

$$\frac{1}{5} \left[ 1 + \frac{1}{2}e^{-t}(-2 \cos 2t - \sin 2t) \right]; \frac{1}{2}t \cos t + \frac{1}{2} \sin t.$$

15-3. Применяв преобразование Лапласа, решить задачи предыдущей главы: 14-3 — 14-6 и 14-9.

15-4. Цепь, состоящая из последовательно соединенных сопротивлений  $r = 2$  Ом, индуктивности  $L = 1$  Г и незаряженной емкости  $C = 0,5$  Ф, подключена при  $t = 0$  к источнику э. д. с.  $e(t) = \sin t$  В. Определить  $i(t)$ .

Ответ:  $0,2(\cos t + 2 \sin t - e^{-t} \cos t - 3e^{-t} \sin t)$  А.

15-5. Два одинаковых индуктивных контура  $r, L, C$  связаны взаимной индуктивностью  $M$ . В один из них при  $t = 0$  включена постоянная э. д. с.  $E$ .

Найти ток в другом контуре.

Ответ:

$$\frac{E}{2} \left[ \frac{e^{-\delta_1 t} \sin \omega_1 t}{\omega_1 (K+M)} - \frac{e^{-\delta_2 t} \sin \omega_2 t}{\omega_2 (L-M)} \right];$$

$$\delta_{1,2} = \frac{r}{2(L \pm M)}; \omega_{1,2}^2 = \frac{1}{C(L \pm M)} - \delta_{1,2}^2.$$

15-6. Сопротивление  $r = 10$  Ом и индуктивность  $L = 0,1$  Г, соединенные последовательно, подключаются при  $t = 0$  к источнику э. д. с.  $10e^{-4t}$  В. Определить  $i(t)$ .

Ответ:  $1,04(e^{-4t} - e^{-100t})$  А.

15-7. Сопротивление  $r = 1000$  Ом и незаряженная емкость  $C = 10$  мкФ, соединенные последовательно, подключаются при  $t = 0$  к источнику э. д. с.  $2,5 \cdot 10^4(1 - e^{-4t})$  В. Найти  $i(t)$ .

Ответ:  $1,04(e^{-4t} - e^{-100t})$  А.



15-8. Найти оригинал по изображению

$$\frac{p^2 - p + 10}{(p + 1)^2 (p^2 + 100)}$$

О т в е т:

$$0,119te^{-t} - 0,027e^{-t} + 0,027 \cos 10t + 0,086 \sin 10t.$$

15-9. В контуре, состоящем из сопротивления 40 Ом и индуктивности 0,1 Г, при установившемся режиме действует э. д. с.  $e = 100 \cos 400 t$  В.

Найти  $i(t)$  при  $t > 0$ , если, начиная с момента  $t = 0$ , амплитуда э. д. с. становится равной 40 В.

О т в е т:

$$0,707 \cos (400t - \pi/4) + 0,75e^{-400t} \text{ В.}$$

15-10. При нулевых начальных условиях в контур  $rL$  включается источник э. д. с.  $Ee^{-at}$ . Определить токи при  $a \neq r/L$  и  $a = r/L$ .

О т в е т:

$$\frac{E}{r - aL} \left( e^{-at} - e^{-\frac{r}{L}t} \right); \quad \frac{E}{L} te^{-\frac{r}{L}t}.$$

15-11. Решить предыдущую задачу, если э. д. с. равна  $Ete^{-at}$ .

О т в е т:

$$\frac{E}{r - aL} te^{-at} + \frac{EL}{(r - aL)^2} \left( e^{-\frac{r}{L}t} - e^{-at} \right); \quad \frac{E}{2L} t^2 e^{-\frac{r}{L}t}.$$

15-12. Источник тока, посылающий ток  $i = 1$  А в виде прямоугольного импульса длительностью 0,001 с, подключен при  $t = 0$  к сопротивлению  $r = 100$  Ом и емкости  $C = 10$  мкФ, соединенным параллельно. Начальные условия нулевые, Определить напряжение на выводах цепи.

О т в е т:

$$100 (1 - e^{-10^5 t}) - 100 [1 - e^{-10^5 (t - 0,001)}] 1 (t - 0,001) \text{ В.}$$

15-13. Пользуясь решением примера 15-12 (см. рис. 15-15), найти установившийся ток в  $r$  и  $C$ , соединенных последовательно и подключенных к источнику периодической э. д. с. треугольной формы.

О т в е т:

$$\frac{C}{T} \left( 1 - 2 \frac{e^{-\frac{T-t}{rC}}}{1 + e^{-\frac{T}{rC}}} \right) (0 \leq t < T);$$

$$\frac{C}{T} \left( -1 + 2 \frac{e^{-\frac{2T-t}{rC}}}{1 + e^{-\frac{T}{rC}}} \right) (T \leq t < 2T).$$

15-14. Доказать применимость теоремы об эквивалентном источнике э. д. с. к изображениям.



15-15. Как учитывается энергия магнитного и электрического полей, имеющаяся к началу исследуемого переходного процесса?

15-16. На каком основании при обратном преобразовании Лапласа применяется теория вычетов?

15-17. Что такое импульсная функция? Показать, что

$$\int_0^t \delta(t) dt = 1.$$

15-18. Найти изображение импульса произвольной формы, если известно изображение функции, получаемой периодическим повторением данного импульса.

## ГЛАВА ШЕСТНАДЦАТАЯ

### ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ К РАСЧЕТУ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

#### 16-1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ КАК ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Допустим, что заданная непериодическая функция  $f(t)$  преобразуема по Лапласу, причем показатель роста  $c_0$  отрицателен, т. е. для всех  $t > 0$ .

$$|f(t)| < Me^{-|c_0|t}. \quad (16-1)$$

Это означает, что функция не превосходит некоторой затухающей экспоненты; следовательно, интеграл  $\int_0^{\infty} |f(t)| dt$  равен конечному числу (условие абсолютной интегрируемости функции). В таком случае изображение  $F(p) \doteq \doteq f(t)$  является аналитической функцией в полуплоскости  $\text{Re } p > c_0$ , а следовательно, и на мнимой оси; поэтому в формулах прямого и обратного преобразований Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt; \quad f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} dp$$

можно положить  $c = 0$  и  $p = j\omega$ , т. е. за путь интегрирования в формуле обратного преобразования Лапласа выбрать мнимую ось.



Тогда будем иметь:

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt; \quad (16-2)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (16-3)$$

Эти формулы, известные под названием *одностороннего преобразования Фурье*, имеют более узкую область применения, чем преобразование Лапласа. Это связано с тем, что для сходимости несобственного интеграла (16-2) на функцию  $f(t)$  наложено ограничение (16-1), которое является более жестким, чем условие  $|f(t)| < Me^{c_0 t}$ , предъявляемое к функциям-оригиналам (см. § 15-2).

Например, такие функции<sup>1</sup>, как единичная, возрастающая показательная, периодические и некоторые другие функции-оригиналы, имеющие лапласовы изображения, не могут быть непосредственно представлены в виде интеграла Фурье (16-3).

Если заданная функция, преобразуемая по Лапласу, удовлетворяет условию (16-1), то свойства преобразования Лапласа сохраняют силу при  $p = j\omega$ . Соответственно свойства преобразования Фурье получаются на основании свойств преобразования Лапласа заменой  $p$  на  $j\omega$ . В этом смысле можно говорить, что преобразование Фурье является частным случаем преобразования Лапласа.

Из изложенного выше следует, что всякая функция, для которой применимо одностороннее преобразование Фурье, всегда может быть преобразована по Лапласу. Значит, для нашей функции по изображению Лапласа можно находить  $F(j\omega)$  (заменой  $p$  на  $j\omega$ ).

## 16-2. СПЕКТРАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Формулы преобразования Фурье представляют собой взаимно связанные интегральные уравнения, каждое из которых служит решением другого. Эти формулы позволяют преобразовать непериодическую функцию времени  $f(t)$  в функцию частоты  $F(j\omega)$  и обратно.

Для выражения связи между  $F(j\omega)$  и  $f(t)$ , накладываемой преобразованием Фурье на эти функции, может быть применен тот же знак соответствия  $\stackrel{\text{Ф}}{=}$ , которым мы поль-

<sup>1</sup> Здесь имеются в виду функции, равные нулю при  $t < 0$ .



зовались в предыдущей главе. Итак, сокращенная условная запись  $F(j\omega) \doteq f(t)$  обозначает, что  $F(j\omega)$  и  $f(t)$  связаны уравнениями (16-2) и (16-3).

Функция  $F(j\omega)$  носит название спектральной функции, которая является функцией текущей частоты  $\omega$ .

Согласно (16-3) непериодическая функция  $f(t)$  представляется совокупностью бесконечно большого числа гармоник с бесконечно малыми амплитудами  $\frac{1}{2\pi} F(j\omega) d\omega$  во всем диапазоне частот от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Иначе говоря, представление непериодической функции в виде интеграла Фурье подразумевает суммирование незатухающих гармонических колебаний бесконечного сплошного спектра частот.

Такой метод представления непериодических функций несколько сходен с методом разложения периодических несинусоидальных функций в ряд Фурье (при комплексной форме ряда, так же как и в (16-3), присутствуют положительные и отрицательные частоты). Однако в отличие от представления периодических функций в виде дискретного ряда гармоник в данном случае *суммируются гармонические колебания сплошного спектра частот*. При этом интеграл Фурье (16-3) обладает тем ценным свойством, что, правильно описывая функцию  $f(t)$  при  $t > 0$ , он тождественно обращается в нуль при  $t < 0$ .

Например, если на электрическую цепь с момента  $t = 0$  воздействует функция  $f(t)$ , то представление ее интегралом (16-3) подразумевает существование бесконечного числа колебаний всевозможных частот с бесконечно малыми амплитудами во всем интервале времени от  $t = -\infty$  до рассматриваемого момента  $t$ , причем при  $t < 0$  все эти колебания дают в сумме нуль.

Если заданная непериодическая функция  $f(t)$  не равна нулю для отрицательных значений  $t$ , то в формуле (16-2) нижним пределом интеграла берется  $-\infty$ , а не 0:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (16-4)$$

В этом случае преобразование Фурье называется *двусторонним*<sup>1</sup>. Для сходимости несобственного интеграла

<sup>1</sup> В теории преобразования Лапласа иногда также пользуются двусторонним преобразованием Лапласа.



(16-4) должно выполняться условие абсолютной интегрируемости функции в бесконечных пределах, т. е. должен существовать и иметь конечное значение интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt.$$

Спектральную функцию можно представить как огибающую коэффициентов ряда Фурье, т. е. как предел линейчатого спектра частот периодической функции, когда период стремится к бесконечности. Если непериодическая функция  $f(t)$  задана в конечных пределах, то всегда можно подобрать такое  $T$ , чтобы выполнялось равенство

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Соответствующая этому случаю периодическая функция, совпадающая с  $f(t)$  в пределах от  $-\frac{T}{2}$  до  $\frac{T}{2}$  и имеющая период  $T$ , характеризуется коэффициентами разложения в ряд Фурье согласно формуле (13-13):

$$\dot{F}_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt, \quad (16-5)$$

где  $\omega_1 = 2\pi/T$  — основная угловая частота; она имеет индекс 1 для отличия ее от текущей частоты  $\omega$  в (16-4).

Из сопоставления (16-4) с (16-5) видно, что спектральная функция  $F(j\omega)$  заданной в конечных пределах непериодической функции  $f(t)$  в масштабе  $2/T$  изображает огибающую дискретного ряда коэффициентов  $\dot{F}_n$  разложения, соответствующего периодическому повторению заданной функции:

$$\frac{T}{2} \dot{F}_n = [F(j\omega)]_{\omega = n\omega_1}. \quad (16-6)$$

По мере возрастания периода  $T$  интервал по шкале частот между составляющими ряда Фурье уменьшается и линейчатый спектр все более сгущается, стремясь перейти в пределе в сплошной спектр.

Рисунок 16-1 иллюстрирует постепенный переход от коэффициентов разложения к спектральной функции.



Периодические функции на рис. 16-1, а и б в интервале  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$  заданы условиями:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } -t_1 < t < t_1, \\ 0 & \text{при } -t_1 > t > t_1. \end{cases}$$

Для непериодической функции (рис. 16-1, в) те же условия сохраняют силу на всей оси времени  $t$ .

Согласно (16-4) и (16-5):

$$F(j\omega) = \int_{-t_1}^{t_1} e^{-j\omega t} dt = 2t_1 \frac{\sin \omega t_1}{\omega t_1};$$

$$\dot{F}_n = \frac{2}{T} \int_{-t_1}^{t_1} e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{4t_1}{T} \frac{\sin n\omega_1 t_1}{n\omega_1 t_1}.$$

Представление непериодической функции в виде совокупности гармонических колебаний позволяет на основа-

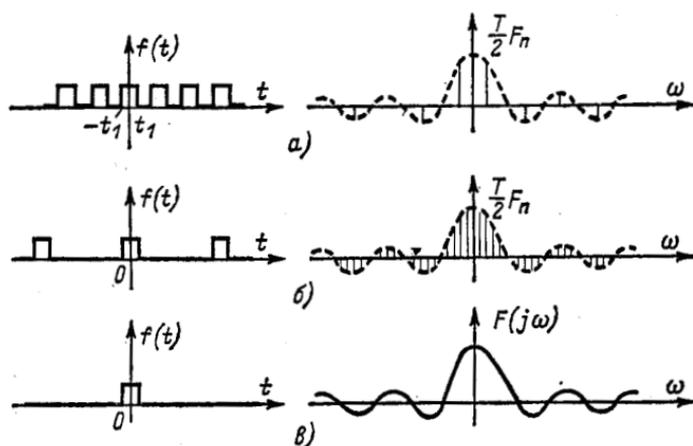


Рис. 16-1. Переход от коэффициентов разложения к спектральной функции.

нии спектральной функции судить о распределении энергии в спектре и оценивать значимость отдельных частотных полос этого спектра. Например, полученное выражение

$$F(j\omega) = 2t_1 \frac{\sin \omega t_1}{\omega t_1}$$



показывает (рис. 16-1, в), что функция  $F(j\omega)$  обращается в нуль при  $\omega = \frac{\pi}{T_1} k$  ( $k = 1, 2 \dots$ ). По мере уменьшения  $T_1$  интервал между нулями функции  $F(j\omega)$  возрастает.

Рассматриваемая здесь непериодическая функция  $f(t)$  (рис. 16-1, в) выражается формулой (16-3) как совокупность гармонических колебаний бесконечного спектра частот. Если же используется часть спектра, то для достаточно правильного воспроизведения функции  $f(t)$  требуется тем большая полоса частот, чем меньше  $T_1$ .

Спектральная функция  $F(j\omega)$  может быть действительной или комплексной.

Приняв в общем случае  $F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{-j\psi(\omega)}$  получим две частотные характеристики, а именно: амплитудный спектр  $|F(j\omega)|$  и фазовый спектр  $\psi(\omega)$ .

*Амплитудный спектр — всегда четная, а фазовый спектр — всегда нечетная функция  $\omega$ .*

Из формул одностороннего преобразования Фурье и Лапласа видно, что если выполняется неравенство (16-1), то при замене комплексного переменного  $p$ , входящего в изображение по Лапласу, мнимой величиной  $j\omega$  получается выражение для спектральной функции

$$F(j\omega) = [F(p)]_{p=j\omega}. \quad (16-7)$$

*Такой способ нахождения спектральных функций является наиболее простым и удобным, так как он позволяет использовать таблицы оригиналов и изображений (см. примеры 16-1 и 16-2).*

Родственная связь, существующая между преобразованиями Лапласа и Фурье, вносит, таким образом, физическое содержание в понятие «изображение» как обобщенную форму спектральной функции. Она распространяется и на основные свойства преобразований Фурье и Лапласа.

В табл. 16-1 приведены основные свойства одностороннего преобразования Фурье, которые в ряде случаев облегчают нахождение функций времени или их спектральных функций. Если над некоторой функцией времени, спектральная функция которой известна, производится одна из операций, указанных в табл. 16-1, то спектральная функция, соответствующая полученной новой функции времени, находится по соответствующему правилу из первоначальной спектральной функции (см. пример 16-2).

В свою очередь если спектральная претерпевает какую-либо операцию, то функция времени, соответствующая

## Основные свойства одностороннего преобразования Фурье

Наименование	Формула
Свойство линейности	$\sum_{i=1}^n a_i f_i(t) \doteq \sum_{i=1}^n a_i F_i(j\omega)$
Дифференцирование функции времени	$f'(t) \doteq j\omega F(j\omega) - f(0)$
Интегрирование функции времени	$\int_0^t f(t) dt \doteq \frac{F(j\omega)}{j\omega}$
Дифференцирование спектральной характеристики	$(-jt) f(t) \doteq \frac{d}{d\omega} F(j\omega)$
Изменение масштаба независимого переменного	$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(j \frac{\omega}{\alpha}\right)$
Смещение функции времени	$f(t \pm t_0) \doteq e^{\pm j\omega t_0} F(j\omega)$
Смещение спектральной характеристики	$e^{\pm j\omega_1 t} f(t) \doteq F[j(\omega \mp \omega_1)]$
Умножение спектральных характеристик	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \doteq F_1(j\omega) F_2(j\omega)$
Умножение функции времени на косинус или синус	$f(t) \cos \omega_1 t \doteq \frac{1}{2} \left\{ F[j(\omega - \omega_1)] + F[j(\omega + \omega_1)] \right\};$ $f(t) \sin \omega_1 t \doteq \frac{1}{2j} \left\{ F[j(\omega - \omega_1)] - F[j(\omega + \omega_1)] \right\}$



новой спектральной, также находится по известным правилам.

Указанные в табл. 16-1 основные свойства одностороннего преобразования Фурье имеют важный физический смысл. Например, согласно теореме об изменении масштабов независимого переменного при изменении масштаба времени в  $a$  раз масштаб частот меняется в  $1/a$  раз. Это означает, что ширина спектра увеличивается при сжатии сигнала во времени и сокращается при растяжении сигнала (без изменения самого характера спектра). Поэтому бесконечно короткий импульс должен иметь бесконечно широкий спектр. Здесь под шириной спектра сигнала понимается область частот, в пределах которой заключена основная доля его энергии.

Представление непериодической функции в виде совокупности незатухающих гармонических колебаний дает возможность исследовать переходный процесс в линейной электрической цепи, применяя к спектральной функции общие методы расчета установившихся синусоидальных процессов (см. § 16-3) и (16-4).

**Пример 16-1.** Построить графики амплитудного и фазового спектров прямоугольного импульса (рис. 16-2, а).

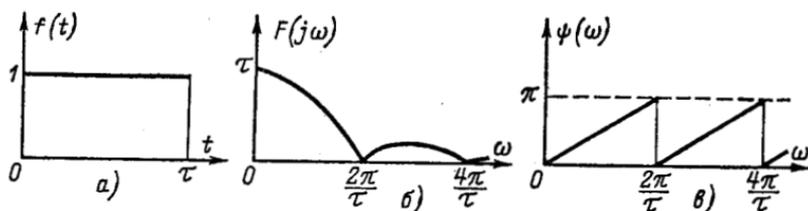


Рис. 16-2. Прямоугольный импульс (а) и его амплитудный (б) и фазовый (в) спектры.

Непериодическая функция задана условием

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < t < \tau; \\ 0 & \text{при } 0 > t > \tau. \end{cases}$$

На основании (16-2)

$$F(j\omega) = \int_0^{\tau} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau}) = \left[ \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2} \right] e^{-j \frac{\omega\tau}{2}}.$$



Тот же результат может быть получен на основании (16-7), если в изображении по Лапласу

$$F(p) = \frac{1}{p} (1 - e^{-p\tau})$$

заменить  $p$  через  $j\omega$ .

Амплитудный спектр равен:

$$|F(j\omega)| = \left| \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2} \right|.$$

Нули функции  $F(j\omega)$  соответствуют значениям  $\frac{\omega\tau}{2} = k\pi$  ( $k = 1, 2 \dots$ ).

При  $\frac{\omega\tau}{2} = \frac{\pi}{2} (2k+1)$

$$|F(j\omega)| = \frac{2}{|\omega|} = \frac{\tau}{\frac{\pi}{2} (2k+1)}.$$

С учетом знака  $\sin \frac{\omega\tau}{2}$  фазовый спектр  $\psi(\omega)$  определяется следующим образом:

$$\psi(\omega) = \omega\tau/2$$

при  $0 < \omega < 2\pi/\tau$ ;

$$\psi(\omega) = \omega\tau/2 - \pi \text{ при } 2\pi/\tau < \omega < \frac{4\omega}{\tau} \text{ и т. д.}$$

Кривые  $|F(j\omega)|$  и  $\psi(\omega)$  изображены на рис. 16-2, б и в.

Следует обратить внимание на то, что в соответствии с формулой смещения функции времени (см. табл. 16-1) перемещение импульса неизменной длительности  $\tau$  вдоль оси времени на  $t_0$  не влияет на амплитудный спектр, а изменяет только фазовый спектр на угол  $\omega t_0$ ; это видно и из сравнения амплитудных спектров на рис. 16-1, в и 16-2, б.

С увеличением длительности импульса  $\tau$  амплитудный спектр группируется во все более узкой области частот вблизи нулевой частоты, причем значение амплитудного спектра при нулевой частоте, равное  $\tau$ , возрастает, стремясь в пределе к бесконечности. Это физически означает, что энергия сигнала, выражаемого рассматриваемой функцией, при  $\tau \rightarrow \infty$  стремится к бесконечности и в основном сосредоточивается около частоты  $\omega = 0$ . Функции, определяющие сигнал с бесконечной энергией, не удовлетворяют условию абсолютной интегрируемости, и интеграл (16-2) к такого рода функциям непосредственно неприменим. Чтобы обойти ограничения, накладываемые условием абсолютной интегрируемости, применяют искусственный прием (см. ниже).

**Пример 16-2.** Построить графики амплитудного и фазового спектров функции в виде отрезка синусоиды, так называемого прямоугольного импульса с синусоидальным заполнением (рис. 16-3, а). Непериодическая функция задана условием

$$f(t) = \begin{cases} \sin \omega_1 t & \text{при } 0 < t < \tau; \\ 0 & \text{при } 0 > t > \tau. \end{cases}$$

Пусть  $\tau = nT = n2\pi/\omega_1$ , где  $T$  — период синусоиды, а  $n$  — число периодов за время  $\tau$ .

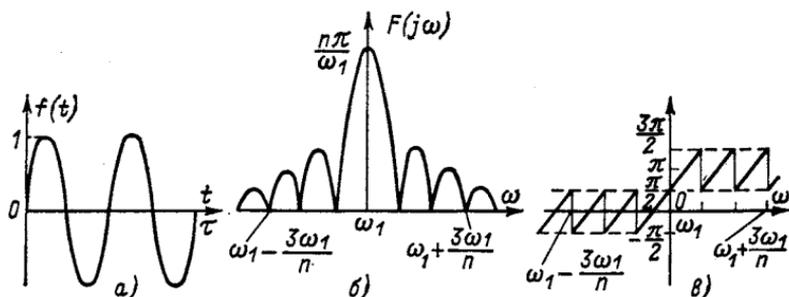


Рис. 16-3. Отрезок синусоиды (а) и его амплитудный (б) и фазовый (в) спектры.

Изображение по Лапласу отрезка синусоиды, заданного в интервале от 0 до  $n2\pi/\omega_1$ , имеет вид:

$$\frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2} (1 - e^{-pnT}).$$

На основании (16-7)

$$F(j\omega) = \frac{\omega_1}{\omega_1^2 - \omega^2} \left( 1 - e^{-j \frac{\omega}{\omega_1} n \cdot 2\pi} \right).$$

Тот же результат получится, если воспользоваться спектральной функцией прямоугольного импульса  $\frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau})$ , вычисленной в примере 16-1, и применить формулу умножения функции времени на синус (см. табл. 16-1):

$$F(j\omega) = \frac{1}{2j} \left[ \frac{1 - e^{-j(\omega - \omega_1)\tau}}{j(\omega - \omega_1)} - \frac{1 - e^{-j(\omega + \omega_1)\tau}}{j(\omega + \omega_1)} \right].$$

При  $\omega_1\tau = n \cdot 2\pi$ , где  $n$  — целое число,

$$F(j\omega) = \frac{\omega_1 (1 - e^{-j\omega\tau})}{\omega_1^2 - \omega^2}.$$

Отсюда можно получить амплитудный спектр

$$|F(j\omega)| = \left| \frac{\omega_1}{\omega_1^2 - \omega^2} 2 \sin \frac{\omega}{\omega_1} n\pi \right|.$$



При  $\omega = \omega_1$  эта функция равна предельному значению, которое находится по правилу Лопиталья:

$$|F(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \omega_1} \left| \frac{\omega_1 \frac{n\pi}{\omega_1} 2 \cos \frac{\omega}{\omega_1} n\pi}{-2\omega} \right| = \frac{n\pi}{\omega_1};$$

при  $\frac{\omega}{\omega_1} n = k$  ( $k = 0, 1, 2 \dots$ ) имеем  $|F(j\omega)| = 0$ .

Кривые  $|F(j\omega)|$  и  $\psi(\omega)$  изображены на рис. 16-3, б и в. При увеличении  $n$  амплитудный спектр группируется во все более узкой области частот вблизи  $\omega_1$ . При  $n \rightarrow \infty$  составляющая амплитудного спектра, соответствующая  $\omega = \omega_1$ , также стремится к бесконечности. Физический смысл этого аналогичен тому, что было сказано ранее.

Как отмечалось выше, интеграл (16-2) непосредственно неприменим к функциям времени, которые не удовлетворяют условию (16-1), т. е. не сходятся абсолютно. Сюда

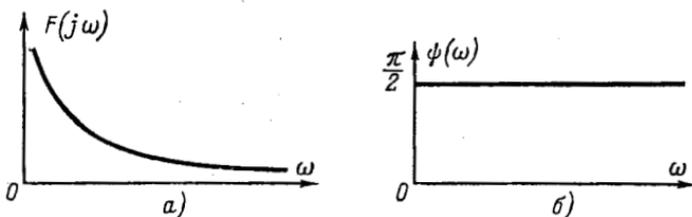


Рис. 16-4. Амплитудный (а) и фазовый (б) спектры единичной функции.

относятся и некоторые функции с показателем роста, равным нулю ( $c_0 = 0$ ), например: единичная функция, синусоидальная и др. Умножив такого рода функцию  $f(t)$  на множитель  $e^{-at}$  ( $a > 0$ ), «гасящий»  $f(t)$  при больших значениях аргумента, можно вычислить спектральную функцию для измененной функции  $e^{-at}f(t)$ ; затем, устремив  $a$  к нулю, найти предельное значение спектральной функции, которое будет представлять собой спектральную функцию исходной функции  $f(t)$ .

Например, убывающая показательная функция  $e^{-at} \cdot 1(t)$  имеет спектральную функцию  $\frac{1}{a+j\omega}$ . Ее пределом при  $a \rightarrow 0$  является выражение  $1/j\omega$ , которое и определит спектральную функцию единичной функции  $1(t)$ . Амплитудный и фазовый спектры единичной функции показаны на рис. 16-4.

Умножение заданной функции на гасящий множитель  $e^{-at}$  с последующим нахождением предельного значения  $F(j\omega)$ .

при  $a \rightarrow 0$ , вообще говоря, не требуется, если для этой функции, имеющей показатель роста, равный нулю, известно изображение по Лапласу. Тогда в силу сказанного выше (см. § 16-1) достаточно в изображении заменить  $p$  на  $j\omega$ , чтобы получить сразу спектральную функцию заданной функции.

**Пример 16-3.** Найти спектр синусоидальной функции (равной нулю при  $t < 0$ ).

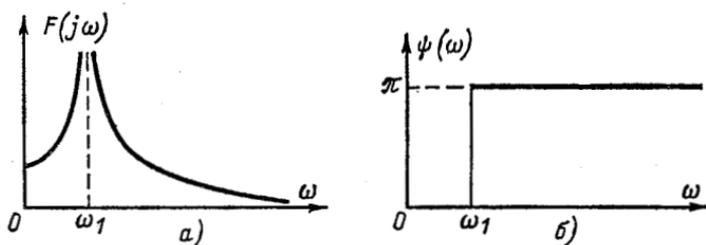


Рис. 16-5. Амплитудный (а) и фазовый (б) спектры синусоидальной функции, начинающейся в момент  $t = 0$ ,

На основании преобразования Лапласа

$$\sin \omega_1 t \stackrel{\cdot}{=} \frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2} = F(p).$$

Спектральная функция получается заменой  $p$  на  $j\omega$ :

$$F(\omega) = \frac{\omega_1}{\omega_1^2 - \omega^2}.$$

На рис. 16-5 показаны кривые амплитудного и фазового спектров этой функции.

### 16-3. ПЕРЕХОДНЫЙ ПРОЦЕСС В ДВУХПОЛЮСНИКЕ

Как отмечалось в § 16-2, представление непериодической функции в виде суммы бесконечного множества незатухающих гармонических колебаний бесконечно малой амплитуды дает возможность применять к бесконечно малым гармоническим составляющим напряжений и токов обычные методы расчета установившихся синусоидальных процессов в линейных электрических цепях и затем, пользуясь методом наложения, определять результирующие напряжения и токи.

Положим, что линейный двухполюсник, имеющий комплексное сопротивление  $Z(j\omega)$ , присоединяется в момент

$t = 0$  при нулевых начальных условиях к источнику э. д. с.  $e(t)$ .

Если через  $E(j\omega)$  обозначить спектральную функцию воздействующей э. д. с., то спектральная функция тока найдется по формуле

$$I(j\omega) = Y(j\omega) E(j\omega); \quad (16-8)$$

здесь  $Y(j\omega)$  — комплексная проводимость цепи; она определяется в установившемся режиме для всего спектра частот.

Переходный ток в двухполюснике следует найти по формуле (16-3):

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) E(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (16-9)$$

Вычисление  $i(t)$  непосредственно по формуле (16-9) не имеет преимуществ по сравнению с вычислением при помощи обратного преобразования Лапласа.

Для вычисления  $i(t)$  можно воспользоваться одним из правил нахождения функции времени по спектральной функции, которые аналогичны правилам нахождения оригинала по изображению Лапласа (с заменой  $p$  на  $j\omega$ ).

Рассматривая функцию  $Y(j\omega)$  как спектральную функцию некоторой функции времени  $y_{\delta}(t)$  и имея в виду, что  $E(j\omega)$  соответствует  $e(t)$ , можно также применить формулу умножения спектральных функций (см. табл. 16-1):

$$i(t) = \int_0^t e(\tau) y_{\delta}(t - \tau) d\tau = \int_0^t e(t - \tau) y_{\delta}(\tau) d\tau. \quad (16-10)$$

Данная формула совпадает с формулой (15-33), приведенной в § 15-11, причем  $y_{\delta}(t)$  означает реакцию цепи на импульсную функцию.

В случае, когда воздействующая э. д. с.  $e(t)$  задана в виде единичной, синусоидальной или косинусоидальной функции, причем известна частотная характеристика активной или реактивной проводимости двухполюсника, можно воспользоваться интегральной формой выражения этой функции, вытекающей из преобразования Фурье.

Рассмотрим, например, включение в момент  $t = 0$  источника постоянной э. д. с.  $E$  в цепь двухполюсника, имеющего комплексную проводимость

$$Y(j\omega) = g(\omega) - jb(\omega).$$



Пользуясь известной интегральной формой выражения единичной функции [Л. 2]

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0; \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

находим ток в контуре:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{E}{2Z(0)} + \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega t - \varphi)}{\omega |Z(j\omega)|} d\omega = \\ &= \frac{E}{2Z(0)} + \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \varphi \sin \omega t}{\omega |Z(j\omega)|} d\omega - \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \varphi \cos \omega t}{\omega |Z(j\omega)|} d\omega. \end{aligned}$$

Вводя в подынтегральное выражение активную и реактивную проводимости

$$g(\omega) = \frac{\cos \varphi}{|Z(j\omega)|} \text{ и } b(\omega) = \frac{\sin \varphi}{|Z(j\omega)|},$$

получаем:

$$i(t) = \frac{Eg(0)}{2} + \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} g(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega - \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} b(\omega) \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega. \quad (16-11)$$

Это выражение, справедливое для любого момента времени, должно обращаться в нуль при  $t < 0$ . Следовательно, при  $t > 0$   $i(-t) = 0$ , или, что то же,

$$\frac{Eg(0)}{2} - \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} g(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega - \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} b(\omega) \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega = 0. \quad (16-12)$$

Вычитая (16-12) из (16-11), находим:

$$i(t) = i(t) - i(-t) = \frac{2E}{\pi} \int_0^{\infty} g(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega \quad (\text{при } t > 0). \quad (16-13)$$

По этой формуле вычисляется переходный ток в двух-полюснике, если известна частотная характеристика только его активной проводимости  $g(\omega)$ . Знания частотной характеристики реактивной проводимости  $b(\omega)$  при этом не требуется, потому что последняя функционально связана с первой.

Аналогичная формула может быть получена и для включения синусоидальной э. д. с. [Л. 2].



Таким образом, если задана характеристика  $g(\omega)$ , то указанный метод расчета переходного тока является наиболее целесообразным.

#### 16-4. ПЕРЕХОДНЫЙ ПРОЦЕСС В ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКЕ

Для линейной электрической цепи общие методы и теоремы, относящиеся к установившемуся синусоидальному процессу (см. гл. 7 и 9), применимы к спектральным функциям непериодических функций переходного режима.

Например, если к входным выводам четырехполюсника подведено напряжение, спектральная функция которого равна  $U_1(j\omega)$ , то спектральные функции напряжения и тока на выходе четырехполюсника выражаются соответственно через передаточную функцию по напряжению  $K_U(j\omega)$  и передаточную проводимость  $Y_{21}(j\omega)$  установившегося режима:

$$U_2(j\omega) = K_U(j\omega) U_1(j\omega); \quad I_2(j\omega) = Y_{21}(j\omega) U_1(j\omega).$$

Напряжение и ток на выходе четырехполюсника вычисляются по формулам (16-3), (16-10). В частном случае, когда передаточная функция

$$K_U(j\omega) = |K_U(j\omega)| e^{-j\theta(\omega)}$$

имеет постоянный модуль, а фазу, пропорциональную частоте, т. е.

$$|K_U(j\omega)| = K = \text{const}, \quad \theta(\omega) = \omega t_3, \quad (16-14)$$

то напряжение на выходе четырехполюсника на основании теоремы смещения функции времени (см. табл. 16-1, строка б) равно:

$$U_2(j\omega) = U_1(j\omega) K e^{-j\omega t_3} \doteq K u_1(t - t_3).$$

Таким образом, если модуль коэффициента передачи по напряжению не зависит от частоты, а фазо-частотная характеристика линейна, то кривая напряжения на выходе четырехполюсника подобна кривой напряжения на входе: она изменяется в  $K$  раз и сдвигается по оси времени на  $t_3$  — время запаздывания; последнее определяется крутизной фазо-частотной характеристики

$$t_3 = \frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = \frac{\theta(\omega)}{\omega}.$$

Иначе говоря, условия (16-14) характеризуют отсутствие амплитудных и фазовых искажений при передаче любых электрических сигналов через четырехполюсник.



Частотные свойства линейной электрической цепи при установившемся синусоидальном режиме однозначно определяют переходный процесс в этой цепи при нулевых начальных условиях.

Применение преобразования Фурье к исследованию переходных процессов в линейных электрических цепях позволяет распространить на переходный режим многие понятия и свойства цепей, рассмотренные ранее для установившегося режима.

Например, ввиду равенства  $Y_{12}(j\omega)$  и  $Y_{21}(j\omega)$ , которое свойственно обратимым цепям, теорема обратимости или взаимности (см. § 7-6) сохраняет силу и в переходном режиме.

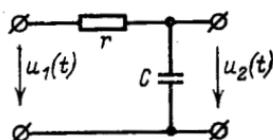


Рис. 16-6, Пример 16-4.

**Пример 16-4.** Найти спектр и временную зависимость напряжения на выходе четырехполюсника, изображенного на рис. 16-6, если на входе приложено напряжение  $u_1(t) = Ue^{-at} \mathbf{1}(t)$ .

Коэффициент передачи по напряжению

$$K_U(j\omega) = \frac{1}{r + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega C}.$$

Приложенное напряжение имеет спектральную функцию

$$U_1(j\omega) = \frac{U}{a + j\omega}.$$

Следовательно, спектральная функция выходного напряжения:

$$U_2(j\omega) = \frac{U}{(a + j\omega)(1 + j\omega rC)}.$$

Заменяя  $j\omega$  на  $p$  и пользуясь таблицей изображений по Лапласу, получаем:

$$u_2(t) = \frac{U}{1 - arC} \left( e^{-at} - e^{-\frac{1}{rC}t} \right).$$

Тот же результат получается и по формуле (16-10), если рассматривать функцию  $K_U(j\omega)$  как спектральную функцию времени:

$$y_0(t) = \frac{1}{rC} e^{-\frac{1}{rC}t};$$

$$u_2(t) = \int_0^t \frac{U}{rC} e^{-a\tau} e^{-\frac{1}{rC}(t-\tau)} d\tau = \frac{U}{1 - arC} \left( e^{-at} - e^{-\frac{1}{rC}t} \right).$$

## 16-5. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

16-1. Найти амплитудный и фазовый спектры непериодической убывающей показательной функции  $e^{-at} \cdot 1(t)$  и построить частотные характеристики.

16-2. Найти амплитудный и фазовый спектры непериодической затухающей синусоиды  $e^{-at} \sin \omega_1 t \cdot 1(t)$  и построить частотные характеристики.

16-3. Найти амплитудный и фазовый спектры прямоугольного импульса с косинусоидальным заполнением (число периодов целое) и построить частотные характеристики.

16-4. Решить задачу 16-3, применив формулу дифференцирования функции времени, если известна спектральная функция прямоугольного импульса с синусоидальным заполнением.

16-5. Симметричный T-образный четырехполюсник, состоящий из двух сопротивлений  $r$  в продольных ветвях и емкости  $C$  в поперечной ветви, закорочен на выходе и затем подключен к источнику постоянной э. д. с.  $E$ . Определить ток в закороченных выводах четырехполюсника спектральным методом.

$$\text{О т в е т: } \frac{E}{2r} \left( 1 - e^{-\frac{2}{rC} t} \right).$$

16-6. Найти спектральную функцию треугольного импульса.

16-7. Сопротивление  $r$ , индуктивность  $L$  и емкость  $C$ , соединенные параллельно, подключены при  $t = 0$  к источнику постоянного тока  $I$ . Найти напряжение на выводах цепи при нулевых начальных условиях спектральным методом.

16-8. Доказать, что пилообразная функция с высотой зубцов, равной 1, и шириной каждого зубца, равной  $a$ , имеет спектральную функцию

$$\frac{1}{a(j\omega)^2} - \frac{e^{-j\omega a}}{j\omega(1 - e^{-j\omega a})}.$$

16-9. Сравнить спектральные функции затухающих синусоид вида  $e^{-at} \sin 314 t$  при  $a = 50$  и  $a = 500$ .

16-10. Какая связь существует между спектральной функцией и коэффициентом ряда Фурье?

16-11. В чем заключается родственность преобразований Фурье и Лапласа?

16-12. О чем можно судить на основании спектральной функции электрического сигнала?

16-13. Доказать применимость теоремы обратимости (взаимности) в переходном режиме линейной цепи при нулевых начальных условиях.

16-14. Доказать применимость теоремы об эквивалентном источнике к расчету переходных процессов с помощью преобразования Фурье.

16-15. Сформулировать условия, при которых переходный процесс на выходе четырехполюсников, имеющих разную структуру, одинаков.

16-16. Пользуясь теоремой об эквивалентном источнике, вывести общее условие эквивалентности источников э. д. с. и тока  $E(j\omega) = Z(j\omega) I(j\omega)$ , где  $E(j\omega)$  и  $I(j\omega)$  — спектральные функции э. д. с. и соответственно тока эквивалентных источников;  $Z(j\omega)$  — их внутреннее комплексное сопротивление (т. е. сопротивление последовательной ветви источника напряжения, равное сопротивлению параллельной ветви источника тока).

## СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

## 17-1. ХАРАКТЕРИСТИКА ЗАДАЧ СИНТЕЗА

При проектировании различного рода устройств автоматического управления, каналов электропроводной и радиосвязи и т. п. возникает необходимость подбора схем и параметров электрических цепей, отвечающих определенным требованиям. Нахождение схемы и элементов электрической цепи, удовлетворяющей заданным условиям, составляет задачу синтеза электрической цепи.

Ввиду того что установившийся и переходный процессы во всякой линейной электрической цепи зависят от частотных свойств цепи, задача синтеза обычно сводится к нахождению цепи по заданной частотной характеристике. Искомым может быть двухполюсник с заданной зависимостью сопротивления (или проводимости) от частоты либо четырехполюсник с заданной передаточной функцией или частотной зависимостью его параметров. Построение схемы пассивной цепи по заданной частотной функции принято называть реализацией или осуществлением функции.

В отличие от задачи анализа, в которой искомая величина — реакция цепи на приложенное воздействие — получается однозначно, задача синтеза может иметь несколько решений или вовсе не иметь решения в заданном классе электрических цепей. Данная глава посвящена синтезу пассивных обратимых цепей, поэтому заданную частотную функцию будем считать реализуемой или осуществимой, если соответствующая ей электрическая цепь может быть составлена из сопротивлений, индуктивностей и емкостей (возможно также применение трансформаторов).

Поскольку задача синтеза может иметь несколько решений, возникает необходимость сопоставления полученных вариантов и выбора оптимального решения.

В этом вопросе не имеется вполне определенного критерия, так как приходится сравнивать схемы с разнородными элементами. При этом обычно руководствуются следующими соображениями. Желательны схемы с наименьшим количеством элементов, имеющие практически приемлемые па-



раметры, причем предпочтение следует отдавать схемам, содержащим простейшие элементы — сопротивления и емкости.

Индуктивность — менее желательный элемент цепи. Если в схеме последовательно включены индуктивность и сопротивление, то они могут быть практически выполнены в виде индуктивной катушки. Однако при этом приходится считаться с витковой емкостью, которая может внести в работу цепи искажения при высоких частотах.

Еще менее желательным элементом схемы является трансформатор, практическое осуществление которого сопряжено с появлением тепловых потерь и межвитковых емкостей. Кроме того, коэффициент связи может не совпадать с расчетным.

В задачах синтеза частотные характеристики сопротивлений, проводимостей или передаточных функций могут быть заданы графически или аналитически. Если характеристика задана графически или не является рациональной функцией, то она приближенно аппроксимируется рациональной функцией, т. е. отношением двух полиномов, которое по определенным правилам синтеза реализуется в виде двух- или четырехполюсника.

Таким образом, первым этапом в задаче синтеза является аппроксимация заданной частотной характеристики рациональной функцией; этот этап, относящийся к области математики, здесь не рассматривается. Второй этап заключается в реализации рациональной функции, что и составляет основное содержание данной главы.

## 17-2. ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХПОЛЮСНИКА ПРИ КОМПЛЕКСНОЙ ЧАСТОТЕ

При исследовании переходных процессов в линейных электрических цепях мы пользовались понятиями комплексной частоты  $p = s + j\omega$  и операторного сопротивления  $Z(p)$ . Если  $Z(j\omega)$  представляет собой комплексное сопротивление цепи, то операторное сопротивление получается заменой  $j\omega$  через  $p$ .

В общем случае, пользуясь комплексной частотой  $p$ , можно представить операторное сопротивление  $Z(p)$  как отношение двух полиномов, которые не имеют общих корней

$$Z(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}, \quad (17-1)$$



т. е.  $Z(p)$  является рациональной функцией  $p$ . Обозначив через  $p_1, p_3, \dots, p_{2n-1}$  корни числителя (число их равно степени полинома  $n$ ) и через  $p_2, p_4, \dots, p_{2m}$  корни знаменателя (число их равно степени полинома  $m$ ), разложим числитель и знаменатель на множители:

$$Z(p) = \frac{H(p-p_1)(p-p_3)\dots(p-p_{2n-1})}{(p-p_2)(p-p_4)\dots(p-p_{2m})}; \quad (17-2)$$

здесь  $H = a_n/b_m$  — постоянный множитель (действительное число);  $p_{2k-1}$  — нули функции  $Z(p)$ ;  $p_{2k}$  — полюсы  $Z(p)$ .

Расположение полюсов и нулей функции  $Z(p)$  на комплексной плоскости характеризует частотные свойства линейной электрической цепи, от которых в свою очередь зависят установившийся и переходный процессы в данной цепи.

Нули функции  $Z(p)$  двухполюсника являются корнями характеристического уравнения (см. гл. 14). Они могут быть любыми числами, но обязательно с отрицательной действительной частью, так как эта часть определяет физически затухание свободных токов в данной цепи. В предельном случае незатухающих колебаний в цепи действительная часть корней равна нулю. Это условие распространяется также на нули функции  $Z(p)$  дуального двухполюсника, которая равна функции  $Y(p)$  исходного двухполюсника, где  $Y(p) = 1/Z(p)$ . Но нули функции  $Y(p)$  есть в то же время полюсы функции  $Z(p)$ . Поэтому *полюсы  $Z(p)$ , так же как и нули, располагаются в левой части комплексной плоскости и на оси мнимых чисел.*

Из выражения (17-2) следует, что свойства функции  $Z(p)$  полностью определяются расположением нулей и полюсов. Если у двухполюсников, имеющих разные структуры, нули и полюсы функции  $Z(p)$  совпадают, а множители  $H$  одинаковы, то такие двухполюсники эквивалентны.

Рассмотрим основные свойства функций сопротивления и проводимости.

Функция сопротивления  $Z(p)$  и функция проводимости  $Y(p)$  являются положительными действительными функциями.

Функция  $Z(p)$  комплексного переменного  $p$  называется положительной действительной функцией, если она удовлетворяет двум требованиям:

1) комплексным числам  $p$  в правой полуплоскости соответствуют значения  $Z(p)$ , расположенные также в правой полуплоскости, т. е. действительная часть функции  $Z(p)$



при положительных действительных частях  $p$  положительна (отсюда название «положительная» функция);

2) функция  $Z(p)$  действительна при действительных значениях  $p$  (отсюда название «действительная» функция).

Убедимся теперь в том, что обобщенное сопротивление двухполюсника  $Z(p)$ , представляющее собой рациональную функцию вида (17-1), удовлетворяет указанным выше двум условиям.

В самом деле, поскольку полюсы  $Z(p)$  могут находиться лишь в левой полуплоскости и на мнимой оси,  $Z(p)$  аналитична в правой полуплоскости. Кроме того, при любой частоте  $\omega$  средняя мощность, поступающая в пассивную цепь, не отрицательна:

$$P = \operatorname{Re} [Z(j\omega)] I^2 \geq 0.$$

Так как  $I^2 > 0$ , то и действительная часть комплексного сопротивления не отрицательна:

$$\operatorname{Re} [Z(j\omega)] \geq 0. \quad (17-3)$$

На основании принципа максимума и минимума модуля следует, что наибольшие и наименьшие значения действительной части функции  $Z(p)$ , аналитичной в правой полуплоскости, достигаются только в граничных точках области. В данном случае границей области является мнимая ось, где  $Z(p)$  принимает значения  $Z(j\omega)$ .

Следовательно, с учетом (17-3)

$$\operatorname{Re} [Z(p)] \geq 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} p \geq 0. \quad (17-4)$$

Если на мнимой оси расположены полюсы, то они могут быть обойдены дугами окружностей сколь угодно малого радиуса и предыдущие рассуждения могут быть отнесены к оставшейся части.

Итак, согласно (17-4) для  $Z(p)$  выполняется первое условие:  $Z(p)$  — положительная функция.

Коэффициенты полиномов в числителе и знаменателе (17-1) должны быть положительными и действительными, так как только в этом случае корни этих полиномов, соответствующие нулям и полюсам функции  $Z(p)$ , как уже было отмечено выше, располагаются в левой полуплоскости. В этом случае при действительных значениях аргумента функция  $Z(p)$  принимает действительные значения. Следовательно, выполняется второе условие:  $Z(p)$  — действительная функция.



Таким образом, операторное сопротивление любого пассивного двухполюсника представляет собой положительную действительную функцию.

Операторная проводимость пассивного двухполюсника также является положительной действительной функцией. В этом легко убедиться, приняв  $Z(p) = r(c, \omega) + jx(c, \omega)$ , где  $p = c + j\omega$ .

Очевидно,

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{1}{r + jx} = \frac{r - jx}{r^2 + x^2}.$$

В правой полуплоскости  $r > 0$  и  $r/(r^2 + x^2) > 0$ ; при этом действительным значениям  $p$  соответствуют действительные значения  $Y(p)$ .

Таким образом,  $Y(p)$  удовлетворяет требованиям, предъявляемым к положительным действительным функциям.

Остальные свойства функций сопротивления и проводимости вытекают из свойств положительных действительных функций.

1. Если на мнимой оси имеются нули или полюсы, то все они простые, причем вычеты в полюсах и производные в нулях действительны и положительны.

Допустим, что функция  $Z(p)$  имеет  $m$ -кратный полюс в точке  $p = j\omega_0$ . Разложение Лорана в окрестности полюса записывается в виде

$$Z(p) = \frac{c_{-m}}{(p - j\omega_0)^m} - \frac{c_{-(m-1)}}{(p - j\omega_0)^{m-1}} + \dots \\ \dots + \frac{c_{-1}}{p - j\omega_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (p - j\omega_0)^k.$$

В достаточно малой окрестности точки  $p = j\omega_0$  поведение функции  $Z(p)$  определяется первым членом разложения

$$Z(p) \approx \frac{c_{-m}}{(p - j\omega_0)^m}.$$

Пусть  $c_{-m} = Ae^{j\theta}$  и  $p - j\omega_0 = \rho e^{j\psi}$ , где  $\rho > 0$  сколь угодно малая величина (рис. 17-1).

Для действительной части функции  $Z(p)$  получается выражение

$$\operatorname{Re} Z(p) \approx \operatorname{Re} \frac{A}{\rho^m} e^{j(\theta - m\psi)} = \frac{A}{\rho^m} \cos(m\psi - \theta).$$

При обходе вокруг точки  $j\omega_0$  по окружности радиусом  $\rho$  угол  $\psi$  изменяется от 0 до  $2\pi$ , значение же  $\theta$  сохраняется неизменным. Знак действительной части определяется в этом случае знаком  $\cos(m\psi - \theta)$ , который при обходе  $m$ -кратного полюса изменяется  $2m$  раз.



Если  $Z(p)$  — положительная функция, то действительная часть ее в правой полуплоскости положительна и не меняет знака. Следовательно, полюс, расположенный на мнимой оси, должен быть простым ( $m = 1$ ), причем угол  $\theta$  должен быть равным нулю, а величина  $A = c_{-1}$  должна быть положительной, только при этих условиях

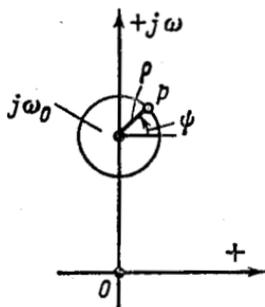


Рис. 17-1. Полюс на мнимой оси.

Re  $Z(p) \approx \frac{c_{-1}}{p} \cos \psi$  сохраняет положительный знак в правой полуплоскости  $p$ , где  $-\pi/2 < \psi < \pi/2$ ; здесь  $c_{-1}$  — вычет функции  $Z(p)$  в точке  $p = j\omega_0$ .

Поскольку  $Y(p) = 1/Z(p)$  — положительная действительная функция, то указанное выше свойство распространяется и на  $Y(p)$ , а именно: если на мнимой оси имеются полюсы функции  $Y(p)$ , то они простые и вычеты в этих полюсах действительны и положительны. Но простой полюс функции  $Y(p)$  есть простой нуль функции  $Z(p)$ , а вычет функции  $Y(p)$  в простом полюсе обратен производной  $dZ(p)/dp$  в нуле функции  $Z(p)$ . Следовательно, на мнимой оси нули могут быть только простыми, причем производные в них действительны и положительны.

**2. Нули и соответственно полюсы рациональной положительной действительной функции могут быть действительными или комплексно-сопряженными.**

Данное положение следует из того, что рациональная функция является положительной действительной функцией только в том случае, если все коэффициенты полиномов в числителе и знаменателе действительны и одинакового знака. Замена комплексного аргумента  $p$  сопряженной величиной  $p^*$  дает при таком условии сопряженную функцию  $Z^*(p) = Z^*(p)$ . Поэтому если  $p_0$  — комплексный нуль функции  $Z(p)$ , то наряду с равенством  $Z(p_0) = 0$  обязательно должно выполняться равенство  $Z^*(p_0) = Z^*(p_0) = 0$ ; иначе говоря,  $p_0^*$  является также нулем функции  $Z(p)$ .

То же положение распространяется на нули функции  $Y(p) = 1/Z(p)$ , т. е. на полюсы функции  $Z(p)$ .

На основании сказанного комплексные нули и полюсы  $Z(p)$  располагаются симметрично относительно действительной оси, т. е. образуют сопряженные пары. То же можно сказать о функции  $Y(p)$ .

**3. Наибольшие и соответственно наименьшие показатели степеней  $p$  в числителе и знаменателе положительной действительной функции не могут различаться более чем на единицу.**



С ростом  $|p|$  функция (17-1) или, что то же, (17-2) стремится к  $Hp^{n-m}$ . Ввиду того что бесконечно удаленную точку можно считать лежащей на мнимой оси, на основании свойства 1 соответствующий нуль или полюс функции должен быть простым.

Если  $p = \infty$  есть простой нуль или полюс, то степень числителя на единицу ниже или выше степени знаменателя. Возможны три случая при  $p \rightarrow \infty$ :

- 1)  $Z(p) \rightarrow Hp$ , когда  $n - m = 1$ ;
- 2)  $Z(p) \rightarrow H/p$ , когда  $n - m = -1$ ;
- 3)  $Z(p) \rightarrow H > 0$ , когда  $n - m = 0$ .

Поскольку точка  $p = 0$  (начало координат) принадлежит мнимой оси, на основании свойства 1 нуль или полюс в точке  $p = 0$  должен быть простым. Следовательно, наименьшие показатели степеней в числителе и знаменателе положительной действительной функции не могут различаться более чем на единицу. Возможны три случая при  $p \rightarrow 0$ :

- 1)  $Z(p) = a_0/b_0$ , когда  $a_0 \neq 0$ ,  $b_0 \neq 0$ ;
- 2)  $Z(p) = a_0/b_1p$ , когда  $a \neq 0$ ,  $b_0 = 0$ ;
- 3)  $Z(p) = a_1p/b_0$ , когда  $a_0 = 0$ ,  $b_0 \neq 0$ .

При исследовании частотных свойств двухполюсника текущая переменная  $p$  берется на мнимой оси ( $p = j\omega$ ). Частотные свойства двухполюсников определяются при этом расположением нулей и полюсов на мнимой оси.

Выражение (17-2) может быть переписано в показательной форме. Обозначив через  $M_{2k-1}$  и  $\alpha_{2k-1}$  модуль и аргумент бинома  $(p - p_{2k-1})$ , а через  $M_{2k}$  и  $\alpha_{2k}$  модуль и аргумент бинома  $(p - p_{2k})$ , получим:

$$Z(p) = H \frac{M_1 M_3 \dots M_{2n-1}}{M_2 M_4 \dots M_{2m}} \angle \alpha; \quad (17-5)$$

$$\alpha = (\alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2n-1}) - (\alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2m}).$$

Следовательно, для выбранного значения  $p$  модуль функции  $Z(p)$  определяется отношением произведения модулей  $(p - p_{2k-1})$  к произведению модулей  $(p - p_{2k})$ ; аргумент функции  $Z(p)$  определяется разностью суммы аргументов  $(p - p_{2k-1})$  и суммы аргументов  $(p - p_{2k})$ .

Из выражения (17-5) в виду симметрии расположения нулей и полюсов относительно действительной оси следует, что модули функций  $Z(j\omega)$  и  $Y(j\omega)$  четны относительно  $\omega$ , так как все модули для  $+j\omega$  и  $-j\omega$  одинаковы, а аргументы их нечетны относительно  $\omega$ .



Итак, по расположению на комплексной плоскости нулей и полюсов (операторного) сопротивления  $Z(p)$  можно судить как о характере самой цепи, так и о ее частотных свойствах.

### 17-3. УСЛОВИЯ ФИЗИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗУЕМОСТИ ФУНКЦИИ

В задачах синтеза функция  $Z(p)$  может быть задана непосредственно или получена из частотной характеристики  $Z(j\omega)$  с помощью подстановки  $j\omega = p$ .

*Функция считается физически реализуемой, если соответствующая ей электрическая цепь может быть составлена из элементов (сопротивлений, индуктивностей, емкостей) с положительными действительными параметрами.*

Для всякой действительной положительной функции может быть построен двухполюсник, для которого она является обобщенным сопротивлением (или проводимостью). Поэтому условие положительности и действительности функции является достаточным для ее реализуемости. В связи с этим, если требуется построить двухполюсник по заданной рациональной функции, предварительно выясняют, является ли она положительной и действительной.

В соответствии с тем, что было сказано в предыдущем параграфе, рациональная функция является положительной и действительной, если одновременно выполняются следующие условия:

- 1) все коэффициенты полиномов действительны (условие действительности функции);
- 2) в правой полуплоскости полюсы отсутствуют (условие аналитичности функции);
- 3) в бесконечно удаленной точке функция ведет себя, как  $Np$ ,  $N$  или  $N/p$  (свойство 3);
- 4) полюсы на мнимой оси могут быть только простыми с действительными и положительными вычетами (свойство 1);
- 5) действительная часть функции на мнимой оси не отрицательна [условие (17-3)].

Перечисленные условия являются необходимыми и достаточными, чтобы заданная рациональная функция была положительной и действительной. Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то заданная функция не есть положительная действительная функция.

Условия 1 и 3 проверить легко непосредственно по виду функции. Для проверки условий 2 и 4 существует метод,



не требующий определения расположения всех полюсов функции и использующий свойства полиномов Гурвица.

Полиномом Гурвица называется полином, корни которого расположены в левой полуплоскости и на оси мнимых чисел, причем полюсы на мнимой оси простые. Из этого определения следует, что числитель и знаменатель положительной действительной функции должны быть полиномами Гурвица.

Чтобы проверить, является ли данный полином  $A(p)$  полиномом Гурвица, его представляют в виде суммы полиномов с четными и нечетными степенями.

Полином  $A(p)$  является полиномом Гурвица, если функция  $A_{\text{ч}}(p)/A_{\text{н}}(p)$  или обратная ей функция могут быть разложены в непрерывную дробь вида

$$c_0 p + \frac{1}{c_1 p + \frac{1}{c_2 p + \frac{1}{\ddots} + \frac{1}{c_n p}}}$$

с положительными коэффициентами  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ . Последовательность разложения в непрерывную дробь описана в § 17-4.

Действительная часть функции на мнимой оси  $[\operatorname{Re} Z(j\omega)]$  сравнительно просто находится, если полиномы  $A(p)$  и  $B(p)$  в числителе и знаменателе (17-1) представить как суммы полиномов с четными и нечетными степенями  $p$ :

$$A(p) = A_{\text{ч}}(p) + A_{\text{н}}(p); \quad B(p) = B_{\text{ч}}(p) + B_{\text{н}}(p).$$

При этом

$$Z(p) = \frac{A(p) B(-p)}{B(p) B(-p)} = \frac{[A_{\text{ч}}(p) + A_{\text{н}}(p)] [B_{\text{ч}}(-p) + B_{\text{н}}(-p)]}{B(p) B(-p)},$$

откуда с учетом равенств  $B_{\text{ч}}(-p) = B_{\text{ч}}(p)$  и  $B_{\text{н}}(-p) = -B_{\text{н}}(p)$

$$Z(p) = \frac{A_{\text{ч}}(p) B_{\text{ч}}(p) - A_{\text{н}}(p) B_{\text{н}}(p)}{B(p) B(-p)} + \frac{A_{\text{н}}(p) B_{\text{ч}}(p) - A_{\text{ч}}(p) B_{\text{н}}(p)}{B(p) B(-p)}.$$

При  $p = j\omega$  первое слагаемое, четное относительно частоты  $\omega$ , выражает активное сопротивление двухполюсника, а второе слагаемое, нечетное относительно частоты, выражает реактивное сопротивление.

Итак,

$$\operatorname{Re} Z(j\omega) = \left[ \frac{A_{\text{ч}}(p) B_{\text{ч}}(p) - A_{\text{н}}(p) B_{\text{н}}(p)}{B(p) B(-p)} \right]_{p=j\omega}. \quad (17-6)$$

Знаменатель выражения (17-6) на мнимой оси  $B(j\omega) B(-j\omega) = |B(j\omega)|^2$  положителен. Следовательно, условие неотрицательности действительной части функции можно записать в виде

$$[A_{\text{ч}}(p) B_{\text{ч}}(p) - A_{\text{н}}(p) B_{\text{н}}(p)]_{p=j\omega} \geq 0.$$



В случае реактивного двухполюсника выражение (17-6) обращается в нуль, т. е. выполняется условие (при  $p = j\omega$ )

$$A_{\text{ч}}(p) B_{\text{ч}}(p) = A_{\text{н}}(p) B_{\text{н}}(p).$$

При этом

$$Z(p) = \frac{A_{\text{ч}}(p) + A_{\text{н}}(p)}{B_{\text{ч}}(p) + B_{\text{н}}(p)} = \frac{A_{\text{ч}}(p) + \frac{A_{\text{ч}}(p) B_{\text{ч}}(p)}{B_{\text{н}}(p)}}{B_{\text{ч}}(p) + B_{\text{н}}(p)} = \frac{A_{\text{ч}}(p)}{B_{\text{н}}(p)} = \frac{A_{\text{н}}(p)}{B_{\text{ч}}(p)}.$$

Следовательно, в случае реактивного двухполюсника полином в числителе (17-1) содержит только четные, а в знаменателе — только нечетные степени, или наоборот.

**Пример 17-1.** Проверить положительность и действительность функции

$$F(p) = \frac{p^2 + p + 2}{p + 1}.$$

- 1) коэффициенты полиномов действительны;
- 2) в правой полуплоскости полюсы отсутствуют;
- 3) в бесконечности функция ведет себя, как  $p$ ;
- 4) на мнимой оси полюсов нет;
- 5)  $\operatorname{Re} Z(j\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2} \geq 0$ .

Проверка показывает, что заданная функция является положительной действительной.

#### 17-4. СВОЙСТВА ДВУХЭЛЕМЕНТНЫХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ

Под двухэлементными двухполюсниками понимают двухполюсники с элементами двух типов ( $L$  и  $C$ ;  $r$  и  $C$  или  $r$  и  $L$ ).

В случае, когда двухполюсник состоит только из реактивных элементов, т. е. если потери электрической энергии в нем отсутствуют, аргумент сопротивления составляет  $\pm 90^\circ$ . В соответствии с (17-5) прямой угол возможен только при условии, что все нули и полюсы лежат на мнимой оси.

Как показано выше, функция  $Z(p)$  реактивного двухполюсника представляет собой отношение полиномов, один из которых содержит четные, а другой — нечетные степени  $p$ . При этом общее число нулей и полюсов нечетно, следовательно, в начале координат (т. е. в точке  $p = 0$ ) должен находиться нуль или полюс.

Нули или полюсы должны обязательно чередоваться. Если бы за нулем следовал нуль или за полюсом — полюс, то в соответствии с (17-5) при некоторых частотах угол был бы равен  $\pm 180^\circ$ , что противоречило бы условию, что на выводах реактивного двухполюсника фазовый угол между напряжением и током не превышает  $90^\circ$ . Таким образом,



Для реактивных двухполюсников характерным является расположение нулей и полюсов, показанное на рис. 17-2, а—г.

В случае, когда двухполюсник состоит из элементов  $r, L$  или  $r, C$ , нули и полюсы  $Z(p)$  располагаются по действительной оси (в левой полуплоскости). Аргумент комплексного сопротивления такого двухполюсника не достигает  $\pm 90^\circ$ , поэтому нули и полюсы должны быть не только простыми, но и чередоваться. Числа нулей и полюсов могут различаться не более чем на единицу.

При частоте, равной нулю, сопротивление двухполюсника типа  $r, L$ , в зависимости от его структуры равно нулю или имеет действительное значение. Поэтому нуль  $Z(p)$  такого двухполюсника либо совпадает с началом координат (рис. 17-3, а), либо смещен влево по действительной оси (рис. 17-3, б); при этом ближайшим к началу координат является нуль, а не полюс. При бесконечной частоте сопротивление двухполюсника типа  $r, L$  действительно или бесконечно велико.

Что касается сопротивления двухполюсника типа  $r, C$ , то при частоте, равной нулю, оно имеет действительное значение (рис. 17-3, в) или бесконечно велико (рис. 17-3, г). Ближайшим к началу координат является полюс, а не нуль. При бесконечной частоте сопротивление обращается в нуль или действительное число.

Поменяв местами нули и полюсы  $Z(p)$ , получим картину расположения нулей и полюсов  $Y(p)$ .

Следует заметить, что при наличии потерь, когда нули и полюсы функции являются действительными или комплексными величинами, сопротивление и проводимость не могут принимать нулевые или бесконечно большие значения

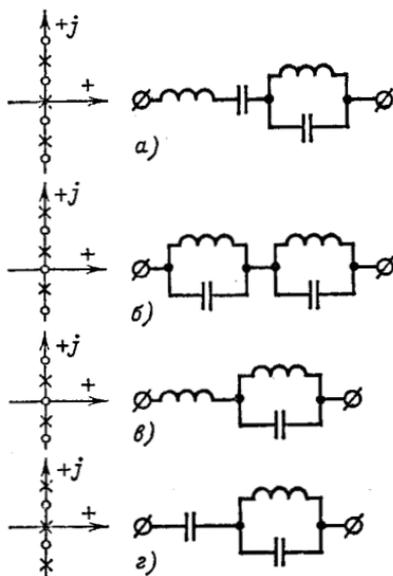


Рис. 17-2. Расположение нулей и полюсов  $Z(p)$  в случае реактивного двухполюсника.

в точках, лежащих на мнимой оси. Однако при частоте, соответствующей проекции полюса на мнимую ось, абсолютное значение исследуемой функции проходит через максимум, а при частоте, соответствующей проекции нуля на мнимую ось, оно проходит через минимум. Чем меньше

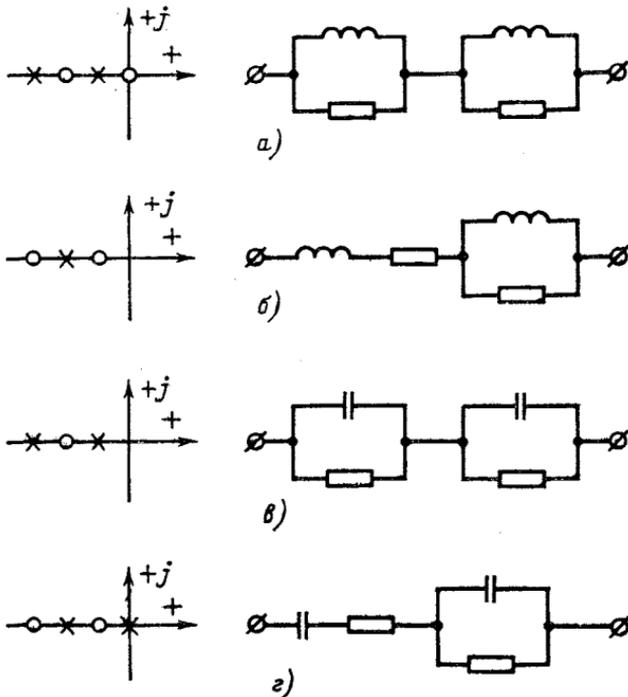


Рис. 17-3. Расположение нулей и полюсов в случае двух-полюсников  $r, L$  (а и б) и  $r, C$  (в и г).

действительные части полюсов и нулей, тем резче выражаются максимумы и минимумы функций.

Рассмотрим реализацию двухэлементных двухполюсников по методу канонических схем Фостера и методом разложения в непрерывную дробь (реализация по Кауэру).

### Метод канонических схем Фостера

Рассмотрение решения задачи синтеза начнем с более простого метода реализации функции сопротивления  $Z(p)$  реактивного двухполюсника.

Если степень числителя превосходит степень знаменателя, то

$$Z(p) = \alpha_{\infty} p + Z_0(p); \quad (17-7)$$

здесь  $\alpha_{\infty} = H$  — действительная положительная величина. Если степень числителя меньше степени знаменателя, то в выражении (17-7)  $\alpha_{\infty} = 0$ .

Действительная часть  $\alpha_{\infty} p$  на мнимой оси равна нулю, поэтому

$$\operatorname{Re} Z_0(j\omega) = \operatorname{Re} Z(j\omega) \geq 0.$$

Ввиду того что функция  $Z_0(p)$ , получившаяся из  $Z(p)$  после выделения  $\alpha_{\infty} p$ , не отрицательна на мнимой оси,  $Z_0(p)$  — положительная действительная функция.

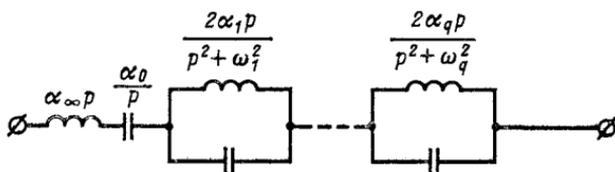


Рис. 17-4. Первая каноническая схема Фостера цепи  $L, C$ .

Полюсы  $Z_0(p)$  совпадают с полюсами  $Z(p)$  за исключением полюса в бесконечности. Следовательно,  $Z_0(p)$  имеет полюсы  $\pm j\omega_k$  и 0 на мнимой оси с вычетами  $\alpha_k$  и  $\alpha_0$ , причем на основании свойства 1 (см. § 17-2) эти полюсы простые, а  $\alpha_k$  и  $\alpha_0$  — действительные положительные числа. В связи с этим разложение  $Z_0(p)$  на простейшие дроби дает<sup>1</sup>:

$$Z_0(p) = \frac{\alpha_0}{p} + \sum_{k=1}^q \frac{\alpha_k}{p + j\omega_k} + \sum_{k=1}^q \frac{\alpha_k}{p - j\omega_k} = \frac{\alpha_0}{p} + \sum_{k=1}^q \frac{2\alpha_k p}{p^2 + \omega_k^2}. \quad (17-8)$$

Подставляя (17-8) в (17-7), находим:

$$Z(p) = \alpha_{\infty} p + \frac{\alpha_0}{p} + \sum_{k=1}^q \frac{2\alpha_k p}{p^2 + \omega_k^2}. \quad (17-9)$$

Полученному выражению соответствует схема, изображенная на рис. 17-4, которая называется первой канонической схемой Фостера.

<sup>1</sup> Вычеты  $\alpha_k$  в сопряженных мнимых полюсах равны в силу того, что они действительны.



Полюс  $p = \infty$  обусловлен наличием в схеме индуктивности  $L_\infty = \alpha_\infty$ , а полюс  $p = 0$  — наличием емкости  $C_0 = 1/\alpha_0$ . Паре комплексно сопряженных мнимых корней  $\pm j\omega_k$  соответствует параллельное включение емкости  $C_k = 1/2\alpha_k$  и индуктивности  $L_k = 2\alpha_k/\omega_k^2$ .

Аналогично можно показать, что функция проводимости реактивного двухполюсника может быть записана в виде

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)} = \alpha_\infty p + \frac{\alpha_0}{p} + \sum_{k=1}^q \frac{2\alpha_k p}{p^2 + \omega_k^2}, \quad (17-10)$$

где  $\alpha_k$  и  $\alpha_0$  — вычеты  $Y(p)$  в полюсах  $\pm j\omega_k$  и 0.

Выражению (17-10) соответствует схема на рис. 17-5, которая носит название второй канонической схемы Фостера.

Реализацию функций двухполюсников типа  $r, L$  и  $r, C$  получим, используя реализацию двухполюсников типа  $L, C$ .

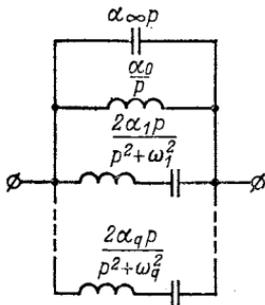


Рис. 17-5. Вторая каноническая схема Фостера цепи  $L, C$ .

Сопротивление произвольной ветви цепи  $L, C$  можно записать в виде

$$Z_{LC}(p) = pL + \frac{1}{pC} = \frac{1}{p} \left( p^2 L + \frac{1}{C} \right). \quad (17-11)$$

Если в ветви отсутствует индуктивность или емкость, то отсутствует соответствующий член выражения (17-11).

Сравнивая уравнение (17-11) с выражением для сопротивления ветви  $r, L$ , в котором оператор  $p$  заменен на  $p^2$ ,

$$Z_{rL}(p^2) = p^2 L + r,$$

приходим к выводу, что выражение для сопротивления ветви  $r, L$  в функции от  $p^2$  можно получить из выражения для сопротивления ветви  $L, C$ , умножив его на  $p$  (замена  $1/C$  на  $r$  не меняет характера функции). Чтобы получить  $Z_{rL}(p)$ , остается заменить  $p^2$  на  $p$ . Это справедливо и для получения выражения сопротивления любого сложного двухполюсника, т. е. для любых двухполюсников типа  $r, L$  и  $L, C$ , имеющих одинаковую схему соединения элементов,

$$Z_{rL}(p) = p Z_{LC}(p). \quad (17-12)$$

Справедливость равенства (17-12) следует из формулы (7-9) для входного сопротивления или проводимости двух-

полюсника. Согласно этой формуле входное сопротивление определяется как отношение определителя матрицы контурных сопротивлений к его алгебраическому дополнению.

Определитель матрицы контурных сопротивлений представляет собой алгебраическую сумму произведений, каждое из которых содержит  $n$  сопротивлений ветвей ( $n$  — число независимых контуров). Сопротивление каждой ветви цепи  $r, L$  в функции от  $p^2$  отличается от сопротивления соответствующей ветви цепи  $L, C$  множителем  $p$ , тогда выражения определителей цепей  $r, L$  и  $r, C$  отличаются множителем  $p^n$ .

Поскольку алгебраическое дополнение представляет собой алгебраическую сумму произведений, каждое из которых содержит  $n - 1$  сопротивлений ветвей, то алгебраические дополнения цепей  $r, L$  и  $L, C$  отличаются множителем  $p^{n-1}$ . После сокращения множителей  $p^{n-1}$  в числителе и знаменателе входного сопротивления получим равенство (17-12).

Если указанное выше правило получения выражения для сопротивления двухполюсника типа  $r, L$  применить непосредственно к разложению (17-9), то, обозначая  $2\alpha_k$  через  $\alpha'_k$  и  $\omega_k^2$  через  $\beta_k$ , получаем разложение для функции сопротивления произвольного двухполюсника типа  $r, L$  в виде

$$Z(p) = \alpha_{\infty} p + \alpha_0 + \sum_{k=1}^q \frac{\alpha'_k p}{p + \beta_k}. \quad (17-13)$$

Величина  $-\beta_k$  определяет действительный полюс функции, а  $\alpha'_k$  — вычет в этом полюсе. Функции в выражении (17-13) соответствует реализация на рис. 17-6.

Аналогичным методом, сравнивая выражения для сопротивлений ветвей цепей типа  $L, C$  и  $r, C$ , получаем разложение для функции сопротивления двухполюсника типа  $r, C$ :

$$Z(p) = \alpha_{\infty} + \frac{\alpha_0}{p} + \sum_{k=1}^q \frac{\alpha'_k}{p + \beta_k}, \quad (17-14)$$

которому соответствует реализация на рис. 17-7.

Из выражений (17-13) и (17-14) вытекают свойства двухполюсников типа  $r, L$  и  $r, C$ , описанные выше.

Полученные реализации двухполюсников типа  $r, L$  и  $r, C$  представляют собой первую каноническую схему Фостера. Для второй схемы Фостера выражения для проводимостей двухполюсников типа  $r, L$  аналогичны выражению



(17-14), а для двухполюсников типа  $r$ ,  $C$  — выражению (17-13). Схемы реализации отличаются от второй канонической схемы Фостера, реализующей двухполюсник типа  $L$ ,  $C$ , заменой емкости или индуктивности на сопротивление.

Значения сопротивлений, индуктивностей и емкостей реальных электрических цепей обычно имеют резко отличные порядки. Для удобства вычислений применяется нормализация значений параметров цепи таким образом, чтобы коэффициенты полиномов функции цепи были по возможности близки к единице.

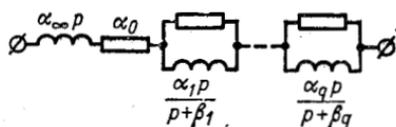


Рис. 17-6. Первая каноническая схема Фостера цепи  $r$ ,  $L$ ,

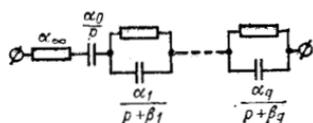


Рис. 17-7. Первая каноническая схема Фостера цепи  $r$ ,  $C$ ,

Нормализация осуществляется по отношению к базисному сопротивлению  $r_6$  и базисной частоте  $\omega_6$ . При этом нормализованные значения параметров определяются из формул

$$r^H = r/r_6; \quad \omega^H = \omega/\omega_6.$$

Из соотношения  $(\omega L)^H = \omega L/r_6$  находим  $L^H = L\omega_6/r_6$  аналогично  $C^H = C\omega_6 r_6$ .

В приведенных ниже примерах заданные функции двухполюсников предполагаются нормализованными.

**Пример 17-2.** Требуется реализовать положительную действительную функцию

$$Z(p) = \frac{p^4 + 4p^2 + 3}{p^3 + 2p}.$$

Заданная функция соответствует реактивному двухполюснику и имеет полюсы в точках  $p = 0$ ,  $p = \pm j\sqrt{2}$  и в бесконечности. Вычеты в полюсах функции

$$\alpha_\infty = \text{Res}_{p=\infty} Z(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Z(p)}{p} = 1;$$

$$\alpha_0 = \text{Res}_{p=0} Z(p) = \left( \frac{p^4 + 4p^2 + 3}{p^2 + 2} \right)_{p=0} = \frac{3}{2};$$

$$\alpha_1 = \text{Res}_{p=j\sqrt{2}} Z(p) = \left( \frac{p^4 + 4p^2 + 3}{p(p + j\sqrt{2})} \right)_{p=j\sqrt{2}} = \frac{1}{4}.$$

В результате получаем разложение функции в виде

$$Z(p) = p + \frac{3}{2p} + \frac{p}{2(p^2+2)},$$

которому соответствует схема на рис. 17-8.

**Пример 17-3.** Требуется реализовать положительную действительную функцию

$$Z(p) = \frac{2p^3 + 11p^2 + 8p}{(p+2)(2p+1)}.$$

Эта функция может быть преобразована в реактивную функцию заменой  $p$  на  $p^3$  и делением на  $p$ , что соответствует равенству (17-12).

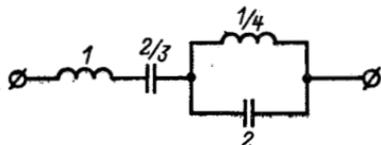


Рис. 17-8. Пример 17-2.

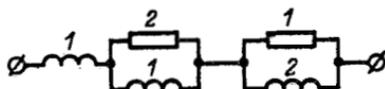


Рис. 17-9. Пример 17-3.

Следовательно, заданная функция определяет двухполюсник типа  $r, L$  и имеет разложение вида

$$Z(p) = \alpha_{\infty} p + \frac{\alpha_1 p}{p+2} + \frac{\alpha_2 p}{p+1/2} = p + \frac{2p}{p+2} + \frac{2p}{2p+1}.$$

В результате получаем цепь на рис. 17-9.

## Метод разложения в непрерывную дробь

Наряду с рассмотренными выше схемами двухэлементных двухполюсников существуют цепные схемы типа изображенной на рис. 17-10, сопротивления которых могут быть выражены непрерывной дробью (в схеме на рис. 17-10 последовательные ветви обозначены сопротивлениями, а параллельные — проводимостями):

$$Z = Z_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{Z_3 + \frac{1}{Y_4 + \frac{1}{Z_{n-1} + \frac{1}{Y_n}}}}}$$

Разложение заданной дробно-рациональной функции

$$Z(p) = A(p)/B(p)$$

в непрерывную дробь осуществляется в такой последовательности. Сначала определяем частное  $Z_1$  от деления полинома числителя  $A(p)$  на полином знаменателя  $B(p)$  и остаток  $R_1(p)$  этого деления, т. е.

$$Z(p) = Z_1 + \frac{R_1(p)}{B(p)} = Z_1 + \frac{1}{B(p)/R_1(p)}. \quad (17-15)$$

Далее делим полином  $B(p)$  на  $R_1(p)$ , определяя новое частное  $Y_2$  и остаток  $R_2(p)$ . Затем делим остаток  $R_1(p)$  на  $R_2(p)$  и так далее, пока не получим нулевого или легко реализуемого остатка.

В приведенной выше процедуре разложения в непрерывную дробь частное от деления полиномов имеет вид  $\alpha p$ ,  $\alpha$  или  $\alpha/p$  и реализуется соответственно индуктивностью, активным сопротивлением и емкостью.

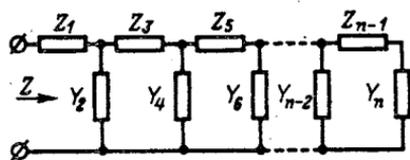


Рис. 17-10. Цепная схема.

Выполняя деление, нужно следить, чтобы коэффициенты полиномов были положительными.

Следует заметить, что непрерывные дроби и соответствующие им цепные схемы различны в зависимости от того, располагаются ли полиномы в числителе и знаменателе заданной дробно-рациональной функции по возрастающим или нисходящим степеням  $p$ .

Кроме того, вместо функции  $Z(p)$  в непрерывную дробь может быть разложена функция  $Y(p) = 1/Z(p)$ . Разложение функции  $Y(p)$  отличается от разложения  $Z(p)$  тем, что первое частное представляет собой проводимость  $Y_1$ . Соответственно схема, реализующая разложение функции  $Y(p)$  в непрерывную дробь, начинается не с последовательного сопротивления, а с параллельной проводимости.

Наконец, возможно разложение в непрерывную дробь, при котором в процессе деления сначала соблюдается один, а затем другой порядок расположения степеней  $p$ . В отдельных случаях некоторые варианты расположения степеней приводят к появлению отрицательных коэффициентов полиномов, т. е. не дают физическую реализацию.

Методом разложения в непрерывную дробь можно реализовать любые двухэлементные двухполюсники, а также некоторые двухполюсники типа  $r, L, C$ . Построение двухпо-

люсника методом разложения  $Z(p)$  в непрерывную дробь проиллюстрировано ниже примерами.

**Пример 17-4.** Требуется реализовать положительную действительную функцию

$$Z(p) = \frac{p^2 + p + 1}{p^3 + p^2 + 2p + 1}.$$

Заданная функция разлагается в непрерывную дробь:

$$Z(p) = \frac{1}{p + \frac{1}{p + \frac{1}{p+1}}}.$$

Этому выражению соответствует цепная схема, изображенная на рис. 17-11.

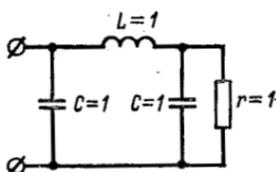


Рис. 17-11. Пример 17-4.

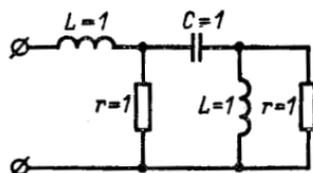


Рис. 17-12. Пример 17-5.

**Пример 17-5.** Требуется реализовать положительную действительную функцию

$$Z(p) = \frac{2p^3 + 3p^2 + 2p + 1}{2p^2 + 2p + 1}.$$

Степень числителя выше степени знаменателя, следовательно, функция имеет полюс в бесконечности, что указывает на наличие последовательной индуктивности.

Начав с расположения полиномов по возрастающим степеням и изменив в процессе деления порядок расположения степеней, можно заданную функцию представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} Z(p) &= p + \frac{1}{\frac{1+2p+2p^2}{1+p+p^2}} = p + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1+p+p^2}{p+p^2}}} = \\ &= p + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{\frac{1}{p} + 1}}}. \end{aligned}$$

Полученной непрерывной дроби соответствует схема двухполюсника, показанная на рис. 17-12.

## 17-5. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ РЕАЛИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ ДВУХПОЛЮСНИКА

Процесс реализации положительной действительной функции двухполюсников начинается с выделения реактивной части цепи, соответствующей полюсам на мнимой оси, включая начало координат и бесконечность. После чего функция сопротивления примет вид:

$$Z(p) = \alpha_{\infty} p + \frac{\alpha_0}{p} + \sum_{k=1}^p \frac{2\alpha_k p}{p^2 + \omega_k^2} + Z_1(p). \quad (17-16)$$

На мнимой оси выделенные члены, не входящие в  $Z_1(p)$ , принимают мнимые значения, поэтому

$$\operatorname{Re} Z_1(j\omega) = \operatorname{Re} Z(j\omega) \geq 0$$

и, следовательно,  $Z_1(p)$  — положительная действительная функция.

Целесообразность первоначального выделения членов, соответствующих полюсам на мнимой оси, определяется не только тем, что это всегда допустимо, но и тем, что мнимые корни знаменателя  $B(p)$  функции  $Z(p)$  можно найти, не определяя всех корней.

Полином знаменателя можно записать в виде

$$B(p) = N(p) + M(p) = N(p) + pN_1(p), \quad (17-17)$$

где четный полином  $N(p)$  объединяет члены  $B(p)$  с четными степенями, а полином  $M(p)$  — с нечетными степенями.

При  $p = j\omega$  четные степени  $j\omega$  дают действительные числа, поэтому  $N(j\omega)$  и  $N_1(j\omega)$  в уравнении (17-17) дают действительные значения. Тогда  $N(j\omega)$  представляет собой действительную часть  $B(j\omega)$ , а  $\omega N_1(j\omega)$  — мнимую часть.

Поскольку комплексное число равно нулю, когда действительная и мнимая части равны нулю, то, если  $j\omega_k$  — корень полинома  $B(p)$  или  $B(j\omega)$ , он должен обращать в нуль и  $N(j\omega_k)$ , и  $N_1(j\omega_k)$ . Таким образом, мнимый корень полинома  $B(p)$  является одновременно корнем полиномов  $N(p)$  и  $N_1(p)$ .

Так как полиномы  $N(p)$  и  $N_1(p)$  содержат лишь четные степени  $p$ , то, заменяя  $p^2$  на  $s$ , получим полиномы  $N'(s)$  и  $N'_1(s)$ . Степень этих полиномов по меньшей мере в 2 раза меньше степени полинома  $B(p)$ , что облегчает нахождение мнимых корней (см. пример в конце параграфа).



Функция  $Z_1(p)$  в уравнении (17-16) носит название функции минимального реактивного сопротивления. Если функция  $Z_1(p)$  имеет нули на мнимой оси, тогда функция  $Y_1(p)$  имеет полюсы на мнимой оси. В этом случае можно выделить из  $Y_1(p)$  члены, соответствующие полюсам на мнимой оси. В остатке получаем функцию  $Y_2(p)$ , не имеющую полюсов на мнимой оси. Такая функция носит название функции минимальной реактивной проводимости.

Функция  $Y_2(p)$  может иметь нули на мнимой оси, тогда процесс выделения реактивных элементов нужно продолжить для функции  $Z_2(p)$  и т. д. В конечном итоге получим функцию  $Z_k(p)$ , не имеющую ни нулей, ни полюсов на мнимой оси. Такая функция называется функцией минимального реактивного сопротивления и проводимости.

Для реализации функции  $Z_k(p)$  выделяют из нее активное сопротивление, равное минимальной действительной части  $Z_k(p)$ . В этом случае минимальная действительная часть оставшейся функции

$$Z_0(p) = Z_k(p) - r_{\min} \quad (17-18)$$

равна нулю, причем этот минимум достигается на мнимой оси при  $\omega = \omega_0$ . Функция  $Z_0(p)$  называется функцией минимального активного сопротивления.

Для нахождения  $r_{\min}$  и  $\omega_0$  нужно определить минимум выражения (17-6) и частоту  $\omega_0$ , при которой он достигается.

В простейшем случае, когда  $\omega_0$  равно нулю или бесконечности, функция  $Z_0(p)$  позволяет продолжить процесс выделения реактивных элементов и может быть получена окончательная реализация. В противном случае функция  $Z_0(p)$  представляет собой отношение полиномов одинаковой степени, не имеющих корней на мнимой оси. Такая функция может быть реализована методом Брунэ.

Пусть функция  $Z_0(p)$  представляет собой отношение полиномов  $A(p)$  и  $B(p)$   $n$ -й степени. Эта функция принимает чисто мнимое значение  $Z_0(j\omega_0) = jx_0$  при  $p = j\omega_0$ , которое реализуется индуктивностью  $L_1 = x_0/\omega_0$ .

Так как  $x_0$  может быть отрицательным, то соответствующая индуктивность  $L_1$  будет тоже отрицательной. Отрицательная индуктивность не может быть реализована на практике, но, как показано ниже, от нее можно избавиться.



После выделения индуктивности  $L_1$  оставшаяся функция

$$Z_{01}(p) = Z_0(p) - pL_1 = A_1(p)/B(p) \quad (17-19)$$

имеет нули при  $p = \pm j\omega_0$ , следовательно, обратная функция имеет в этих точках полюсы.

После выделения члена, соответствующего полюсам  $\pm j\omega_0$ , получаем функцию

$$Y_{02}(p) = Y_{01}(p) - \frac{2\alpha_0 p}{p^2 + \omega_0^2} = \frac{A_2(p)}{B_2(p)}, \quad (17-20)$$

где степень полинома  $A_2(p)$  равна  $n - 2$ , а  $B_2(p)$  — равна  $n - 1$ , так как они на 2 меньше степеней полиномов числителя и знаменателя  $Y_{01}(p)$ .

Выделенный член реализуется ветвью из последовательно соединенных индуктивности  $L_2 = 1/2\alpha_0$  ( $\alpha_0$  — вычет функции  $Y_{01}(p)$  в полюсе  $j\omega_0$ ) и емкостью  $C = 1/\omega_0^2 L_2$  (рис. 17-13).

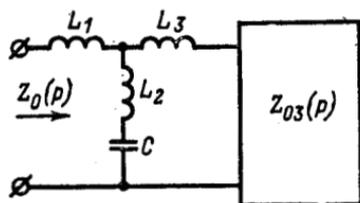


Рис. 17-13. Цепь с выделенным циклом Брунэ.

Функция  $Z_{02}(p) = 1/Y_{02}(p)$  имеет полюс в бесконечности, так как степень полинома числителя больше степени полинома знаменателя. Этот полюс реализуется индуктивностью  $L_3$ , которая равна вычету в этом полюсе:

$$L_3 = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Z_{02}(p)}{p}.$$

Выражая  $Z_{02}(p)$  через  $Z_0(p)$  с помощью уравнений (17-20) и (17-19), находим, что

$$L_3 = -\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}. \quad (17-21)$$

После выделения индуктивности  $L_3$  получаем функцию

$$Z_{03}(p) = Z_{02}(p) - pL_3 = \frac{B_2(p)}{A_2(p)} - pL_3 = \frac{B_3(p)}{A_2(p)}.$$

На рис. 17-13 показан результат рассмотренных этапов. Выделенная часть цепи, состоящая из индуктивностей  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  и емкости  $C$ , называется циклом Брунэ.

Проанализируем физическую реализуемость на каждом этапе. Если индуктивность  $L_1$  отрицательна, то  $Z_{01}(p)$  является положительной действительной функцией и последующие этапы дают физическую реализацию.

Если индуктивность  $L_1$  — положительна, то  $Z_{01}(p)$  не является положительной действительной функцией. Это означает, что она не может быть реализована с помощью положительных элементов типа  $r, L, C$ . Действительно, согласно формуле (17-21) при положительной индуктивности  $L_1$  индуктивность  $L_3$  — отрицательна.

Таким образом, в схеме на рис. 17-13 одна из индуктивностей  $L_1$  и  $L_3$  обязательно отрицательна и не может быть реализована. В связи с этим индуктивности  $L_1, L_2$  и  $L_3$  заменяют трансформатором с индуктивностями обмоток  $L'_1 = L_1 + L_2, L'_2 = L_3 + L_2$  и взаимной индуктивностью  $M = L_2$ .

В результате получаем схему на рис. 17-14, эквивалентную схеме на рис. 17-13. В этой схеме индуктивности  $L'_1$  и  $L'_2$  положительны. Коэффициент связи трансформатора

$$k = \frac{M}{\sqrt{L'_1 L'_2}} = \frac{L_2}{\sqrt{(L_1 + L_2) \left( L_2 - \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \right)}} = 1.$$

Трансформатор с коэффициентом связи, равным единице, называется совершенным. Для реального трансформатора  $k < 1$ , но можно с достаточной для практики степенью точности приблизиться к значению  $k = 1$  и реализовать таким образом совершенный трансформатор.

Оставшаяся функция  $Z_{03}(p)$  представляет собой отношение полиномов степени  $n - 2$ . Для реализации этой функции может быть применена описанная выше процедура, которая может потребовать выделения нового цикла Брунэ. Однако, поскольку после выделения цикла Брунэ степени полиномов снижаются на 2, в конечном итоге функция будет реализована.

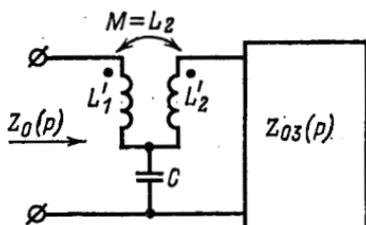


Рис. 17-14. Схема цепи, эквивалентная цепи на рис. 17-13.

Выше был рассмотрен простейший метод реализации функции минимального активного сопротивления, который требует использования совершенного трансформатора. Имеются бестрансформаторные методы реализации, такие как методы Ботт-Даффина, Мията и др.

**Пример 17-6.** Реализовать положительную действительную функцию

$$Z(p) = \frac{4p^4 + 6p^3 + 12p^2 + 16p + 10}{p^4 + p^3 + 6p^2 + 2p + 8}. \quad (17-22)$$

Сначала определяем мнимые корни знаменателя, решая уравнения для четной и нечетной частей:

$$p^4 + 6p^2 + 8 = 0 \quad \text{или} \quad s^2 + 6s + 8 = 0, \quad (17-23)$$

$$p^3 + 2p = 0 \quad \text{или} \quad s + 2 = 0.$$

Из последнего уравнения находим  $s_1 = -2$  или  $p_{1,2} = \pm j\sqrt{2}$ . Эти корни удовлетворяют уравнению (17-23) и, следовательно, являются полюсами функции (17-22).

Вычет функции в полюсе  $p_1 = j\sqrt{2}$  равен  $3/2$ , поэтому можно записать, что

$$Z(p) = \frac{3p}{p^2 + 2} + Z_1(p).$$

Первый член реализуется параллельно соединенными индуктивностью и емкостью (рис. 17-15), а второй член

$$Z_1(p) = \frac{2p^2 + 2p + 5}{p^2 + p + 4}$$

реализуется по методу Брунэ.

Используя формулу (17-6), находим, что действительная часть функции  $Z_1(p)$  имеет минимальное значение  $r_{\min} = 1$  при частоте  $\omega_0 = \sqrt{2}$ . Выделяя сопротивление  $r_{\min}$ , получаем:

$$Z_1(p) = 1 + \frac{p^2 + p + 1}{p^2 + p + 4}.$$

Второй член  $Z_1(p)$  при частоте  $\omega_0$  обращается в  $j/\sqrt{2} = j\omega_0 L_1$ , откуда  $L_1 = 1/2$ .

После выделения индуктивности  $L_1$  получаем в остатке функцию

$$Z_3(p) = \frac{(p^2 + 2)(-p + 1)}{2(p^2 + p + 4)},$$

для которой

$$Y_2(p) = \frac{1}{Z_3(p)} =$$

$$= \frac{2p}{p^2 + 2} + \frac{4}{-p + 1}.$$

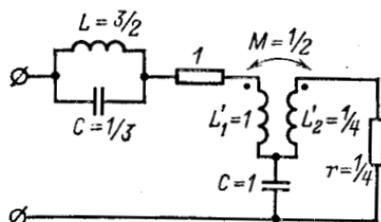


Рис. 17-15. Пример 17-6.

Первый член последнего выражения реализуется последовательным соединением индуктивности  $L_2 = 1/2$  и емкости  $C = 1$ . Второй член — последовательным соединением индуктивности  $L_3 = -1/4$  и сопротивления  $r = 1/4$ . После замены индуктивностей  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$  совершенным трансформатором получаем схему на рис. 17-15.

## 17-6. ИССЛЕДОВАНИЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА НА КОМПЛЕКСНОЙ ЧАСТОТЕ

Так же как и в случае двухполюсников, введение комплексной частоты  $p = c + j\omega$  расширяет возможности исследования общих свойств четырехполюсников.

Передаточная функция четырехполюсника может быть выражена отношением полиномов вида (17-1). При этом в отличие от сопротивления или проводимости двухполюсника степени полиномов в числителе и знаменателе передаточной функции четырехполюсника могут различаться более чем на единицу.

Передаточная функция четырехполюсника, представляющая собой отношение электрических величин в двух разных контурах или узлах, свободна от некоторых ограничений, свойственных сопротивлению и проводимости двухполюсника. Так, передаточное сопротивление и проводимость четырехполюсника могут иметь отрицательную действительную часть.

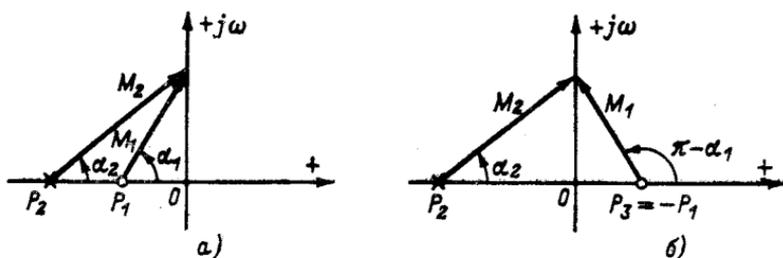


Рис. 17-16. Размещение нулей и полюсов передаточных функций минимальной (а) и неминимальной (б) фаз,

Что касается полюсов передаточной функции, то, так же как и в случае двухполюсника, полюсы не могут иметь положительной действительной части: они располагаются в левой полуплоскости, так как совпадают с полюсами входного сопротивления или проводимости четырехполюсника.

Однако подобное ограничение не распространяется на нули передаточной функции четырехполюсника: нули могут находиться как в левой, так и в правой полуплоскости.

Передаточная функция, не имеющая нулей в правой полуплоскости, называется функцией минимальной фазы, а передаточная функция, нули которой располагаются и в правой полуплоскости, называется функцией неминимальной фазы. Соответственно различают и цепи минимальной и неминимальной фазы.

На рис. 17-16 в виде примера показано размещение нулей и полюсов передаточных функций минимальной (рис. 17-16, а) и неминимальной (рис. 17-16, б) фаз.

Амплитудная и фазовая характеристики могут быть построены на основе (17-5). В рассматриваемом случае отношения  $M_1/M_2$  равны друг другу, и поэтому при равенстве множителей  $H$  амплитудные характеристики совпадают. Фазовые же характеристики неодинаковы: передаточная функция минимальной фазы характеризуется всегда меньшим в алгебраическом смысле фазовым сдвигом, чем функция неминимальной фазы при той же амплитудной характеристике. Это видно из рис. 17-16, где угол  $\alpha_1$  меньше угла, дополняющего его до  $180^\circ$ .

Существенной особенностью функций минимальной фазы является то, что амплитудная и фазовая характеристики однозначно определяют друг друга: имея одну из этих характеристик, можно найти другую характеристику.

В цепных схемах ток в нагрузке может быть равен нулю в том случае, когда какое-либо из сопротивлений продольных ветвей бесконечно велико или какое-либо из сопротивлений поперечных ветвей равно нулю. Поэтому передаточная функция цепной схемы всегда является функцией минимальной фазы: ее нули обуславливаются полюсами сопротивлений продольных и нулями сопротивлений поперечных ветвей цепной схемы, которые всегда располагаются в левой полуплоскости.

Интересной разновидностью передаточных функций неминимальной фазы служит функция, нули которой располагаются в правой полуплоскости в виде зеркальных изображений полюсов. Четырехполюсник, обладающий такой передаточной функцией, пропускает все частоты с одинаковым затуханием. Действительно, для всех точек мнимой оси модуль выражения (17-3) сохраняется постоянным. Аргумент этого выражения, т. е. фазовый сдвиг между электрическими величинами на выходе и входе четырехполюсника, при этом зависит от частоты. Годограф передаточной функции на комплексной плоскости представляет собой окружность.

Такое изменение фазы при постоянной амплитуде свойственно, например, симметричному мостовому четырехполюснику, нагруженному согласованно. Четырехполюсники подобного типа применяются в технике связи в качестве устройств, корректирующих фазу.

Построение четырехполюсника по заданным частотным характеристикам представляет собой в общем случае задачу более сложную, чем построение двухполюсников [Л.2 и 8].



В зависимости от условий задачи в основу построения четырехполосников в ряде случаев могут быть положены общие методы синтеза двухполосников.

### 17-7. СИНТЕЗ РЕАКТИВНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

В качестве примера рассмотрим построение четырехполосника в виде симметричной мостовой схемы (см. рис. 9-18) по заданной функции передаточного сопротивления

$$Z(p) = U_2(p)/I_1(p)$$

при холостом ходе.

Полагая в уравнениях четырехполосника в форме  $Z$  [см. уравнение (9-2)],  $I_2 = 0$ , находим, что  $Z(p) = Z_{21}(p)$ .

Согласно формулам (9-19) и соотношениям между параметрами четырехполосника

$$Z_{1k} = \frac{1}{Y_{11}} = \frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{21}^2}{Z_{22}} = Z_{1x} - \frac{Z_{21}^2}{Z_{2x}},$$

откуда для симметричного четырехполосника

$$Z_{21} = \pm \sqrt{Z_{1x}(Z_{1x} - Z_{1k})}.$$

Из полученного равенства следует, что полюсы функции  $Z_{1x}(p)$  являются одновременно и полюсами функции  $Z_{21}(p)$ . Поскольку  $Z_{1x}(p)$  представляет собой функцию сопротивления в левой полуплоскости, полюсы этой функции расположены в левой полуплоскости и вычеты в них положительны. Что касается вычетов функции  $Z_{21}(p)$  в этих полюсах, то они могут быть как положительными, так и отрицательными.

Для упрощения задачи синтеза примем, что вычеты функции  $Z_{21}(p)$  равны по модулю вычетам функции  $Z_{1x}(p)$ , тогда разложение  $Z_{21}(p)$  на элементарные дроби будет отличаться от разложения  $Z_{1x}(p)$  только тем, что часть элементарных дробей будет иметь отрицательные знаки.

В этом случае можно записать, что

$$Z_{21}(p) = Z_{21}^{(+)}(p) - Z_{21}^{(-)}(p); \quad (17-24)$$

$$Z_{1x}(p) = Z_{21}^{(+)}(p) + Z_{21}^{(-)}(p), \quad (17-25)$$

где  $Z_{21}^{(+)}(p)$  объединяет элементарные дроби  $Z_{21}(p)$  с положительными коэффициентами, а  $Z_{21}^{(-)}(p)$  — элементарные дроби с отрицательными коэффициентами.



Для мостовой схемы (см. рис. 9-18)

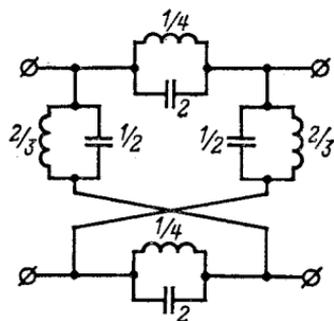
$$Z_{21}(p) = (Z_2 - Z_1)/2; \quad Z_{1x}(p) = (Z_1 + Z_2)/2.$$

Сравнивая эти выражения с равенствами (17-24) и (17-25), находим:

$$Z_1 = 2Z_{21}^{(-)}(p); \quad (17-26)$$

$$Z_2 = 2Z_{21}^{(+)}(p). \quad (17-27)$$

Если полученные выражения для  $Z_1$  и  $Z_2$  удовлетворяют условиям положительных действительных функций, то они могут быть реализованы схемами двухполюсников. Заменяя в цепи на рис. 9-18 сопротивления  $Z_1$  и  $Z_2$  найденными схемами двухполюсников, получим искомую реализацию четырехполюсника.



**Пример 17-7.** Реализовать функцию передаточного сопротивления

$$Z_{21}(p) = \frac{p^3}{(p^2 + 3)(p^2 + 2)}.$$

Рис. 17-17. Пример 17-7.

Путем разложения на элементарные дроби представим заданную функцию в виде

$$Z_{21}(p) = \frac{p}{p^2 + 3} - \frac{2p}{p^2 + 2} = Z_{21}^{(+)}(p) - Z_{21}^{(-)}(p).$$

Используя формулы (17-26) и (17-27), находим:

$$Z_1 = \frac{4p}{p^2 + 2}; \quad Z_2 = \frac{2p}{p^2 + 3}.$$

Этим выражениям соответствует схема, показанная на рис. 17-17.

## 17-8. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

17-1. Показать, что

$$\frac{p^2 + p + 4}{p^2 + p + 1}, \quad \frac{p^3 + 3p^2 + 2p + 2}{p^3 + 3p^2 + 3p + 1};$$

$$\frac{p(p^2 + 2)}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)}$$

— положительные действительные функции,

17-2. Показать, что

$$\frac{p(p^2+5)}{(p^2+1)^2}; \quad \frac{p^2+2p+1}{p^2};$$
$$\frac{p^3+7p^2+15p+9}{p^4+6p^2+9}$$

не являются положительными действительными функциями.

17-3. Осуществить

$$Z(p) = \frac{(p+1)(p+3)}{p(p+2)}; \quad Y(p) = \frac{p^4+4p^2+3}{p^3+2p}$$

разложением на простейшие дроби.

17-4. Решить задачу 17-3 разложением в непрерывную дробь.

17-5. Осуществить

$$Z(p) = \frac{(p^2+1)(p^2+9)}{p(p^2+4)}$$

последовательным выделением полюсов и нулей.

17-6. Осуществить по методу Брунэ функцию

$$Z(p) = \frac{p^3+5p^2+2p+1}{p^2+p+1}$$

17-7. Решить задачу 17-5 разложением в непрерывную дробь.

17-8. Основываясь на формуле (17-3), показать, что для реактивного двухполюсника нули и полюсы чередуются.

17-9. В каких случаях полином, все корни которого расположены на мнимой оси, содержит только нечетные степени  $p$ ?

17-10. Почему полюсы передаточной функции не могут находиться в правой полуплоскости, между тем как на нули передаточной функции это ограничение не распространяется?

17-11. Почему обобщенные сопротивления и проводимости двухполюсников представляют собой положительные действительные функции?

17-12. Осуществить реактивные функции

$$Z(p) = \frac{p^3+4p}{p^4+5p^2+6} \quad \text{и} \quad Z(p) = \frac{-p}{2p^4+3p^2+1}$$

в виде схем симметричных мостовых четырехполюсников.



**МАШИННЫЙ РАСЧЕТ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ****1. Последовательность решения задач на ЭВМ**

Для расчета с помощью ЭВМ должна быть сформулирована задача и определена конечная цель. Это является первым этапом решения задачи. Затем должна быть создана математическая модель. Состояние электрической цепи в каждый момент времени определяется значениями токов в ее ветвях или напряжений между узлами цепи. При рассмотрении электрической цепи с распределенными параметрами, помимо времени, в качестве второй независимой переменной должно учитываться расстояние. Обычно существует несколько способов построения математической модели одной и той же задачи, имеются также существенные отличия от подготовки и решения задач ручным способом. Это подробно рассмотрено в ряде соответствующих пособий<sup>1</sup>.

Второй этап решения связан с численным анализом.

Математическая запись задачи может оказаться непереводимой непосредственно на язык ЭВМ, поскольку машина выполняет только арифметические действия. Все уравнения должны быть выражены через арифметические операции. При этом следует иметь в виду различие свойств точных арифметических операций и свойств операций, выполняемых на ЭВМ. Машинная арифметика имеет свои характерные особенности. Ошибки округления неизбежны на ЭВМ. Но какими бы малыми они ни были, их появление существенно меняет математические свойства арифметических операций. Точные операции являются коммутативными, ассоциативными и связаны между собой законом дистрибутивности. Операции на ЭВМ уже не являются таковыми. Поэтому, чтобы указать алгоритм вычисления любого арифметического выражения, необходимо определить порядок выполнения входящих в него операций.

Таким образом, всякая задача при постановке на ЭВМ определяет совокупность вычислительных алгоритмов, отличающихся друг от друга порядком выполнения арифметических операций. Несмотря на математическую эквивалентность этих модификаций в точном смысле, различие в вычислительном аспекте может быть чрезвычайно большим, в особенности с точки зрения численной устойчивости. Среди всех модификаций существует такая, которая обеспечивает наиболее точное решение задачи.

<sup>1</sup> Голембо З. Б. Алгоритмизация и программирование электротехнических задач на электронных вычислительных машинах, М., «Высшая школа», 1974.



Рассмотрим, например, два основных способа решения уравнений узловых напряжений (7-5) или контурных токов (7-2) — методами исключения и итерационным методом Гаусса—Зейделя<sup>1</sup>.

Метод исключения конечен и теоретически с его помощью можно решить любую невырожденную систему уравнений. Итерационный метод Гаусса—Зейделя сходится только в том случае, если выполняется неравенство

$$|Z_{nn}| > \sum |Z_{mn}| \text{ при } m \neq n,$$

при соблюдении которого неизвестное в уравнениях (7-2) и (7-5) нумеруют так, чтобы максимальные коэффициенты заполняли главную диагональ матрицы. Когда итерационные методы сходятся, они обычно предпочтительнее при расчетах на ЭВМ. Для некоторых систем, например при расчете разветвленной сети питания с различными отношениями  $x/r$  в ветвях, метод исключения является единственно возможным.

Следует также заметить, что с точки зрения классической математики все прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений эквивалентны, поскольку сводятся в конечном счете к вычислению одних и тех же арифметических выражений, определяющих зависимость самого решения от входных данных. С позиций численного анализа различие здесь весьма значительно. Используя один метод, можно получить точное решение, а используя другой метод, не получить ни одного верного знака в решении. Например, различные варианты метода Гаусса также приводят к существенно различным результатам.

Составив численный алгоритм решения задачи, его необходимо выразить в виде точно определенной последовательности операций на ЭВМ. Таким образом, третьим этапом является программирование на ЭВМ.

В процессе программирования вначале обычно составляется схема вычислительной процедуры. Используя схему метода решения, показывающую предстоящие операции, пишут программу на одном из алгоритмических языков. Для электротехнических задач весьма удобным языком является ФОРТРАН (FORTRAN — FORMula TRANslator). Отличительными чертами его являются: простота и легкость изучения, близость записи арифметических выражений и логических условий к принятым в обычной математической записи, состоящей из последовательности операторов. Одни из них определяют арифметические операции, являющиеся основным содержанием алгоритма, другие определяют порядок ввода и вывода информации, например ввода чисел с перфокарты или вывода чисел на печать. Другой тип операторов изменяет порядок выполнения операций. Имеется тип операторов, содержащих информацию об алгоритме, но никаких действий не определяющих. Вместе взятые все операторы составляют исходную программу. Нанесенная на перфокарты исходная программа преобразуется с помощью транслятора ФОРТРАН в рабочую программу. Рабочая программа — последовательность элементарных команд для ЭВМ. Такое преобразование необходимо, так как язык ФОРТРАН является гораздо более сложным, чем язык команд ЭВМ. Расчеты на ЭВМ производятся именно по рабочей программе.

<sup>1</sup> Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на ФОРТРАНе. М., «Мир», 1969.



Программирование заканчивается отладкой программы, поскольку в процессе программирования обычно совершаются ошибки.

По отлаженной программе можно производить расчет сразу для нескольких вариантов набора исходных данных.

## 2. Особенности реализации алгоритмов расчета переходных процессов в линейных цепях

Переходные процессы в электрических цепях описываются дифференциальными уравнениями. Решение их связано с известными трудностями, которые изложены в гл. 15. Использование преобразования Лапласа для расчета переходных процессов также не всегда обеспечивает тривиальный обратный переход в область функций действительного переменного с помощью формул или таблиц.

Машина не может оперировать с непрерывно изменяющимися величинами и, следовательно, не может находить их предельные значения, так как она использует вычислительный процесс с конечным числом операций. Поэтому вместо исходной непрерывной задачи решается другая — дискретная, аппроксимирующая непрерывную задачу в том смысле, что ее дискретное решение аппроксимирует непрерывное решение исходной задачи. Единственной непрерывной задаче соответствует бесконечное множество дискретных задач. Переход от дискретной задачи к непрерывной не является взаимно однозначным и может привести к неопределенности.

Таким образом, при численных методах моделирования некоторого процесса, протекающего в электрической цепи и заданного в виде аналитической системы

$$\frac{dz_i}{dt} = z_i' = f(t, z_1, z_2, \dots, z_m), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{П-1})$$

с начальными условиями

$$z_i(t_0) = z_{i0},$$

исследование свойств процесса заменяется изучением свойств решений некоторой системы конечно-разностных уравнений.

Пусть при алгоритмизации применяется метод решения с помощью рядов Тейлора.

Напишем разложение функции  $z_i(t)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $t = t_m$

$$z_i(t) = z_m + z_m'(t - t_m) + \frac{z_m''}{2}(t - t_m)^2 + \frac{z_m'''}{6}(t - t_m)^3 + \dots, \quad (\text{П-2})$$

где  $z_m^{(j)}$  —  $j$ -я производная функции  $z(t)$  в точке  $t = t_m$ .

Решение в точке  $t_0$  дается начальным условием. Предположим, что найдено приближенное решение уравнения для  $m + 1$  точек на оси, т. е. для  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_m$ . Последовательные значения  $t_i$  расположены на расстоянии  $h$  друг от друга, т. е.

$$t_i = t_0 + ih,$$

где  $h$  — шаг интегрирования.

Приближенное решение для точки  $t_{m+1}$  можно найти, подставив  $t_{m+1} = t_m + h$  в выражение (П-2)

$$z_{m+1} = z_m + h z_m' + \frac{h^2}{2} z_m'' + \frac{h^3}{6} z_m''' + \dots \quad (\text{П-3})$$



Чем больше членов ряда, тем точнее будет приближение. Если пользоваться решением с помощью рядов Тейлора, необходимо вычислять различные производные функции  $z(t)$ . Все значения функции и ее производных вычисляются при  $t = t_m$ , т. е.  $z = z_m$ . Для вычисления  $z_{m+1}$  требуется информация только об одной предыдущей точке  $t_m, z_m$ , поэтому нахождение решения с помощью ряда Тейлора является одноступенчатым методом.

Для получения лучшего приближения, т. е. меньшей ошибки ограничения, необходимо вычислить более высокую производную, а это сделать весьма сложно, а иногда даже просто невозможно. С точки зрения практических вычислений этот метод обычно неудобен, хотя теоретически пригоден для решения любых дифференциальных уравнений. Метод ценен тем, что он дает некоторый эталон для сравнения различных практических удобных методов; показывает, насколько тот или иной метод согласуется с разложением в ряд Тейлора. Ряд численных методов согласуется вплоть до членов порядка  $h$ , другие до членов порядка  $h^4$  и т. д. Этот критерий применяется несмотря на то, что практические методы не предусматривают вычисления производных от функции.

Таким образом, изучение свойств (П-1) заменяется изучением свойств численного решения дифференциального уравнения.

Поэтому основная задача при создании алгоритмов цифровых моделей состоит в достижении оптимального соответствия между свойствами воспроизводимого в машине и заданного процессов.

### 3. Особенности численных методов расчета переходных процессов

Главным недостатком численного решения является то, что оценка ошибки, вносимой методом решения, оказывается сложной задачей и часто невозможно сказать, какова достоверность решения.

Для ЭВМ нельзя точно указать предела точности, которой можно достигнуть.

Ошибки, возникающие при решении, вызываются несколькими причинами.

Ошибки округления обуславливаются имеющейся разрядной сеткой и правилами округления при выполнении арифметических операций на ЭВМ. Чтобы обнаружить ошибку округления, необходимо, очевидно, увеличить разрядную сетку, т. е. нужно произвести расчет этой же задачи с удвоенной точностью.

Поскольку обычно дифференцирование увеличивает малые ошибки, важно иметь заметный запас точности при вычислении функции, подлежащей дифференцированию, — запас, который сам по себе должен соответствовать точности, которую дают ЭВМ.

Ошибки вызываются также случайными сбоями или неисправностью ЭВМ. Часто на практике считается, что если машина дважды подряд выдает один и тот же ответ, то его можно считать правильным. Однако каждая машина и каждая программа могут иметь свои специфические ошибки, в силу чего тот же самый неверный ответ может быть получен какое угодно число раз.

Единственной удовлетворительной проверкой для обнаружения ошибки, вызываемой случайными сбоями, является введение избыточности в виде осуществления повторного расчета на другой ЭВМ и составления новой программы. Часто случается, что такая ошибка улавливается имеющимися тестами для проверки машин.

Наилучшим контролем правильности полученного решения остается проверка заранее известного контрольного соотношения. Например, для задачи

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = -x$$

критерием правильности является проверка известного соотношения  $x^2 + y^2 = r^2$ , которое должно выполняться в любой момент времени. Этот способ контроля является наиболее эффективным, так как он сразу фиксирует собой в работе ЭВМ, ошибку в программе, а также совокупную ошибку метода и вычислений.

Наиболее эффективным для решения дифференциальных уравнений с помощью ЭВМ является метод Рунге — Кутты, который дает возможность получить значение  $y = (x + h)$ , если известны только  $y(x)$  и шаг интегрирования  $h$ , не используя  $y(x - h)$ ,  $y(x - 2h)$  и т. д.

Следовательно, при вычислении точки  $x_{m+1}$ ,  $y_{m+1}$  используется информация только о точке  $x_m$ ,  $y_m$ , что не вызывает затруднений при изменении шага  $h$ . Метод не требует вычисления производных от  $f(x, y)$ , вычисляется только сама функция. Но для вычисления каждой последующей точки решения приходится вычислять функцию  $f(x, y)$  несколько раз при различных значениях  $x$  и  $y$ .

#### 4. Формирование алгоритмов для анализа электрических цепей

Основой для описания процессов в электрической цепи являются уравнения Кирхгофа совместно с уравнениями, связывающими ток и напряжение каждого элемента цепи через его параметры. Для обычного линейного сопротивления уравнение протекающего процесса составляется на основании закона Ома, для линейной индуктивности на основании закона Фарадея и т. д. Уравнение, связывающее ток и напряжение в линейном элементе, весьма просто, так как имеет лишь один коэффициент пропорциональности, являющийся электрическим параметром.

**Пример П-1.** Составить программу на алгоритмическом языке ФОРТРАН и рассчитать цепь переменного тока, состоящую из последовательно соединенных  $r$ ,  $L$ ,  $C$  (рис. 5-1) и найти зависимость тока, протекающего в цепи, от набора значений частоты. Приложенную э. д. с. и параметры цепи считаем заданными. Ток в цепи из уравнения (2-14)

$$I = \frac{E}{\sqrt{r^2 + (2\pi fL - 1/2\pi fC)^2}}$$

Программу составляем так, чтобы возможно было произвести вычисления для любого дискретного набора значений частоты при любых заданных значениях  $E$ ,  $r$ ,  $L$  и  $C$ .

В исходной информации предусматриваем считывание с перфокарт последовательных значений частоты. Программа предусматривает печать этой частоты и вычисленного для нее значения тока. Программу составляем таким образом, чтобы можно было произвести вычисления для любого конечного числа перфокарт, на которые нанесены дискретные значения частот. Эталонное окончание счета условимся считать перфокарту, которая содержит отрицательную частоту. Все вычисления проводятся для положительных частот, Поэтому карту с отрица-



тельной частотой нет оснований спутать со всеми другими входными картами. При использовании алгоритмического языка ФОРТРАН после чтения очередного значения частоты остается только применить оператор IF, чтобы определить, не дошла ли очередь до эталонной карты. После печати очередного результата прочитывается очередная входная перфокарта и так до тех пор, пока наконец не будет введена эталонная карта с отрицательной частотой и оператор IF не передаст управление оператору STOP для остановки вычислений. Последовательность операций приведена на схеме рис. П-1. Как следует из этой схемы, сначала прочитываются значения четырех параметров  $E$ ,  $r$ ,  $L$ ,  $C$ , которые остаются неизменными. На схеме эти величины обозначены такими же символами, как и в программе, поэтому можно сравнить схему и программу на ФОРТРАНе. Чтение с перфокарты величин, которые не будут меняться в ходе вычислений, производится один раз; все остальные стадии повторяются всякий раз после ввода нового значения частоты. Для поочередного ввода значений частоты (CYCLE) независимо от ввода остальных параметров, используется отдельный блок. После ввода очередного значения частоты с помощью оператора IF задается вопрос: не является ли частота отрицательной? Цикл вычислений может повторяться неизвестное заранее число раз, так как может оказаться различное число перфокарт со значением частоты. Поэтому проверку по эталону необходимо производить каждый раз, кроме первого. Если перфокарта со значением частоты не является эталонной, то переходят к блоку вычисления тока в цепи (AMPERE). В программе этому вычислению соответствует длинный арифметический оператор; на схеме формула не приведена. После вычисления тока печатают частоту и соответствующий ей ток и возвращаются, чтобы прочесть с перфокарты новое значение частоты. Программа будет продолжать считывание с перфокарты очередного значения частоты, вычисление и печать значений тока и возвращение для считывания новой карты пока не закончится цикл с помощью перфокарты с эталоном окончания.

Определив процесс вычислений с помощью схемы, переходим к написанию программы на ФОРТРАНе. Программа имеет следующий вид:

5	6	7 FORTRAN STATEMENT
		READ 200 VOLT, OHM, HENRY, FARAD
200		FORMAT (4F 10...0)
23		READ 200, CYCLE

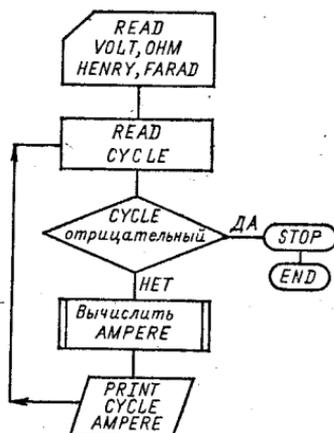


Рис. П-1. Схема программы для расчета цепи переменного тока,



		IF (CYCLE) 600, 601, 601
600		STOP
601	0	AMPERE=VOLT/SQRT (OHM**2+(6.2832*CYCLE)
	1	*HENRY - 1/(6.2832*CYCLE*FARAD)**2)
		PRINT 201, CYCLE, AMPERE
201		FORMAT (1P2E16,6)
		GO TO 23
		END

Номера присвоены операторам FORMAT и трем операторам, к которым возможен переход от операторов IF и GO TO. Если частота, введенная с перфокарты, отрицательна, то управление передается на оператор STOP, который стоит сразу же после IF. Оператор STOP можно поместить и в другое место программы. В операторе IF необходимо предусмотреть случай, когда выражение в скобках равно нулю, так как правила ФОРТРАНа требуют указать оператор, которому будет передано управление при каждом из трех возможных значений в скобках оператора IF: отрицательном, нулевом и положительном. Естественно, что вычисление тока по этой программе бессмысленно проводить для частоты, равной нулю.

Оператор GO TO определяет, что после печати значения частоты и соответствующего ей тока управление будет передано второму оператору READ, которому присвоен номер 23.

Для вычисления по этой программе была составлена входная перфокарта со следующими значениями параметров:  $E = 10$  В,  $r = 1000$  Ом,  $L = 0,1$  Г,  $C = 0,5$  мкФ. Частота менялась от 1000 до 3500 Гц с шагом 50 Гц.

Ответная информация печатается на выходном бланке. Результаты расчета приводятся ниже

1,000000	03	3,644963—03
1,500000	03	6,466553—03
2,000000	03	9,482350—03
2,500000	03	9,584666—03
3,000000	03	7,717787—03
3,500000	03	6,127667—03

Во втором операторе FORMAT использован коэффициент шкалы 1P, чтобы десятичная точка была напечатана между первой и второй значащими цифрами мантиссы. Порядок автоматически уменьшается при этом на единицу. Когда  $2\pi fL = 1/2\pi fC$ , то имеет место резонанс напряжений. В решении хорошо прослеживается широкий резонансный пик с вершиной около 2200 Гц.

**Пример П-2.** Для цепи постоянного тока (рис. П-2) рассчитать токи  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$ , протекающие через известные сопротивления  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$ , если заданы напряжения  $E_1, E_2$ .

По законам Кирхгофа для неизвестных токов  $I_1, \dots, I_5$  имеет место следующая система уравнений:

$$\begin{array}{rcl} r_1 I_1 + r_2 I_2 & & = E_2; \\ -r_2 I_2 + r_3 I_3 & + r_5 I_5 & = E_2; \\ & r_3 I_3 + r_4 I_4 & = E_2; \\ -I_1 + I_2 & + I_5 & = 0; \\ & I_3 - I_4 - I_5 & = 0. \end{array}$$

Неизвестные в исходной системе обозначим  $x(I)$ , где  $I = I(1)N$ ,  $N$  — число неизвестных, равное числу уравнений.

Коэффициенты исходной системы заданы в виде  $A(I, K)$ , где  $I, K = I(1)N$ . Элементы правой части системы обозначены через  $A(I, N+1)$ , где  $I = I(1)N$ . Число неизвестных определяется размерностью массива  $A$  в операторе DIMENSION. В программе примем  $N \leq 100$ . Применительно к рассматриваемому случаю введем ограничение  $N = 5$  с помощью операторов FORMAT с метками 50 и 52. Если нужно будет решить систему уравнений при  $N \neq 5$  и в удобной форме отпечатать результаты, то необходимо соответственно изменить эти операторы.

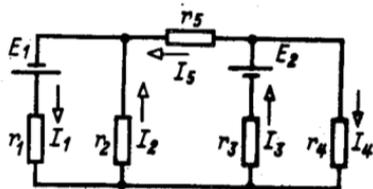


Рис. П-2. Пример 2.

Алгоритм расчета построен на методе исключения (метод Гаусса). Схема программы последовательности операций приведена на рис. П-3. Процесс исключения неизвестных не изменяет абсолютного значения определителя системы, хотя знак определителя и изменяется при каждой перестановке уравнений. После окончания процесса значения определителя равно произведению диагональных элементов, причем знак этого произведения надо изменить на обратный, если число перестановок было нечетным.

Программа так составляет столбцы заданной системы уравнений, что элемент с максимальным абсолютным значением становится диагональным. Это приводит к тому, что диагональные элементы не близки к нулю.

Исходной информацией является  $N$  (первая перфокарта), значения коэффициентов и правые части уравнений исходной системы (на последующих перфокартах).  $N$  — записывается на формате 15, а остальные значения — в столбцы по 10 значений на каждой перфокарте в формате F8.3.

Программа имеет вид:

PROGRAM GAUSS

Решение линейной системы уравнений

DIMENSION A(100, 101), X(100)

READ 100, N

N1 = N + 1



```

N2 = N - 1
READ 101, ((A (I, J), I = 1, N), J = 1, N1)
PRINT 50, H, ((A (I, J), J = 1, N1), I = 1, N)
DO1K = 1, N2
P = 0
DO2 I = K, N
H = ABSF (A (I, K))
IF (H. GT. P) 3,2
3 P = H
L = I
2 CONTINUE
DO4 J = K, N1
P = A (K, J)
A (K, J) = A (L, J)
4 A (L, J) = P
IF (ABSF (A (K, K)/A (I, I)) LT.1.E - 06) 5,6
5 PRINT 51
GO TO 10
6 K1 = K + 1
DO1 I = K1, N
P = A (I, K)/A (K, K)
A (I, K) = 0
DO1 J = K1, N1
1 A (I, J) = A (I, J) - P * A (K, J)
X (N) = A (N, N1)/A (N, N)
DO7 L = 1, N2
P = A (N-L, N1)
DO8 M = 1, L
8 P = P - A (N - L, N1 - M) * X (N1 - M)
7 X (N - L) = P/A (N - L, N - L)
PRINT 52, (X (I), I = 1, N)
10 CONTINUE
100 FORMAT (3X, 15)
101 FORMAT ( ) F8, 3)
51 FORMAT (|| 5X)
52 FORMAT (|| 5X) 31H
END

```

Для вычисления по приведенной программе была составлена входная перфокарта со следующими значениями параметров.  $E_1 = 3$  В;  $E_2 = 2$  В;  $r_1 = 40$  Ом;  $r_2 = 35$  Ом;  $r_3 = 25$  Ом;  $r_4 = 20$  Ом;  $r_5 = 30$  Ом.

Ответная информация печатается на выходном бланке и имеет следующий вид в соответствии с оператором FORMAT с меткой 51.

Решение линейной системы уравнений.

Число неизвестных  $N = 5$

Матрица коэффициентов					Правые части
40.000	35.000	0	0	0	3.000
0	-35.000	25.000	0	30.000	2.000
0	0	25.000	20.000	0	2.000
-1.000	1.000	0	0	1000	0
0	0	1.000	-1.000	-1.000	0

неизвестные значения  $x (I)$  равны

0,0579 0,0196 0,0615 0,0232 0,383 А.



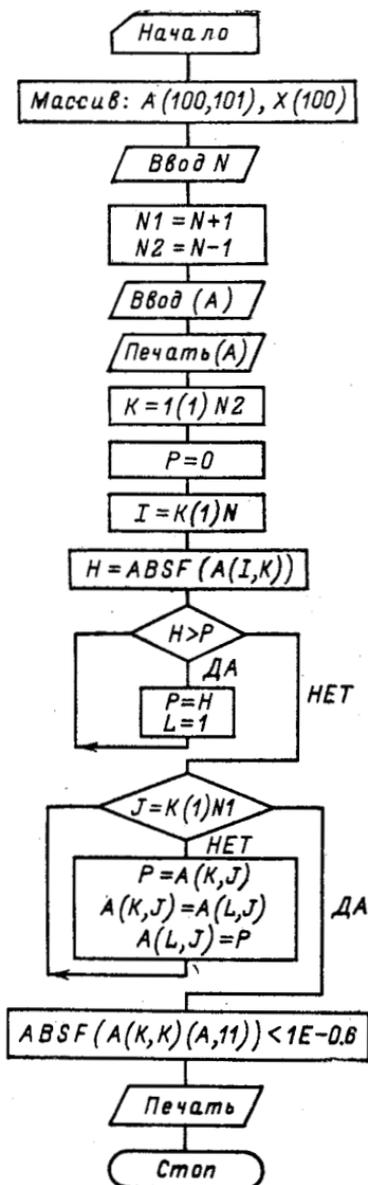


Рис. П-3. Схема программы GAUSS.

## 5. Алгоритмизация задач с использованием методов контурных токов и узловых напряжений

Программы расчета разветвленных цепей, составленные на основе законов Кирхгофа, как правило, получаются чересчур громоздкими. Для сложных разветвленных цепей более компактными получаются программы, составленные на основе метода контурных токов или узловых напряжений. Следует иметь в виду, что некоторые виды преобразований, эффективные при ручном счете, не дают аналогичного эффекта при машинном расчете цепей.

Ограничением применения метода контурных токов с целью создания алгоритмов является трудность выбора наиболее удобной системы независимых контуров.

В связи с тем, что реализация алгоритма является процессом автоматическим, не представляется возможным «подправлять» что-либо в процессе вычислений с целью лучшего выбора независимых контуров, как это имеет место, например, при ручном счете. В принципе можно разработать тактический алгоритм, который бы программным путем составлял оптимальный выбор независимых контуров. Однако при полном исследовании поставленной задачи это весьма сложно. Следует также заметить еще одно существенное обстоятельство, состоящее в том, что при использовании итерационных методов решения неудачно выбранная система независимых контуров не дает должной сходимости процесса.

Алгоритм, построенный на основе метода контурных токов в сочетании с итерационными методами применительно к системе контуров, образованных элементами с несоизмеримыми по значениям сопротивлениями, может также не дать сходимости процесса. Погрешность вычислений падений напряжений по замкнутому контуру на некотором этапе может оказаться настолько большой, что контроль правильности решения реально не может быть осуществлен. В этом случае процесс вычислений обрывается. К числу таких цепей относятся, в частности, электрические системы, схемы замещения объектов с распределенными параметрами. Другим весьма важным обстоятельством, ограничивающим построение алгоритма при использовании метода контурных токов, является то, что изменение геометрической структуры цепи связано с необходимостью выбора новой системы независимых контуров. При изменившихся условиях невозможно использовать предыдущие результаты расчета на ЭВМ. Приходится заново составлять исходную информацию как в части геометрической структуры цепи, так и для граничных условий. Таким образом, в случае повторяющихся расчетов при любом, даже незначительном изменении конфигурации цепи расчет проводится заново с соблюдением всех расчетных этапов.

Алгоритмы, основанные на уравнениях контурных токов, эффективно используются при расчете цепей, содержащих взаимную индуктивность между участками.

Алгоритмы, созданные на основе метода узловых напряжений, могут быть эффективно использованы для решения широкого круга задач. Так, в основу расчетов электрических сетей положен такой алгоритм, поскольку напряжения узлов определяют режим в этих системах. При принятой системе узлов и ветвей матрица коэффициентов составляется один раз. Это ценное качество метода позволяет довольно просто видоизменять сопутствующую информацию в случае частичного изменения геометрической структуры цепи при рассмотрении различных вариантов.



Математические преимущества применения метода узловых напряжений, помимо удобства для вычислений и значительного сокращения числа арифметических операций, заключаются в наличии более быстрых средств для улучшения приближенного решения задачи. Для определения распределения нагрузок в системе методом узловых напряжений используется в качестве критерия первый закон Кирхгофа.

Уравнение узловых напряжений для  $k$ -го узла имеет вид:

$$\sum_i (\dot{U}_i - \dot{U}_k) Y_{ki} = \dot{S}_k^* / \dot{U}_i,$$

где  $Y_{ki}$  — проводимость ветви  $ki$ ;  $\dot{U}_i, \dot{U}_k$  — узловые напряжения;  $\dot{S}_k^*$  — комплексная мощность, подведенная к узлу  $k$ .

Следует также заметить, что метод узловых напряжений позволяет использовать линейные преобразования для повышения точности расчета в случаях, когда значения напряжений смежных узлов могут оказаться близкими.

**Пример П-3.** Составить алгоритм расчета напряжений в узлах цепной схемы (рис. П-4) со сколь угодно большим числом узлов  $n$ .

К такому виду приводится схема замещения однородной линии с распределенными параметрами. При расчетах линию представляют состоящей из конечного числа соединенных между собой четырехполюсников. Параметры четырехполюсника могут быть определены по П- или Т-образной схеме замещения.

Для построения математической модели воспользуемся методом узловых напряжений. Система уравнений применительно к  $n$  узлам схемы (рис. П-4) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{U}_0 - \dot{U}_1}{Z_1} - Y_1 \dot{U}_1 - \frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_2}{Z_2} &= 0; \\ \dots & \\ \frac{\dot{U}_i - \dot{U}_{i+1}}{Z_{i+1}} - Y_{i+1} \dot{U}_{i+1} - \frac{\dot{U}_{i+1} - \dot{U}_{i+2}}{Z_{i+2}} &= 0; \\ \dots & \\ \frac{\dot{U}_{n-1} - \dot{U}_n}{Z_n} - \dot{U}_n Y_n &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{П-4})$$

где  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n; Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  — соответственно сопротивления и проводимости схемы замещения элементарных четырехполюсников;  $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dots, \dot{U}_n$  — неизвестные узловые напряжения.

Полученная математическая модель представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами. Существует много способов решения такой системы. При непосредственном вычислении разностей  $\dot{U}_{i+1} - \dot{U}_i$  могут теряться размеры числа, поэтому для алгоритмизации предлагается следующий способ.

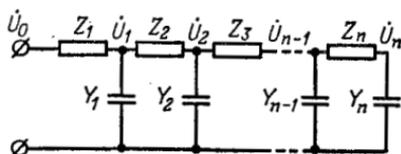


Рис. П-4. Цепная схема с  $n$  узлами.



Обозначим

$$\frac{\dot{U}_0 - \dot{U}_1}{Z_1} = I_0; \quad \frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_{1+1}}{Z_{1+1}} = I_1; \quad \dots; \quad \frac{\dot{U}_{n-1} - \dot{U}_n}{Z_n} = I_{n-1}.$$

Тогда исходная система (П-4) представляется в виде

$$\left. \begin{aligned} I_{n-1} &= Y_n \dot{U}_n + 0; & \dot{U}_{n-1} &= I_{n-1} Z_n + \dot{U}_n; \\ I_{n-2} &= Y_{n-1} \dot{U}_{n-1} + I_{n-1}; & \dot{U}_{n-2} &= I_{n-2} Z_{n-1} + \dot{U}_{n-1}; \\ & \dots & & \dots \\ I_1 &= Y_{1+1} \dot{U}_{1+1} + I_{1+1}; & \dot{U}_1 &= I_1 Z_{1+1} + \dot{U}_{1+1}; \\ & \dots & & \dots \\ I_1 &= Y_2 \dot{U}_2 + I_2; & \dot{U}_1 &= I_1 Z + \dot{U}_2; \\ I_0 &= Y_1 \dot{U}_1 + I_1; & \dot{U}_0 &= I_0 Z_1 + \dot{U}_1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П-5})$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} Z_n I_{n-1} &= I_{n-1} Z_n - \dot{U}_n; & Z_n I_{n-1} &= \dot{U}_{n-2} - \dot{U}_{n-1}; & \dots \\ \dots; & & Z_2 I_1 &= \dot{U}_1 - \dot{U}_2; & Z_1 I_0 &= \dot{U}_0 - \dot{U}_1, \end{aligned}$$

поэтому, чтобы получить нужные разности, можно вычислять произведения  $Z_n I_{n-1}$ ;  $Z_{n-1} I_{n-2}$  и т. д.

Поскольку рассматриваемая электрическая схема состоит из линейных элементов, то все величины  $I_i$  и  $\dot{U}_i$  пропорциональны  $\dot{U}_n$ . Это также легко усмотреть из системы (П-5).

Обозначив коэффициенты пропорциональности соответственно через  $\beta_i$  и  $\alpha_i$ , имеем:

$$\left. \begin{aligned} I_{n-1} &= \beta_{n-1} \dot{U}_n; \\ \dot{U}_{n-1} &= \alpha_{n-1} \dot{U}_n; \\ I_{n-2} &= \beta_{n-2} \dot{U}_n; \\ & \dots \\ I_1 &= \beta_1 \dot{U}_n; \\ \dot{U}_1 &= \alpha_1 \dot{U}_n; \\ I_0 &= \beta_0 \dot{U}_n; \\ \dot{U}_0 &= \alpha_0 \dot{U}_n. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П-6})$$

Если положить  $\dot{U}_n = 1 + j0$ , то из (П-5) вместо  $I_i$  и  $\dot{U}_i$  найдем  $\beta_i$  и  $\alpha_i$ . Вычислив  $\alpha_0$ , определяют  $\dot{U}_n$  из последнего равенства (П-6). Затем по формулам (П-5) определяют все неизвестные напряжения. Такой процесс решения самоконтролируем, так как в случае правильного решения правая часть последнего уравнения системы (П-5) должна оказаться равной напряжению на входе. Коэффициенты системы (П-4) вычисляются в машине по известным формулам Т- или П-образных схем замещения линий. Для этого в машину вводятся следующие параметры: активная проводимость  $g$ ; длина каждого замещаемого участка линии  $l$ , индуктивное сопротивление участка линии  $L$ , проводимость на участке линии  $y$ , относительная частота  $k$ . Также указывается число участков, которыми представлена линия. Кроме того, для решения системы (П-4)



задается напряжение в начале линии. Таким образом, программа предусматривает расчет параметров линии.

Заметим, что при решении системы (П-5) потребовалось всего одно действие деления (для нахождения  $U_n$ ). Коэффициент  $\alpha_0$  в зависимости от параметров электрической цепи может оказаться малым, так что деление на  $\alpha_0$  в ЭВМ окажется невозможным; машина остановится из-за переполнения. В этом случае в программе предусмотрено увеличение коэффициентов пропорциональности в  $10^p$  раз, где  $p$  — подбирается так, чтобы правая часть последнего уравнения системы (П-6) была возможно близкой к  $10^p$ . Последнее и является контролем правильности решения. Программа выводит на печать как исходные данные, так и все вычисленные значения.

**Пример П-4.** Составить схему программы применительно к алгоритмическому языку ФОРТРАН для решения системы из  $n$  уравнений (7-5), составленных на основе метода узловых напряжений — расчетной схемы Гаусса—Зейделя.

Система (7-5) состоит из  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными. Чтобы проиллюстрировать метод, рассмотрим систему из трех уравнений,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2;$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

Представим систему в следующем виде:

$$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11}; \quad (a)$$

$$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22}; \quad (б)$$

$$x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33}. \quad (в)$$

Возьмем некоторое первое приближение к решению этой системы, обозначив его  $x_1^{(0)}$ ,  $x_2^{(0)}$ ,  $x_3^{(0)}$ . Подставим его в (а) и вычислим новое значение  $x_1$ :

$$x_1^{(1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)})/a_{11}.$$

Используя вычисленное  $x_1^{(1)}$  и начальное значение  $x_3^{(0)}$ , вычислим из (б) новое значение  $x_2$

$$x_2^{(1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)})/a_{22}.$$

Используя значения  $x_1^{(1)}$  и  $x_2^{(1)}$ , найдем из (в) новое значение  $x_3$

$$x_3^{(1)} = (b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)})/a_{33}.$$

Этим заканчивается первая итерация. Теперь можно заменить исходные значения  $x_1^{(0)}$ ,  $x_2^{(0)}$  и  $x_3^{(0)}$  на  $x_1^{(1)}$ ,  $x_2^{(1)}$ ,  $x_3^{(1)}$  и вычислить следующее приближение. Текущие неизвестные сразу же используются для последующих вычислений. Нельзя вычислять, например,  $x_2^{(k)}$ , пока не получено  $x_1^{(k)}$ . Аналогично этому для вычисления  $x_3^{(k)}$  надо сначала определить  $x_1^{(k)}$  и  $x_2^{(k)}$ .

В случае  $n$  уравнений  $k$ -е приближение к решению будет задаваться формулой

$$x_i^{(k)} = (b_i - a_{i1}x_1^{(k)} - \dots - a_{i, i-1}x_{i-1}^{(k)} - \dots - a_{in}x_n^{(k-1)}), \quad i=1, 2, \dots, n.$$



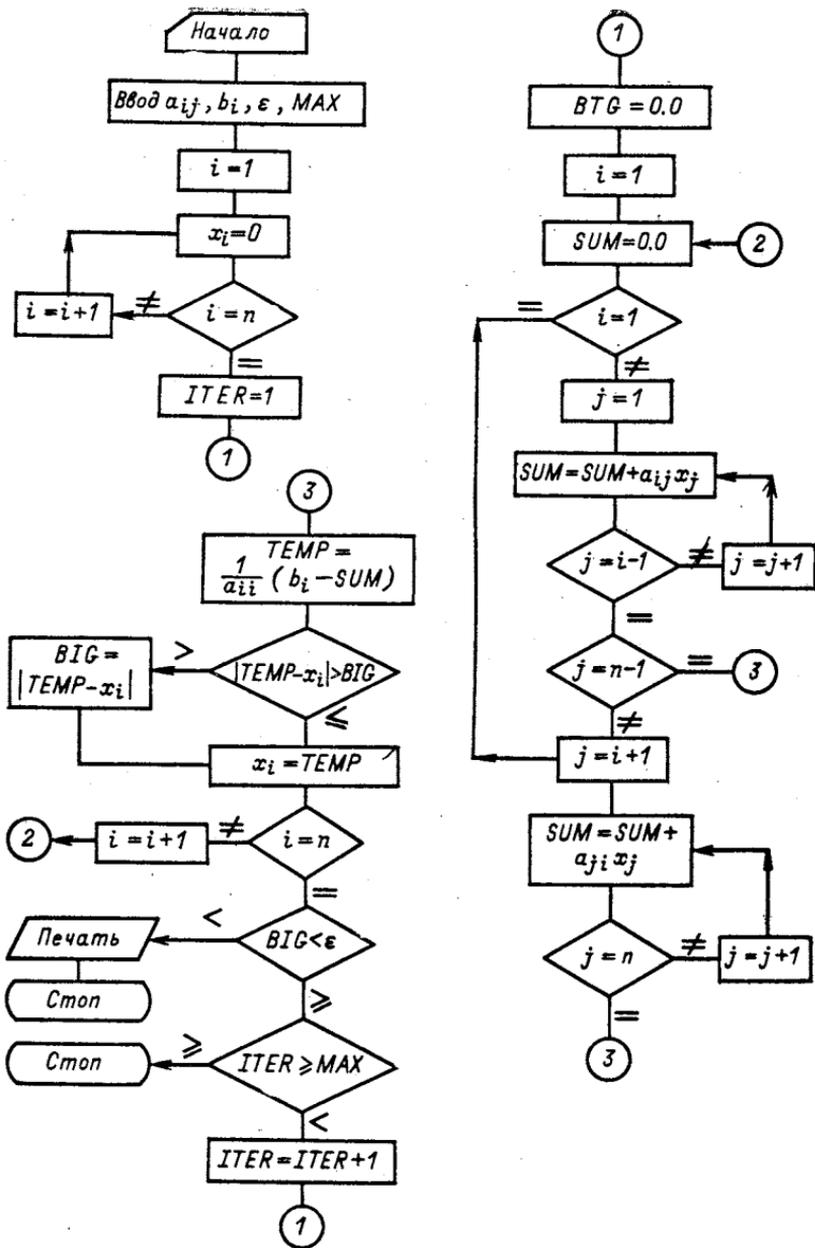


Рис. П-5.



Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока все  $x_i^{(k)}$  не станут достаточно близкими к  $x_i^{(k-1)}$ .

Критерий близости можно, например, задать в следующем виде:

$$M^{(k)} = \max |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| < \epsilon.$$

Схема программы для вычислений по методу Гаусса—Зейделя приведена на рис. П-5.

Для решения системы (7-5) начальное приближение принимается равным нулю, а счетчик числа итераций получает значение 1. Для подсчета числа итераций используется переменная целого типа ITER. При дальнейших вычислениях эти начальные действия не повторяются. В конце этой части схемы стоит кружок с цифрой 1, что означает, что следующая схема начинается с этой позиции.

Переменная BIG используется для того, чтобы определять  $\max |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|$ . Сначала этой переменной присваивается значение нуль, а затем с ней сравниваются абсолютные значения  $|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|$ . После вычисления всех  $x_i^{(k)}$  наибольшая разность будет равна значению переменной BIG.

Затем в схеме следует группа действий для вычисления суммы всех членов уравнения кроме диагонального. В начале программы с перфокарты прочитано число MAX, которое определяет максимально допустимое число итераций.

Исходная информация вводится в ЭВМ извне и результаты печатаются.

Ориентировочно для MAX можно принять значение 50, если система (7-5) состоит из 50 уравнений.

## 6. Уменьшение избыточности исходной информации в линейных цепях

Система уравнений, составленных по методу контурных токов или узловых напряжений, сводится к решению типа

$$Ax - b = 0,$$

где  $A$  — квадратная матрица порядка  $n$ ;  $x$  и  $b$  — векторы  $1$   $n$ -го порядка.

Решение системы может быть произведено либо непосредственным нахождением  $x$ , либо сначала может быть решена более общая задача определения матрицы, обратной  $A$ , после чего искомое решение системы уравнений получается в виде

$$x = A^{-1}b.$$

Сравнивая различные подходы к решению уравнений, следует отметить, что первый подход требует меньшего времени. В большинстве применяемых методов время умножений сокращается примерно на  $1/3$ . Число умножений составляет примерно  $n^3/3$ .

<sup>1</sup> Подразумеваются столбцовые матрицы.



Определение обратной матрицы и преобразование посредством отыскания каждого из векторов  $b$  вносит дополнительно  $n^2$  умножений и  $n$  записей для каждого вектора по сравнению с первым случаем.

Не всегда удается хранить в оперативной памяти машины всю исходную информацию. Обращение к внешней памяти и создает ряд затруднений в части программной реализации и, кроме того, снижает темп работы машины. Ограничения, налагаемые объемом памяти машины и временем выборки чисел из нее, выдвигают важную проблему сокращения количества первоначальной информации, а также уменьшения числа операций в применяемом численном методе и структуре формирования электротехнических алгоритмов.

Используя свойство взаимности в линейных электрических цепях, применяем при построении алгоритма численные методы, предназначенные для решения уравнений с симметричными матрицами  $A$ . Эти методы требуют значительно меньше записей, что обеспечивает экономию времени при реализации алгоритмов на ЭВМ. Методы, предназначенные для решения уравнений с симметричными матрицами, в принципе должны обладать большей точностью, так как при каждой записи производится одно округление и появляется связанная с этим ошибка. Одним из недостатков, присущих алгоритму, составленному с использованием метода исключения, даже в наиболее благоприятном случае, когда матрица симметрична, является то, что значительная часть времени расходуется на запись цифр, применяемых на различных стадиях вычислений.

Симметричный вид коэффициентных матриц, возникающих при исследовании электротехнических задач, позволяет создать экономную вычислительную схему.

Число записей при работе над симметричной матрицей сокращается с  $2n^2 + 4n$  до  $3n^2/2 + 9n/2$ . Число основных операций для решения системы уравнений, составленных по методу контурных токов для узловых напряжений, уменьшается с  $n^3 + 1,5n^2 + 1,5n$  до  $n^3/3 + n^2 - n/3$ .

Наличие симметричной матрицы обуславливает возможность применения наиболее эффективных методов последовательных приближений для определения собственных чисел, предлагаемых специально применительно к симметричным матрицам. При этом представляется возможным рассматривать только верхнюю или нижнюю треугольную матрицу. При рассмотрении симметричной матрицы вместо  $n^2$  элементов матрицы в оперативной памяти машины будет храниться  $(n^2 + n)/2$  элементов,



СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ЧЕТЫРЕХПОЛУСНИКА

	Z	Y	H	G	A	B
Z	$Z_{11}$ $Z_{12}$ $Z_{21}$ $Z_{22}$	$\frac{Y_{22}}{ Y }$ $\frac{-Y_{12}}{ Y }$ $\frac{-Y_{21}}{ Y }$ $\frac{Y_{11}}{ Y }$	$\frac{ H }{H_{22}}$ $\frac{H_{12}}{H_{22}}$ $\frac{-H_{21}}{H_{22}}$ $\frac{1}{H_{22}}$	$\frac{1}{G_{11}}$ $\frac{-G_{12}}{G_{11}}$ $\frac{G_{21}}{G_{11}}$ $\frac{ G }{G_{11}}$	$\frac{A_{11}}{A_{21}}$ $\frac{ A }{A_{21}}$ $\frac{1}{A_{21}}$ $\frac{A_{22}}{A_{21}}$	$\frac{B_{22}}{B_{21}}$ $\frac{1}{B_{21}}$ $\frac{ B }{B_{21}}$ $\frac{B_{12}}{B_{21}}$
Y	$\frac{Z_{22}}{ Z }$ $\frac{-Z_{12}}{ Z }$ $\frac{Z_{11}}{ Z }$ $\frac{-Z_{21}}{ Z }$	$Y_{12}$ $Y_{11}$ $Y_{22}$ $Y_{21}$	$\frac{1}{H_{11}}$ $\frac{-H_{12}}{H_{11}}$ $\frac{ H }{H_{11}}$ $\frac{H_{21}}{H_{11}}$	$\frac{ G }{G_{22}}$ $\frac{G_{12}}{G_{22}}$ $\frac{-G_{21}}{G_{22}}$ $\frac{1}{G_{22}}$	$\frac{A_{22}}{A_{12}}$ $\frac{- A }{A_{12}}$ $\frac{A_{11}}{A_{12}}$ $\frac{-1}{A_{12}}$	$\frac{B_{11}}{B_{12}}$ $\frac{-1}{B_{12}}$ $\frac{ B }{B_{12}}$ $\frac{B_{22}}{B_{12}}$
H	$\frac{ Z }{Z_{22}}$ $\frac{Z_{12}}{Z_{22}}$ $\frac{-Z_{21}}{Z_{22}}$ $\frac{1}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Y_{11}}$ $\frac{-Y_{12}}{Y_{11}}$ $\frac{Y_{21}}{Y_{11}}$ $\frac{ Y }{Y_{11}}$	$H_{11}$ $H_{12}$ $H_{21}$ $H_{22}$	$\frac{G_{22}}{ G }$ $\frac{-G_{13}}{ G }$ $\frac{-G_{21}}{ G }$ $\frac{G_{11}}{ G }$	$\frac{A_{12}}{A_{22}}$ $\frac{ A }{A_{22}}$ $\frac{-1}{A_{22}}$ $\frac{A_{21}}{A_{22}}$	$\frac{B_{12}}{B_{11}}$ $\frac{1}{B_{11}}$ $\frac{- B }{B_{11}}$ $\frac{B_{21}}{B_{11}}$

	Z	Y	H	G	A	B
G	$\frac{1}{Z_{11}}$	$\frac{ Y }{Y_{22}}$	$\frac{H_{22}}{ H }$	$G_{11}$	$\frac{A_{21}}{A_{11}}$	$\frac{B_{21}}{B_{22}}$
	$\frac{-Z_{12}}{Z_{11}}$	$\frac{Y_{12}}{Y_{22}}$	$\frac{-H_{12}}{ H }$	$G_{12}$	$\frac{- A }{A_{11}}$	$\frac{-1}{B_{22}}$
A	$\frac{Z_{21}}{Z_{11}}$	$\frac{-Y_{21}}{Y_{22}}$	$\frac{-H_{21}}{ H }$	$G_{21}$	$\frac{1}{A_{11}}$	$\frac{ B }{B_{22}}$
	$\frac{ Z }{Z_{11}}$	$\frac{1}{Y_{22}}$	$\frac{H_{11}}{ H }$	$G_{22}$	$\frac{A_{12}}{A_{11}}$	$\frac{B_{12}}{B_{22}}$
B	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}}$	$\frac{-Y_{22}}{Y_{21}}$	$\frac{- H }{H_{21}}$	$\frac{1}{G_{21}}$	$A_{11}$	$\frac{B_{22}}{ B }$
	$\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$\frac{-Y_{21}}{Y_{21}}$	$\frac{-H_{11}}{H_{21}}$	$\frac{G_{22}}{G_{21}}$	$A_{12}$	$\frac{B_{12}}{ B }$
A	$\frac{1}{Z_{21}}$	$\frac{- Y }{Y_{21}}$	$\frac{-H_{22}}{H_{21}}$	$\frac{G_{11}}{G_{21}}$	$A_{21}$	$\frac{B_{21}}{ B }$
	$\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$\frac{-Y_{11}}{Y_{21}}$	$\frac{-1}{H_{21}}$	$\frac{ G }{G_{21}}$	$A_{22}$	$\frac{B_{11}}{ B }$
B	$\frac{Z_{22}}{Z_{12}}$	$\frac{-Y_{11}}{Y_{12}}$	$\frac{1}{H_{12}}$	$\frac{- G }{G_{12}}$	$\frac{A_{22}}{ A }$	$B_{11}$
	$\frac{1}{Z_{12}}$	$\frac{-Y_{12}}{Y_{12}}$	$\frac{H_{11}}{H_{12}}$	$\frac{-G_{22}}{G_{12}}$	$\frac{A_{12}}{ A }$	$B_{12}$
B	$\frac{Z_{11}}{Z_{12}}$	$\frac{- Y }{Y_{12}}$	$\frac{H_{22}}{H_{12}}$	$\frac{-G_{11}}{G_{12}}$	$\frac{A_{21}}{ A }$	$B_{21}$
	$\frac{1}{Z_{12}}$	$\frac{-Y_{22}}{Y_{12}}$	$\frac{ H }{H_{12}}$	$\frac{-1}{G_{12}}$	$\frac{A_{11}}{ A }$	$B_{22}$



ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, ВЫРАЖЕННЫЕ ЧЕРЕЗ КОЭФФИЦИЕНТЫ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

	Z	Y	H	G	A	B
Z	$Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$	$\frac{1}{ Y }$	$\frac{H_{11}}{H_{22}}$	$\frac{G_{22}}{G_{11}}$	$\frac{A_{12}}{A_{21}}$	$\frac{B_{12}}{B_{21}}$
Y	$\frac{1}{ Z }$	$Y_{11}Y_{12} - Y_{12}Y_{21}$	$\frac{H_{22}}{H_{11}}$	$\frac{G_{11}}{G_{22}}$	$\frac{A_{21}}{A_{12}}$	$\frac{B_{21}}{B_{12}}$
H	$\frac{Z_{11}}{Z_{22}}$	$\frac{Y_{22}}{Y_{11}}$	$H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21}$	$\frac{1}{ G }$	$\frac{A_{11}}{A_{22}}$	$\frac{B_{22}}{B_{11}}$
G	$\frac{Z_{22}}{Z_{11}}$	$\frac{Y_{11}}{Y_{22}}$	$\frac{1}{ H }$	$G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}$	$\frac{A_{22}}{A_{11}}$	$\frac{B_{11}}{B_{22}}$
A	$\frac{Z_{12}}{Z_{21}}$	$\frac{Y_{12}}{Y_{11}}$	$-\frac{H_{12}}{H_{21}}$	$-\frac{G_{12}}{G_{21}}$	$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$	$\frac{1}{ B }$
B	$\frac{Z_{21}}{Z_{12}}$	$\frac{Y_{21}}{Y_{12}}$	$-\frac{H_{21}}{H_{12}}$	$-\frac{G_{21}}{G_{12}}$	$\frac{1}{ A }$	$B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21}$



ОРИГИНАЛЫ И ИЗОБРАЖЕНИЯ ПО ЛАПЛАСУ

$F(p)$	$f(t)$
1	$\delta(t) = \begin{cases} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} & \text{при } 0 < t < \tau; \\ 0 & \text{при } 0 > t > \tau \end{cases}$
$\frac{1}{p}$	1
$\frac{1}{p^2}$	$t$
$\frac{1}{p^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ ; $n$ — целое положительное число
$\frac{1}{p+a}$	$e^{-at}$
$\frac{1}{p(p+a)}$	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$
$\frac{1}{p^2(p+a)}$	$\frac{1}{a^2}(e^{-at} + at - 1)$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	$te^{-at}$
$\frac{p}{(p+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$
$\frac{1}{(p+a)^3}$	$\frac{1}{2}t^2e^{-at}$
$\frac{p}{(p+a)^3}$	$t\left(1 - \frac{a}{2}t\right)e^{-at}$



$F(p)$	$f(t)$
$\frac{1}{(p+a)^n}$ $\frac{1}{p(p+a)^n}$ $\frac{p^n}{(p+a)^{n+1}}$	$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \\ & \frac{1}{a^n} \left[ 1 - e^{-at} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(at)^k}{k!} \right] \\ & e^{-at} \sum_{k=0}^n \frac{n! (-a)^k}{(n-k)! (k!)^2} t^k \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} n - \text{целое} \\ \text{положи-} \\ \text{тельное} \\ \text{число} \end{array}$
$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$
$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{ab} + \frac{1}{b-a} \left( \frac{e^{-bt}}{b} - \frac{e^{-at}}{a} \right)$
$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{b-a} (be^{-bt} - ae^{-at})$
$\frac{1}{p^2 + a^2}$	$\frac{1}{a} \sin at$
$\frac{1}{p(p^2 + a^2)}$	$\frac{1}{a^2} (1 - \cos at)$
$\frac{p}{p^2 + a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{p^2 - a^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{sh} at$
$\frac{p}{p^2 - a^2}$	$\operatorname{ch} at$
$\frac{p \cos b - a \sin b}{p^2 + a^2}$	$\cos (at + b)$
$\frac{p \sin b + a \cos b}{p^2 + a^2}$	$\sin (at + b)$
$\frac{1}{(p^2 + a^2)^2}$	$\frac{\sin at}{2a^3} - \frac{t \cos at}{2a^2}$



$F(p)$	$f(t)$
$\frac{p}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a} t \sin at$
$\frac{p^2}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a} (\sin at + at \cos at)$
$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$t \cos at$
$\frac{1}{(p^2-a^2)^2}$	$\frac{t \operatorname{ch} at}{2a^2} - \frac{\operatorname{sh} at}{2a^3}$
$\frac{p}{(p^2-a^2)^2}$	$\frac{1}{2a} t \operatorname{sh} at$
$\frac{1}{(p+a)^2+b^2}$	$e^{-at} \frac{\sin bt}{b}$
$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$	$e^{-at} \cos bt$
$\frac{(p+a) \cos \psi - b \sin \psi}{(p+a)^2+b^2}$	$e^{-at} \cos (bt + \psi)$
$\frac{(p+a) \sin \psi + b \cos \psi}{(p+a)^2+b^2}$	$e^{-at} \sin (bt + \psi)$
$\frac{1}{(p+a)^2-b^2}$	$e^{-at} \frac{\operatorname{sh} bt}{b}$
$\frac{p+a}{(p+a)^2-b^2}$	$e^{-at} \operatorname{ch} bt$
$p - \frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
$p - \frac{3}{2}$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$

---

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акульшин П. К., Евланов С. Н. Основы теории электрической связи. М., Связьиздат, 1960.
2. Атабеков Г. И. Теория линейных электрических цепей. М., «Советское радио», 1960.
3. Атабеков Г. И. Основы теории цепей. М., «Энергия», 1969.
4. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. М., «Высшая школа», 1973.
5. Гарднер М. Ф., Бэрнс Дж. Л. Переходные процессы в линейных системах. М., Физматгиз, 1961.
6. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. Ч. 1. М., «Советское радио», 1971.
7. Жуховицкий Б. Я., Негневицкий И. Б. Теоретические основы электротехники. Т. 2. М., «Энергия», 1972.
8. Основы теории цепей. М., «Энергия», 1975. Авт.: Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов.
9. Зелях Э. В. Основы общей теории линейных электрических цепей. М., Изд-во АН СССР, 1951.
10. Теоретические основы электротехники. М., «Высшая школа», 1965. Авт.: П. А. Ионкин, Н. А. Мельников, А. И. Даревский, Е. С. Кухаркин.
11. Караев Р. И. Переходные процессы в линиях большой протяженности. М., «Энергия», 1978.
12. Круг К. А. Основы электротехники. Ч. 1 и 2. М.—Л., Госэнергоиздат, 1946.
13. Поливанов К. М. Теоретические основы электротехники. Т. 1. М., «Энергия», 1972.
14. Нейман Л. Р., Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники. Т. 1. Л., «Энергия», 1975.
15. Реза Ф., Сили С. Современный анализ электрических цепей. М.—Л., «Энергия», 1964.
16. Сешу С., Балабания Н. Анализ линейных электрических цепей. М.—Л., Госэнергоиздат, 1963.



## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автотрансформатор 222  
Активные элементы цепи 20  
Алгоритмы расчета 560, 562  
Амплитуда 51  
— комплексная 76  
Амплитудные искажения 343  
Аналогии электромеханические 192  
Аперриодический процесс 446
- Базисный узел 163  
Баланс мощностей 94  
Близости эффект 33
- Вариометр 211  
Вебер-амперная характеристика 26  
Вектор вращающийся 77  
Векторная диаграмма 79  
Величина (вес) дерева 303  
— — пути 305  
Ветвь схемы 42  
— намагничивания 216  
Взаимная индукция 199  
Вихревые токи 33  
Внешняя характеристика 44  
Вносимое затухание 127  
— — четырехполюсника 254  
Волна обратная 333, 460  
— отраженная 333, 460  
— падающая 332  
— преломленная 461  
— прямая 332, 460  
— стоячая 348  
Волновое сопротивление линии 331, 334, 338  
— — операторное 509  
— (характеристическое) сопротивление контура 123  
Вольт-амперная характеристика 25, 43, 44  
Вольт-амперные характеристики источников энергии 39  
Время запаздывания 526  
Вторичные параметры линии 338  
Вход четырехполюсника 233  
Высшие гармоники 401  
— — в трехфазной цепи 422  
Выход четырехполюсника 233  
Вычеты функции 504
- Гармонический ряд 403  
Геометрическое место комплексного вектора 146  
Графоаналитическое разложение в ряд Фурье 405  
Графы 156  
— сигнальные 302, 315
- Двухполюсники 136, 523, 530  
— активные 136  
— двухэлементные 138  
— многоэлементные 141  
— одноэлементные 137  
— пассивные 136  
— приведенные 142  
— реактивные 137  
— с потерями 137
- Двухфазное короткое замыкание 388, 390  
Действующее значение комплексное 82  
— — несинусоидальной функции 418  
— — синусоидальной функции 56  
Декремент колебаний 449  
Дерево 156, 303  
Децибел 253  
Диаграммы проводимостей и сопротивлений 149  
Дирихле условия 402  
Дифференцирующее звено 440  
Диэлектрическая проницаемость 36  
Длина волны 322  
Длинная линия 337  
Добротность 450  
— катушки 67  
— конденсатора 69  
— контура (цепи) 123, 130  
Дуальные цепи 189
- Емкость 29  
— кабеля 327  
— конденсатора 36  
— линии 326
- Закон Джоуля—Ленца 24  
— Ленца 26  
— Ома 24  
— — при переменном токе 60, 65, 82  
— Фарадея—Максвелла (электромагнитной индукции) 26  
Законы Кирхгофа 46, 154  
— коммутации 429  
Затухание вносимое 254  
— контура 127  
— собственное четырехполюсника 249
- Идеализация элементов цепи 20, 32  
Изображение по Карсону 467  
— — Лапласу 467, 578  
Инверсия ветви 319  
Индуктивная катушка 122  
— связь 234  
Индуктивно-связанные контуры 198, 294  
Индуктивность 25  
— взаимная 28, 199  
— кабеля 327  
— катушки 35  
— линии 326  
— рассеяния 210  
Интеграл Дюамеля 472, 477, 501  
— Фурье 513  
Интегрирующее звено 440  
Инцидентный матрица 187  
Исток 317  
Источник бесконечной мощности 38  
— зависимый (неавтономный) 176  
— независимый (автономный) 169  
— тока 38, 184  
— электрической энергии 19



Источник э. д. с. 37, 180  
Источники энергии эквивалентные 110, 180  
Канонические схемы Фостера 540  
Каскадное соединение четырехполюсников 257, 259  
Классический метод расчета переходных процессов 427  
Колесания затухающие 449  
— энергии 61, 63  
Колесательные контуры 120, 121  
— процессы 447  
Коммутация 429  
Комплексная форма расчета 76  
— — ряда Фурье 412  
Конденсатор 29, 35, 69, 122  
Контур 42  
— независимый 155  
— параллельный колебательный 120, 130  
— последовательный колебательный 120  
— с малыми потерями 132  
Короткое замыкание 184, 436, 442  
— — однородной линии 350, 351  
Коэффициент амплитуды 421  
— бегущей волны 352  
— искажения 421  
— мощности 70, 421  
— ослабления 331, 338  
— отражения 255, 334  
— передачи (передаточная функция) 256  
— полезного действия 92, 94, 228  
— распространения 330  
— — операторный 509  
— связи 211  
— — критический 230  
— трансформации 215  
— усиления 256  
— фазы линии 331, 338  
— — четырехполюсника 249  
— формы кривой 421  
Коэффициенты ряда Фурье 403, 515  
— четырехполюсника 238, 575  
Кулон-вольтная характеристика 29  
  
Линейный элемент цепи 40  
Линия длинная 333  
— — без искажений 343  
— — — потеря 345  
— — искусственная 359  
— — как элемент резонансной цепи 358  
— — однородная 326  
Магнитная индукция 53  
— проводимость 210  
— проницаемость 35  
Магнитное поле 25  
— — вращающееся 378  
— — пульсирующее 379  
Магнитодвижущая сила 35, 216  
Матрица контуров (инцидентий) 187  
Матрицы 185  
Матричные уравнения 186, 251  
Машинный расчет цепей 558  
Мера передачи 249  
Метод двух узлов 112  
— деревьев 302  
— единичного тока (метод подобия) 105  
— комплексных амплитуд 76

Метод контурных токов 158  
— наложения 167  
— подобия (метод единичного тока) 105  
— сигнальных графов 302  
— симметричных составляющих 385  
— узловых напряжений 163  
Модуль 77  
Мощность активная (средняя) 59, 71, 419  
— искажения 420  
— комплексная 90  
— мгновенная 22, 28, 31, 58  
— полная 72  
— реактивная 72, 420  
— трехфазной цепи 369, 376  
  
Напряжение 21  
— активное 66  
— комплексное 82  
— линейное 366  
— реактивное 66  
— смещения нейтрали 372  
— узловое 163  
— холостого хода 179  
Неискаженная передача 343, 526  
Нейтральная точка 364  
Ненулевые начальные условия 430, 492  
Непер 253  
Несимметрия поперечная 388  
— продольная 393  
Несинусоидальные токи 414  
Несинусоидальный периодический процесс 401  
Нулевая последовательность 386  
Ноль функции 139, 531

Обратимые цепи 174  
Обратная передача 237  
— последовательность 386  
— связь 269  
Обратное преобразование Лапласа 477  
Обрыв фазы 393  
Однофазное короткое замыкание 388, 392  
Однофазный синусоидальный ток 50  
Оператор вращения (поворота) 78  
Опережение по фазе 66  
Оригиналы 467, 578  
Отражение волн 461  
Отставание по фазе 66

Параллельное соединение 67, 84, 101, 149  
— — четырехполюсников 260  
Параллельно-последовательное соединение четырехполюсников 260  
Параметр связи 231  
Параметры однородной линии вторичные 338  
— — — первичные 326  
— холостого хода и короткого замыкания четырехполюсника 242  
— — четырехполюсника 237  
— — — характеристические 248  
Пассивные элементы цепи 20  
Передача максимума мощности 91  
— ветви 316  
— сигнального графа 317  
Передачи прямая и обратная 237



- Переходные процессы 427, 561  
 — в цепи распределенными па-  
 раметрами 459, 508  
 — — — сосредоточенными  
 параметрами 427  
 Переходный ток 433  
 Поверхностный эффект 33  
 Положительная действительная  
 функция 531  
 Положительные направления тока  
 и напряжения 21  
 Полоса задерживания (затухания) 290  
 — пропускания 126, 230, 270  
 Полюс функции 139  
 Последовательное соединение 64,  
 80, 99, 148  
 — — четырехполюсников 259  
 Последовательно-параллельное со-  
 единение четырехполюсников 261  
 Последовательность (чередование)  
 фаз 374, 386  
 Постоянная времени 436, 440, 449  
 — магнитная 35  
 — электрическая 36  
 Постоянная составляющая 403  
 Потенциала распределение 45  
 Потенциальная диаграмма 95  
 Поток магнитный 35  
 — рассеяния 210  
 Потокосцепление 26  
 Правила левой и правой руки 53, 54  
 Правило правоходного винта 27  
 Предельные соотношения 472, 476  
 Преобразование звезды в треуголь-  
 ник 109  
 — Лапласа 465  
 — симметричных схем 116  
 — схем с двумя узлами 112  
 — — — источниками 110, 113  
 — — со смешанным соединением  
 103  
 — треугольника в звезду 107  
 — Фурье 512  
 Приемник электрической энергии 19  
 Принцип непрерывности заряда 432  
 — — потокосцепления 431  
 Проводимость 24  
 — активная 68  
 — взаимная (передаточная) 170  
 — входная 170  
 — емкостная 62  
 — индуктивная 60  
 — комплексная 85  
 — общая узлов 164  
 — операторная 185  
 — передаточная 452  
 — — (взаимная) 170  
 — переходная 499  
 — полная 68  
 — реактивная 68  
 Процесс переходный 427  
 — периодический 50  
 Прямая передача 237  
 — последовательность 386  
 Путь в графе 305  
  
 Разложение алгебраического допол-  
 нения 307  
 — определителя 306  
 Разность потенциалов 21  
 — фаз 58, 65  
 Расположение нулей функции 448,  
 531  
  
 Реакция цепи 500, 504  
 Реализация четырехполюсника 246  
 — функции 529, 536  
 Режим периодический 329  
 — свободный 433  
 — синусоидальный 51  
 — установившийся 433  
 Резонанс «безразличный» 133  
 — на гармонике 415  
 — напряжений 66, 120  
 — полный 228  
 — сложный 226, 228  
 — токов 69, 120, 130  
 — частный 226, 228  
 Резонансная кривая 125, 229  
 — цепь 120, 358  
 — частота 120  
 Резонаторы пьезоэлектрические 297  
 Ряд гармонический (Фурье) 403  
  
 Связанные колебательные контуры  
 234  
 Сдвиг фаз 58  
 Сигнал 316  
 Сигнальные графы 302, 315  
 Симметричная трехфазная цепь 367  
 Симметричные составляющие 335  
 Синтез электрических цепей 529  
 Скольжение 384  
 Скорость волны групповая 332  
 — — фазовая 332  
 Смешанное соединение 103, 151  
 Смещение нейтрали 372  
 Собственная проводимость узла 164  
 Собственное сопротивление контура  
 159  
 Согласование сопротивлений 221,  
 248, 257, 336  
 Сопротивление 23  
 — активное 59  
 — ветви намагничивания 216  
 — взаимное (передаточное) 171  
 — взаимной индукции 205  
 — волновое 334, 338  
 — входное 171, 220, 246, 353,  
 452  
 — — линии 353  
 — — трансформатора 239  
 — — четырехполюсника 276  
 — двухполюсника 137  
 — емкостное 62  
 — индуктивное 60  
 — кабеля 327  
 — комплексное 81  
 — линии 326  
 — общее контуров 159  
 — операторное 485, 530  
 — передаточное (взаимное) 171  
 — полное 65  
 — приведенное к первичной обмот-  
 ке 216  
 — проводника 32  
 — рассеяния 216  
 — собственное контура 159  
 — характеристическое 123, 248, 275  
 Сопротивления прямой, обратной и  
 нулевой последовательностей 389  
 Спектральная функция 513  
 Среднее значение косинусоидальной  
 функции 419  
 — — периодической функции 55  
 Среднеквадратичное значение функ-  
 ции 56



Схема замещения автотрансформатора 23  
 — индуктивной катушки 35  
 — конденсатора 36  
 — трансформатора 215  
 — четырехполюсника 243  
 — мостовая 117, 157, 163, 166, 234  
 — симметричная 116  
 — цепная 104  
 — электрическая 41

Теорема взаимности (обратности) 173  
 — дифференцирования 471, 472  
 — запаздывания 471  
 — интегрирования 471, 473  
 — компенсации 175  
 — об изменении токов при изменении сопротивлений 177  
 — эквивалентном источнике тока 184  
 — — — э. д. с. 180  
 — подобия 471  
 — разложения 478  
 — свертывания 472  
 — смещения 472, 476

Тепловые потери в диэлектрике 36  
 Ток 20  
 — активный 69  
 — комплексный 82  
 — контурный 158  
 — короткого замыкания 184, 388  
 — линейный 366  
 — намагничивающий 216  
 — однофазный 50  
 — переменный 21  
 — переноса 20  
 — переходный 433  
 — постоянный 21, 44  
 — проводимости 20, 30  
 — реактивный 69  
 — свободный 433  
 — синусоидальный 57  
 — смещения 30  
 — трехфазный 361  
 — установившийся 433  
 — фазный 366

Токи несинусоидальные 400  
 Топографическая диаграмма 95  
 Топологические методы 302  
 — формулы разложения 304  
 Точка нейтральная 364  
 Трансформатор 213  
 — идеальный 217  
 Треугольник мощностей 90  
 — напряжений 83  
 — проводимостей 89  
 — сопротивлений 84  
 — токов 86

Треугольником соединение 366  
 Трехфазная цепь 361  
 — несвязанная 361  
 — несимметричная 372  
 — связанная 362  
 — симметричная 367  
 Трехфазный ток 361  
 Тригонометрическая форма ряда Фурье 403

Угловая частота 51  
 — собственная 448  
 Угол диэлектрических потерь 69  
 — сдвига фаз 58

Узел 42  
 Узлы стоячих волн 349  
 Унистор 312  
 Уравнения контурных токов 159  
 — линии телеграфные 329  
 — матричные 186, 259  
 — механических цепей 196  
 — трансформатора 214  
 — узловых напряжений 164  
 — характеристические 433, 452  
 — четырехполюсника 237, 250, 259  
 Установившийся процесс 427

Фаза 52, 361  
 — начальная 52  
 Фазоуказатель 374  
 Фильтров классификация 271  
 Фильтрующие системы 294  
 Фильтры 270  
 — безындуктивные 298  
 — верхних частот 278, 282, 283, 291, 297, 300  
 — заграждающие (режекторные) 278, 282, 283, 297, 300  
 — мостовые 296  
 — нижних частот 278, 282, 283, 291, 297, 299  
 — полосовые 278, 282, 283, 291, 297, 300  
 — реактивные (идеальные) 271  
 — симметричных составляющих 394  
 — типа  $k$  277  
 — типа  $m$  285

Формулы разложения топологические 304  
 ФОРТРАН 559  
 Фостера схемы 540  
 Функции единичная и показательные 469  
 — минимального реактивного сопротивления и проводимости 549  
 — минимальной и неминимальной фазы 553  
 Функция воздействующая 451, 504  
 — импульсная 499  
 — передаточная 256  
 — периодическая 50, 401  
 — несинусоидальная 401  
 — спектральная 514

Цепи дуальные 189  
 Цепная схема 104  
 Цепь активная 20  
 — линейная 40  
 — механическая 193  
 — непланарная 162  
 — однофазная 50  
 — пассивная 20  
 — планарная (плоская) 161  
 — резонансная 120  
 — с обратной связью 167  
 — с распределенными параметрами 324  
 — трехфазная 361  
 — эквивалентная 105  
 — электрическая 19

Частота 51  
 — комплексная 485, 530  
 — основная 403  
 — резонансная 120, 225  
 — собственных (свободных) колебаний 448



Частота среза 274  
— угловая 51  
Частотные характеристики 125, 136  
Чередование нулей и полюсов 142  
— (последовательность) фаз 374  
Четырехполюсники 309, 520, 552  
— активные 234  
— Г-образные 233, 263  
— механические 236  
— мостовые 234, 266  
— необратимые 234, 246  
— несимметричные 234  
— обратимые 234  
— одноэлементные 262  
— пассивные 234  
— П-образные 234, 245, 265  
— симметричные 234, 265, 266

Четырехполюсники Т-образные 233,  
245, 265  
Численные методы расчета переход-  
ных процессов 561  
Эквивалентные звезда и треуголь-  
ник 107  
— источники э. д. с. и тока 110  
— цепи 105  
Электродвижущая сила 53  
— — взаимной индукции 202  
— — самоиндукции 26, 59  
Элементы механической цепи 193  
— электрической цепи 19  
Энергия магнитного поля 28, 61  
— электрическая 23  
— электрического поля 31, 63

## ОГЛАВЛЕНИЕ

От издательства . . . . .	5
Предисловие к третьему изданию . . . . .	6
Условные обозначения . . . . .	11
Введение . . . . .	14
<b>Глава первая. Основные законы, элементы и параметры электрических цепей . . . . .</b>	<b>19</b>
1-1. Электрическая цепь . . . . .	19
1-2. Положительные направления тока и напряжения . . . . .	20
1-3. Мгновенная мощность и энергия . . . . .	22
1-4. Сопротивление . . . . .	23
1-5. Индуктивность . . . . .	25
1-6. Емкость . . . . .	29
1-7. Замещение физических устройств идеализированными элементами цепи . . . . .	32
1-8. Источник э. д. с. и источник тока . . . . .	37
1-9. Линейные электрические цепи . . . . .	40
1-10. Основные определения, относящиеся к электрической схеме . . . . .	41
1-11. Вольт-амперная характеристика участка цепи с источником . . . . .	43
1-12. Распределение потенциала вдоль цепи с сопротивлениями и источниками э. д. с. . . . .	45
1-13. Законы Кирхгофа . . . . .	46
1-14. Задачи и вопросы для самопроверки . . . . .	49
<b>Глава вторая. Электрическая цепь однофазного синусоидального тока . . . . .</b>	<b>50</b>
2-1. Синусоидальные электрические величины . . . . .	50
2-2. Генерирование синусоидальной э. д. с. . . . .	52
2-3. Среднее и действующее значения функции . . . . .	55
2-4. Синусоидальный ток в сопротивлении . . . . .	58
2-5. Синусоидальный ток в индуктивности . . . . .	59
2-6. Синусоидальный ток в емкости . . . . .	61
2-7. Последовательное соединение . . . . .	64
2-8. Параллельное соединение . . . . .	67
2-9. Мощность в цепи синусоидального тока . . . . .	70
2-10. Задачи и вопросы для самопроверки . . . . .	73
<b>Глава третья. Применение комплексных чисел и векторных диаграмм к расчету электрических цепей . . . . .</b>	<b>76</b>
3-1. Представление синусоидальных функций в виде проекций вращающихся векторов . . . . .	76
3-2. Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме . . . . .	80



3-3.	Зависимость между сопротивлениями и проводимостями участка цепи . . . . .	88
3-4.	Комплексная форма записи мощности . . . . .	89
3-5.	Условие передачи максимума активной мощности от источника к приемнику . . . . .	91
3-6.	Условие передачи источником максимума мощности при заданном коэффициенте мощности приемника . . . . .	93
3-7.	Баланс мощностей . . . . .	94
3-8.	Потенциальная (топографическая) диаграмма . . . . .	95
3-9.	Задачи и вопросы для самопроверки . . . . .	97
<b>Глава четвертая. Преобразование схем электрических цепей . . . . .</b>		<b>99</b>
4-1.	Последовательное и параллельное соединения . . . . .	99
4-2.	Смешанное соединение . . . . .	103
4-3.	Эквивалентные участки цепи с последовательным и параллельным соединениями . . . . .	105
4-4.	Преобразование треугольника в эквивалентную звезду . . . . .	107
4-5.	Преобразование звезды в эквивалентный треугольник . . . . .	109
4-6.	Эквивалентные источники э. д. с. и тока . . . . .	110
4-7.	Преобразование схем с двумя узлами . . . . .	112
4-8.	Перенос источников в схеме . . . . .	113
4-9.	Преобразование симметричных схем . . . . .	116
4-10.	Задачи и вопросы для самопроверки . . . . .	118
<b>Глава пятая. Резонанс в электрических цепях . . . . .</b>		<b>120</b>
5-1.	Резонансные (колебательные) цепи . . . . .	120
5-2.	Последовательный колебательный контур. Резонанс напряжений . . . . .	121
5-3.	Параллельный колебательный контур. Резонанс токов . . . . .	130
5-4.	Частотные характеристики сопротивлений и проводимостей реактивных двухполюсников . . . . .	136
5-5.	Задачи и вопросы для самопроверки . . . . .	143
<b>Глава шестая. Геометрические места на комплексной плоскости . . . . .</b>		<b>144</b>
6-1.	Графическое изображение зависимостей комплексных величин от параметра . . . . .	144
6-2.	Преобразование вида $Y = 1/Z$ . . . . .	146
6-3.	Диаграммы сопротивлений и проводимостей простейших электрических цепей . . . . .	148
6-4.	Задачи и вопросы для самопроверки . . . . .	153
<b>Глава седьмая. Методы расчета сложных электрических цепей . . . . .</b>		<b>154</b>
7-1.	Применение законов Кирхгофа для расчета сложных цепей . . . . .	154
7-2.	Метод контурных токов . . . . .	158
7-3.	Метод узловых напряжений . . . . .	163
7-4.	Метод наложения . . . . .	167
7-5.	Входные и передаточные проводимости и сопротивления . . . . .	169
7-6.	Теорема обратимости (или взаимности) . . . . .	173
7-7.	Теорема компенсации . . . . .	175
7-8.	Теорема об изменении токов в электрической цепи при изменении сопротивления в одной ветви . . . . .	177

7-9.	Теорема об эквивалентном источнике . . . . .	180
7-10.	Применение матриц к расчету электрических цепей . . . . .	185
7-11.	Дуальные цепи . . . . .	189
7-12.	Электромеханические аналогии . . . . .	192
7-13.	Задачи и вопросы для самопроверки . . . . .	197
<b>Глава восьмая. Индуктивно связанные электрические цепи . . . . .</b>		<b>198</b>
8-1.	Основные положения и определения . . . . .	198
8-2.	Полярности индуктивно связанных катушек; э. д. с. взаимной индукции . . . . .	200
8-3.	Комплексная форма расчета цепи с взаимной индукцией . . . . .	204
8-4.	Коэффициент индуктивной связи. Индуктивность рассеяния . . . . .	209
8-5.	Уравнения и схемы замещения трансформатора без магнитопровода . . . . .	213
8-6.	Энергия индуктивно связанных обмоток . . . . .	219
8-7.	Входное сопротивление трансформатора . . . . .	220
8-8.	Автотрансформатор . . . . .	222
8-9.	Индуктивно связанные колебательные контуры . . . . .	224
8-10.	Настройка связанных контуров . . . . .	226
8-11.	Резонансные кривые и полоса пропускания связанных контуров . . . . .	229
8-12.	Задачи и вопросы для самопроверки . . . . .	231
<b>Глава девятая. Четырехполюсники . . . . .</b>		<b>233</b>
9-1.	Основные определения и классификация четырехполюсников . . . . .	233
9-2.	Системы уравнений четырехполюсника . . . . .	237
9-3.	Уравнения четырехполюсника в форме $\  A \ $ . . . . .	240
9-4.	Параметры холостого хода и короткого замыкания . . . . .	242
9-5.	Схемы замещения четырехполюсника . . . . .	243
9-6.	Входное сопротивление четырехполюсника при произвольной нагрузке . . . . .	246
9-7.	Характеристические параметры четырехполюсника . . . . .	248
9-8.	Вносимое затухание четырехполюсника . . . . .	254
9-9.	Передаточная функция . . . . .	256
9-10.	Каскадное соединение четырехполюсников, основанное на согласовании характеристических сопротивлений . . . . .	257
9-11.	Уравнения сложных четырехполюсников в матричной форме . . . . .	259
9-12.	Одноэлементные четырехполюсники . . . . .	262
9-13.	G-образный четырехполюсник . . . . .	263
9-14.	T-образный и П-образный четырехполюсники . . . . .	265
9-15.	Симметричный мостовой четырехполюсник . . . . .	266
9-16.	Обратная связь . . . . .	267
9-17.	Задачи и вопросы для самопроверки . . . . .	268
<b>Глава десятая. Электрические фильтры и топологические методы анализа линейных электрических цепей . . . . .</b>		<b>269</b>
10-1.	Основные определения и классификация электрических фильтров . . . . .	269
10-2.	Условие пропускания реактивного фильтра . . . . .	271



10-3.	Фильтры типа $k$ . . . . .	277
10-4.	Фильтры типа $m$ . . . . .	285
10-5.	Индуктивно связанные контуры как фильтрующая система . . . . .	294
10-6.	Мостовые фильтры. Пьезоэлектрические резонаторы	296
10-7.	Безындуктивные фильтры . . . . .	298
10-8.	Топологические формулы нахождения определителей и алгебраических дополнений . . . . .	302
10-9.	Топологические формулы разложения . . . . .	304
10-10.	Топологические формулы для передаточных функций	308
10-11.	Топологический анализ активных цепей . . . . .	312
10-12.	Сигнальные графы и методы их преобразования . . . . .	315
10-13.	Построение сигнальных графов электрических цепей	321
10-14.	Задачи и вопросы для самопроверки . . . . .	323
<b>Глава одиннадцатая. Цепи с распределенными параметрами . . . . .</b>		<b>324</b>
11-1.	Первичные параметры однородной линии . . . . .	324
11-2.	Дифференциальные уравнения однородной линии	327
11-3.	Синусоидальный режим в однородной линии . . . . .	329
11-4.	Вторичные параметры однородной линии . . . . .	338
11-5.	Линия без искажений . . . . .	343
11-6.	Линия без потерь . . . . .	345
11-7.	Режимы работы линии без потерь. Стоячие волны	347
11-8.	Входное сопротивление линии . . . . .	353
11-9.	Линия как элемент резонансной цепи . . . . .	358
11-10.	Искусственные линии . . . . .	359
11-11.	Задачи и вопросы для самопроверки . . . . .	360
<b>Глава двенадцатая. Цепи трехфазного тока . . . . .</b>		<b>361</b>
12-1.	Трехфазные электрические цепи . . . . .	361
12-2.	Соединение звездой и треугольником . . . . .	364
12-3.	Симметричный режим работы трехфазной цепи . . . . .	367
12-4.	Несимметричный режим работы трехфазной цепи	372
12-5.	Мощность несимметричной трехфазной цепи . . . . .	376
12-6.	Вращающееся магнитное поле . . . . .	378
12-7.	Принцип действия асинхронного и синхронного двигателей . . . . .	383
12-8.	Метод симметричных составляющих . . . . .	385
12-9.	Поперечная несимметрия . . . . .	388
12-10.	Продольная несимметрия . . . . .	393
12-11.	Фильтры симметричных составляющих . . . . .	394
12-12.	Задачи и вопросы для самопроверки . . . . .	398
<b>Глава тринадцатая. Цепи периодического несинусоидального тока . . . . .</b>		<b>400</b>
13-1.	Тригонометрическая форма ряда Фурье . . . . .	400
13-2.	Случай симметрии . . . . .	406
13-3.	Перенос начала отсчета . . . . .	411
13-4.	Комплексная форма ряда Фурье . . . . .	412
13-5.	Применение ряда Фурье к расчету периодического несинусоидального процесса . . . . .	414
13-6.	Действующее и среднее значения периодической несинусоидальной функции . . . . .	418
13-7.	Мощность в цепи периодического несинусоидального тока . . . . .	419



13-8.	Коэффициенты, характеризующие периодические несинусоидальные функции . . . . .	421
13-9.	Высшие гармоники в трехфазных электрических цепях . . . . .	422
13-10.	Задачи и вопросы для самопроверки . . . . .	425
<b>Глава четырнадцатая. Переходные процессы в электрических цепях. Классический метод расчета . . . . .</b>		<b>427</b>
14-1.	Возникновение переходных процессов . . . . .	427
14-2.	Законы коммутации и начальные условия . . . . .	429
14-3.	Установившийся и свободный режимы . . . . .	432
14-4.	Переходный процесс в цепи $r, L$ . . . . .	434
14-5.	Переходный процесс в цепи $r, C$ . . . . .	440
14-6.	Переходный процесс в цепи $r, L, C$ . . . . .	444
14-7.	Расчет переходного процесса в разветвленной цепи . . . . .	451
14-8.	Переходные процессы в цепях с распределенными параметрами . . . . .	459
14-9.	Задачи и вопросы для самопроверки . . . . .	464
<b>Глава пятнадцатая. Применение преобразования Лапласа к расчету переходных процессов . . . . .</b>		<b>465</b>
15-1.	Общие сведения . . . . .	465
15-2.	Прямое преобразование Лапласа. Оригинал и изображение . . . . .	467
15-3.	Изображения некоторых простейших функций . . . . .	468
15-4.	Основные свойства преобразования Лапласа . . . . .	470
15-5.	Нахождение оригинала по изображению с помощью обратного преобразования Лапласа . . . . .	477
15-6.	Теорема разложения . . . . .	478
15-7.	Таблицы оригиналов и изображений . . . . .	482
15-8.	Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений электрических цепей . . . . .	483
15-9.	Учет ненулевых начальных условий методом эквивалентного источника . . . . .	492
15-10.	Формулы включения . . . . .	497
15-11.	Расчет переходного процесса с помощью формул разложения . . . . .	498
15-12.	Нахождение в замкнутой форме установившейся реакции цепи на периодическую несинусоидальную воздействующую функцию . . . . .	504
15-13.	Исследование переходных процессов в цепях с распределенными параметрами с помощью преобразования Лапласа . . . . .	508
15-14.	Задачи и вопросы для самопроверки . . . . .	510
<b>Глава шестнадцатая. Применение преобразования Фурье к расчету переходных процессов . . . . .</b>		<b>512</b>
16-1.	Преобразование Фурье как частный случай преобразования Лапласа . . . . .	512
16-2.	Спектральная функция . . . . .	513
16-3.	Переходный процесс в двухполюснике . . . . .	523
16-4.	Переходный процесс в четырехполюснике . . . . .	526
16-5.	Задачи и вопросы для самопроверки . . . . .	528



<b>Глава семнадцатая. Синтез линейных электрических цепей</b> . . . . .	<b>529</b>
17-1. Характеристика задач синтеза . . . . .	529
17-2. Исследование двухполюсника при комплексной частоте . . . . .	530
17-3. Условия физической реализуемости функции . . . . .	536
17-4. Свойства двухэлементных двухполюсников и их реализация . . . . .	538
17-5. Общий случай реализации функций двухполюсника . . . . .	548
17-6. Исследование четырехполюсника на комплексной частоте. . . . .	552
17-7. Синтез реактивных четырехполюсников . . . . .	555
17-8. Задачи и вопросы для самопроверки. . . . .	556

**Приложения:**

I. Машинный расчет линейных электрических цепей . . . . .	558
II. Соотношения между коэффициентами четырехполюсника . . . . .	575
III. Определители, выраженные через коэффициенты четырехполюсника . . . . .	577
IV. Оригиналы и изображения по Лапласу . . . . .	578
Список литературы . . . . .	581
Предметный указатель . . . . .	582

**ГДЕ КУПИТЬ**

**ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИЙ:**

*Для того, чтобы заказать необходимые Вам книги, достаточно обратиться в любую из торговых компаний Издательского Дома «ЛАНЬ»:*

**по России и зарубежью**

«ЛАНЬ-ТРЕЙД». 192029, Санкт-Петербург, ул. Крупской, 13  
 тел.: (812) 412-85-78, 412-14-45, 412-85-82; тел./факс: (812) 412-54-93  
 e-mail: trade@lanpbl.spb.ru; ICQ: 446-869-967  
[www.lanpbl.spb.ru/price.htm](http://www.lanpbl.spb.ru/price.htm)

**в Москве и в Московской области**

«ЛАНЬ-ПРЕСС». 109263, Москва, 7-ая ул. Текстильщиков, д. 6/19  
 тел.: (499) 178-65-85; e-mail: lanpress@ultimanet.ru

**в Краснодаре и в Краснодарском крае**

«ЛАНЬ-ЮГ». 350072, Краснодар, ул. Жлобы, д. 1/1  
 тел.: (8612) 74-10-35; e-mail: lankrd98@mail.ru

**ДЛЯ РОЗНИЧНЫХ ПОКУПАТЕЛЕЙ:**

*интернет-магазины:*

«Сова»: <http://www.symplex.ru>; «Ozon.ru»: <http://www.ozon.ru>  
 «Библион»: <http://www.biblion.ru>

также Вы можете отправить заявку на покупку книги по адресу: 192029, Санкт-Петербург, ул. Крупской, 13